Заочный
физико-математический
лицей «Авангард»

ШКОЛА-ИНТЕРНАТ
"ИНТЕЛЛЕКТУАЛ"

МАТЕМАТИКА

6

Экспериментальный учебник

Часть 1

МОСКВА 2012

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ШКОЛА-ИНТЕРНАТ "ИНТЕЛЛЕКТУАЛ"

Заочный физико-математический лицей «Авангард»

Е. В. Рябокобыленко, Е. Н. Филатов

МАТЕМАТИКА 6

Экспериментальный учебник

Часть 1

Под редакцией Е.Н. Филатова

МОСКВА 2012

Рябокобыленко Е.В., Филатов Е. Н. **МАТЕМАТИКА-6**: Экспериментальный учебник. Часть 1./ Под. ред. Е.Н. Филатова. – М.: АНО ЗФМЛ "Авангард", 2012. – 244 с.

Учебник предназначен для углубленного изучения математики в 6-м классе. Главная цель учебника – научить ребят самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» - краткие рекомендации к их решению и ответы.

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Отрицательные числа 4
§ 2. Десятичные дроби 56
§ 3. Обыкновенные дроби 92
§ 4. Вычисление арифметических выражений .. 173
Подсказки 213
Ответы... 226

§ 1. Отрицательные числа[1]

Числовая ось и целые числа

Давайте начертим прямую и отметим на ней произвольную точку и назовем её точкой 0 или ***началом координат.*** Отметим на прямой направление (слева направо) и отметим единичный отрезок. Такую прямую мы будем называть ***числовой прямой (или числовой осью)***, так как каждой точке на ней будет соответствовать определенное число.

Для точек, расположенных справа от нуля, это число будет равно расстоянию от данной точки до точки 0. Например, точка A располагается на расстоянии трех единичных отрезков от 0 – она соответствует числу 3. Число 3 в этом случае ещё называется ***координатой*** точки A (рис. 1. 1).

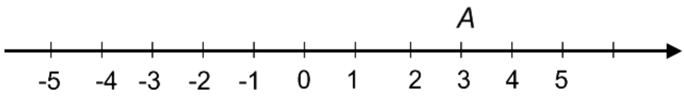

Рис. 1.1

Координату точки начала координат мы будем считать равной нулю: в самом деле, чему же ещё может быть равно расстояние от точки до самой себя?

Итак, каждой точке, расположенной справа от точки 0, соответствует определенное число. А как быть с точками, расположенными слева от точки 0?

Давайте отметим точки, расположенные слева от точки 0 на расстояниях, равных одному, двум, трем и т.д. единичным отрезкам.

---

[1] Данный параграф предназначен для тех, кто *не изучал наш курс математики в 5-м классе.* Если этот материал уже изучен по учебнику 5-го класса, то будет вполне достаточно лишь *прочитать* данный параграф для повторения и сразу решить задачи из домашнего задания.

Эти точки тоже хотелось бы как-то обозначить, причем так, чтобы, с одной стороны, было понятно, на каком расстоянии от точки 0 находится каждая точка, а с другой стороны, чтобы было понятно, что эти точки находятся ***слева*** от точки 0, а ***не справа.***

Точкам, расположенным слева от точки 0, будем ставить в соответствие числа, равные расстояниям этих точек до начала координат, а чтобы не забыть, что эти точки находятся ***слева*** от начала координат, будем ещё ставить перед этими числами знаки «минус»: –1; –2; –3; ...; –100; ... Например, точке B на рис. 1.2 будет соответствовать число –3.

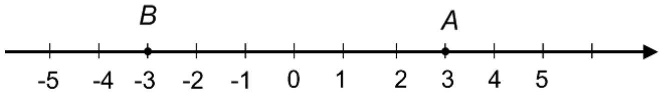

Рис. 1.2

Таким образом, у нас появились новые числа: –1; –2; –3; ...; –100; ... Числа, обозначающие координаты точек, расположенных слева от начала координат на числовой оси, математики назвали ***отрицательными,*** а числа расположенные справа от начала координат на числовой оси – ***положительными.***

Вряд ли существование таких чисел вас сильно удивило: вы же знаете, что температура воздуха на улице может быть как положительной, так и отрицательной: например, летом равной плюс 20 градусам тепла, а зимой – равной минус 20 градусам мороза.

Заметим, что иногда для того, чтобы подчеркнуть, что данное число является положительным, а не отрицательным, перед ним ставят знак «плюс»: +20. Дикторы по радио тоже часто говорят: «Температура воздуха плюс 5 градусов». Но чаще при записи положительных чисел знак «плюс» перед ними (для краткости) не ставят. Поэтому договоримся: если мы с вами записали число без знака перед ним, то это число положительное, то есть число 20 и число +20 – это одно и то же.

Множество чисел, включающее в себя все натуральные числа, ноль и целые отрицательные числа, называется множеством ***целых чисел.***

То есть –1; 0 и 6 – это целые числа, но натуральное из них только 6, а целое отрицательное – (–1).

Читатель: А число нуль: оно положительное или отрицательное?

Автор: Это особое число: оно не положительное и не отрицательное. Можно сказать, что это пограничный столб между отрицательными и положительными числами.

СТОП! Решите самостоятельно!

А1. Назовите какие-нибудь целые числа, которые расположены на координатной прямой: а) правее числа 3; б) левее числа 0; в) правее числа –15; г) между числами –20 и –5.

А2. Назовите буквами латинского алфавита и запишите координаты точек, отмеченных на рис. 1.3.

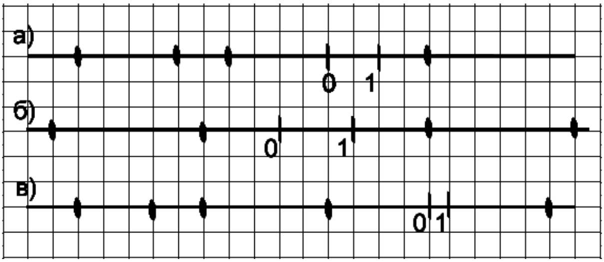

Рис. 1.3

Б1. Начертите шкалу температур от –30 до 60 °С. Приняв отрезок длиной 1 см за 10 °С, отметьте на этой шкале точку замерзания глицерина –20 °С, температуру таяния льда 0 °С.

Задача 1.1. Координата точки A равна –5. Какой станет координата точки A, если: а) перенести ее на 2 единицы вправо; б) на 2 единицы влево; в) перенести начало координат на 3 единицы влево; г) перенести начало координат на 3 единицы влево?

Решение. Нарисуем числовую ось и отметим на ней начальное положение точки A (рис. 1.4)

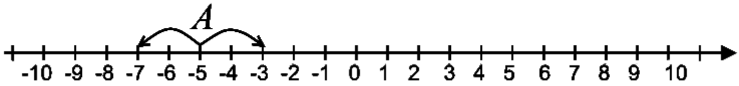

Рис. 1.4

Как видно из рисунка, в случае а) координата точки станет равной –3, а в случае б) координата точки станет равной –7.

Для случая в) оставим нашу точку A на месте и нарисуем вторую координатную ось, начало координат которой сдвинуто вправо на 2 единицы (рис. 1.5). Из рисунка видно, что новая координата точки A равна –7.

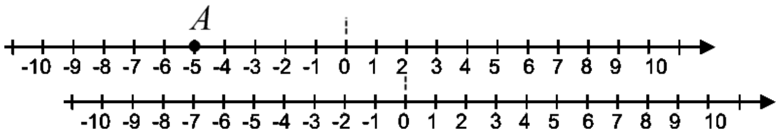

Рис. 1.5

Для случая г) оставим точку A на месте и нарисуем вторую координатную ось, начало координат которой сдвинуто на 3 единицы влево (рис. 1.6). Из рисунка видно, что новая координата точки A равна –2.

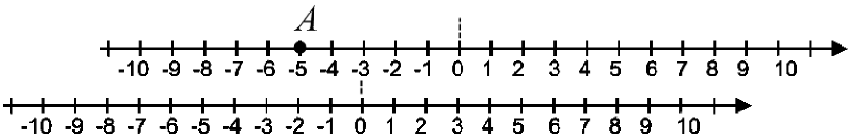

Рис. 1.6

СТОП! Решите самостоятельно!

А3. Какой станет координата точки $A(2)$, если точка переместится: а) на 2 единицы вправо; б) на 5 единиц вправо; в) на 20 единиц влево; г) на 3 единицы влево?

В1. На координатной прямой отмечены точки: $A(–3)$, $B(4)$, $C(–2)$. Какими станут координаты этих точек, если начало координат перенести: а) в точку A; б) в точку B; в) в точку C?

Симметричные точки на числовой оси

Пусть у нас имеется некоторая прямая, на которой отмечена точка O. Точки A и B называются ***симметричными относительно точки O,*** если они расположены на прямой, проходящей через точку O, на равных расстояниях от точки O (рис. 1.7). $AO = OB$.

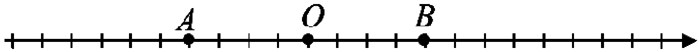

Рис. 1.7

Задача 1.2. На числовой прямой отмечена точка $A(-2)$. Укажите точку, симметричную точке A: а) относительно начала координат; б) относительно точки $B(-1)$; в) относительно точки $C(1)$.

Решение. а) Очевидно, что относительно точки O симметричной для точки A является точка $K(2)$ (рис. 1.8).

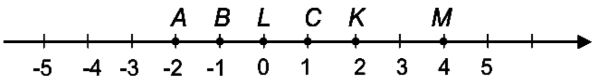

Рис. 1.8

б) Относительно точки $B(-1)$ симметричной для точки A является точка $L(0)$, то есть начало координат: она расположена на расстоянии одного единичного отрезка слева от точки B;

в) Точка A расположена на три единичных отрезка левее точки $C(1)$, значит, симметричная ей относительно точки C точка расположена на 3 единичных отрезка правее точки C. Из рис. 1.8 видно, что это точка $M(4)$.

Ответ: а) $K(2)$; $L(0)$; $M(4)$.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б2. На числовой оси имеются две точки: $A(-2)$ и $B(3)$. Запишите: а) координату точки A', симметричной точке A относительно точки B; б) координату точки B', симметричной точке B относительно точки A.

В2. На координатной оси имеются три точки: $A(-10)$; $B(-1)$; $C(+1)$. Запишите координаты:

а) точек A' и A'', симметричных точке A относительно точек B и C;

б) точек B' и B'', симметричных точке B относительно точек A и C;

в) точек C' и C'', симметричных точке C относительно точек A и B.

Сложение и вычитание с помощью числовой оси

Вспомните, как в первом классе вы учились складывать и вычитать натуральные числа с помощью числовой оси. Например, чтобы к числу 5 прибавить число 3, надо сделать три шага вправо, а чтобы из числа 5 вычесть число 3, надо сделать три шага влево (рис. 1.9). В первом случае мы получим: $5 + 3 = 8$, а во втором: $5 - 3 = 2$.

Рис. 1.9

Это же правило справедливо и при действиях с отрицательными числами.

Задача 1.3. С помощью числовой оси выполните действия: а) $-2 + 3$; б) $-2 - 3$; в) $3 - 5$.

Решение. В первом случае нам необходимо от точки с координатой (–2) сделать 3 шага вправо (рис. 1.10, *а*).

Получаем: $-2 + 3 = +1$.

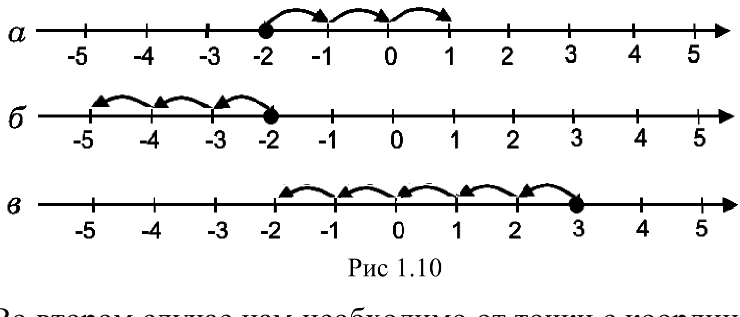

Рис 1.10

Во втором случае нам необходимо от точки с координатой (–2) сделать 3 шага влево (рис. 1.10, *б*).

Получаем: $-2 - 3 = -5$.

В третьем случае нам необходимо от точки с координатой $(+3)$ сделать 5 шагов влево (рис. 1.10, *в*).

Получаем: $+3 - 5 = -2$.

СТОП! Решите самостоятельно!

А4. С помощью числовой оси выполните действия: а) $-1+2$; б) $-2 + 1$; в) $-2 - 5$; г) $0 - 2$.

Б3. Что должно быть записано в пустых ячейках таблицы?

Координата точки	Перемещение точки	Действие с координатой точки	Новая координата точки
5	На 7 влево	5 – 7	–2
–4	На 9 вправо		
6			–5
	На 4 влево		–10
–8			3
		-7 – 2	

Противоположные числа

Два числа, отличающиеся только знаком, называются ***противоположными.*** Например, $+2$ и -2. Эти числа расположены слева и справа от точки 0 на равных расстояниях от неё.

Читатель: А какое число является противоположным для числа нуль?

Автор: Нуль противоположен сам себе: то есть $+0 = -0$, так уж ***договорились*** математики. Это понятно и с точки зрения здравого смысла: на нулевом расстоянии от нуля находится только сам нуль!

Задача 1.4. Отметьте на числовой прямой числа 3, –5 и им противоположные. Какое из чисел лежит ближе к нулю?

Решение. Число 3 располагается на расстоянии трех единичных отрезков в положительном направлении (справа от нуля). А число (–3), противоположное числу 3, располагается на таком же расстоянии, но уже в отрицательном направлении (слева от нуля).

Число (–5) располагается на расстоянии пяти единичных отрезков в отрицательном направлении (слева от нуля). А число, противоположное (–5), число 5 располагается на таком же расстоянии, но в положительном направлении (справа от нуля).

На рис. 1.11 видно, что ближе всего к нулю располагаются числа 3 и (–3).

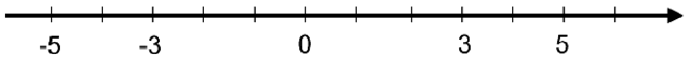

Рис. 1.11

СТОП! Решите самостоятельно!

А5. Отметьте на числовой прямой числа 3, 7, 11 и числа, им противоположные.

А6. Отметьте на числовой прямой числа –4, –9, –12 и числа, им противоположные.

Б4. Не рисуя числовую прямую, укажите, какое из чисел ближе к нулю: а) –4 или 3; б) –98 или 99; в) –13 или –14; г) 8 или –8.

Читатель: А что произойдет, если мы поставим перед числом знак *минус*?

Автор: ***Поставить перед числом знак минус – значит заменить число на противоположное***. Почему? Математики ТАК ДОГОВОРИЛИСЬ!

Читатель: Понятно! Т.е. **–(+5) = –5,** а **–(–5) = +5.** А что произойдет, если перед числом написать знак плюс?

Автор: В этом случае число останется самим собой! То есть +(5) = 5, а +(–5) = –5. Все, что мы сказали раньше, дает нам возможность сформулировать такое правило:

Правило скобок. *Если перед числом в скобках стоит знак минус, то можно скобки отбросить, записав вместо числа в* *скобках противоположное ему число. Если же перед скобками стоит плюс, то скобки отбрасываются без изменения знака числа в скобках.*

Задача 1.5. Запишите числа без скобок: а) –(–(+(–6))); б) – (–(–(–6))).

Решение. Будем последовательно избавляться от скобок, начиная с внутренних:

а) –(–(+(–6))) = –(–(–6)) = –(+6) = –6;

б) –(–(–(–6))) = –(–(+6)) = –(–6) = +6.

Читатель: Я понял: каждый минус, стоящий перед числом, один раз меняет его знак на противоположный. Если мы меняем знак числа на противоположный два раза подряд, то мы возвращаемся к тому, с чего начали! Значит, ***если перед числом стоит четное число минусов, то в результате получим плюс*** (как в задаче 1.5 в случае б). А ***если перед числом стоит нечетное число минусов, то в результате получим минус*** (как в задаче 1.5 в случае а).

Автор: Совершенно верно!

СТОП! Решите самостоятельно!

А7. Каким числом: отрицательным, положительным или нулём, является $-k$, если k: а) отрицательное; б) положительное; в) ноль?

А8. Запишите числа без скобок:

а) –(–2), б) –(–137), в) –(+(–(–4))), г) –(–(–12)), д) –(–(–(–1))).

Б5. Запишите без скобок: 1) –(–(–a)), 2) –(+(+(–(–(–b))))).

Модуль числа

Модулем числа (положительного или отрицательного) называется расстояние от точки, обозначающей данное число на числовой прямой, до начала координат – точки 0.

Обозначается модуль числа a так: $|a|$. Например: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Ясно, что модуль любого числа не может быть отрицательным числом, потому что расстояние – это либо положительная величина, либо нуль.

СТОП! Решите самостоятельно!

А9. Чему равен модуль чисел –97; 245; 0; –36; 454?

Б6. Покажите, где на координатной прямой изображаются числа, модули которых: а) меньше 6; б) больше –3; в) больше 1; г) меньше 3; д) не больше 0.

В3. Вычислите:

а) $\lvert -4\rvert + \lvert -5\rvert$,	д) $\lvert -24\rvert + \lvert 0\rvert$,	и) $\lvert -6\rvert - \lvert -14\rvert : 7$,
б) $\lvert -8\rvert : \lvert 2\rvert$,	е) $\lvert -8\rvert \cdot \lvert -5\rvert$,	к) $\lvert -4\rvert \cdot \lvert -1\rvert + \lvert -25\rvert$,
в) $\lvert -5\rvert : \lvert -1\rvert$,	ж) $\lvert 9\rvert - \lvert -3\rvert$,	л) $\lvert -21\rvert : \lvert -7\rvert \cdot \lvert -5\rvert - 6$,
г) $\lvert 2\rvert - \lvert -3\rvert$,	з) $\lvert -7\rvert : \lvert -1\rvert$,	м) $\lvert -5\rvert \cdot \lvert -9\rvert - 25 \cdot \lvert 0\rvert$.

Как найти длину отрезка?

Задача 1.6. На числовой оси отмечены точки M и N. Найдите длину отрезка MN, если точки M и N имеют координаты: а) $M(3)$; $N(5)$; б) $M(-3)$; $N(5)$; в) $M(-5)$; $N(-3)$.

Решение.

а) $M(3)$; $N(5)$. Точки M и N показаны на рис. 1.12.

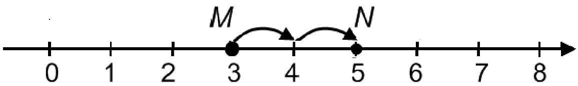

Рис. 1.12

Даже «невооруженным глазом» видно, что длина отрезка MN равна 2, так как для того, чтобы перейти из точки M в точку N, надо сделать два шага вправо.

Читатель: А как быть, если расстояние от M до N слишком велико, и «шагать» придется очень долго? Вот, например, пусть M(1 000 001) и N(2 000 200). Как найти длину отрезка MN?

Автор: Давайте рассмотрим общий случай. Пусть координата точки M равна a ($a > 0$), а координата точки N равна b $(b > 0)$ (рис. 1.13)

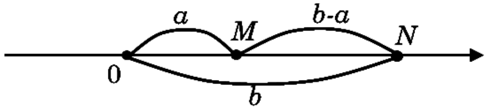

Рис. 1.13

Ясно, что расстояние от 0 до точки M равно a, а расстояние от 0 до точки N равно b. Тогда, как видно из рис. 1.13, расстояние от M до N равно $b - a$.

В приведенном Вами примере $b = 2\,000\,200$, $a = 1\,000\,001$, значит, длина отрезка MN равна:

$$b - a = 2\,000\,200 - 1\,000\,001 = 1\,000\,199.$$

б) $M(-3)$; $N(5)$. Изобразим наши точки M и N на числовой оси (рис. 1.14). Заметим, что точка M находится слева от начала координат, а точка N – справа.

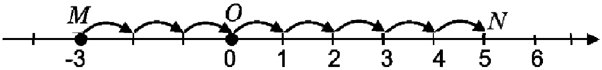

Рис. 1.14

Здесь тоже не представляет труда сосчитать, что от M до N нужно сделать 8 шагов вправо, поэтому длина отрезка MN равна 8.

Читатель: А если координаты точек M и N очень велики по модулю? Например, пусть $M(-1\,000\,001)$ и $N(2\,000\,200)$. Как найти длину отрезка MN?

Автор: Давайте рассмотрим общий случай. Пусть координата точки M равна a ($a < 0$), а координата точки N равна b $(b > 0)$ (рис. 1.15).

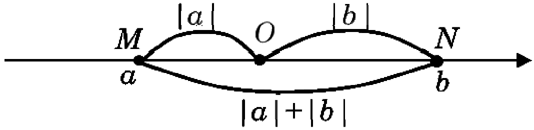

Рис. 1.15

Ясно, что длина отрезка *MN* равна сумме длин отрезков *MO* и *ON*: *MN* = *MO* + *ON*.

Но *MO* – это расстояние от точки *M* до начала координат; оно равно модулю координаты точки *M*: $MO = |a|$; *ON* – это расстояние от начала координат до точки *N*; оно равно модулю координаты точки *N*: $ON = |b|$. Значит, длина отрезка *MN* равна: $MN = |a| + |b|$.

В нашем примере:

$$a = -1000\,001;\ b = 2\,000\,200 \to MN = |-1000\,001| + |2\,000\,200| =$$
$$= 1000\,001 + 2\,000\,200 = 3\,000\,201.$$

в) *M*(–5); *N*(–3). Изобразим на числовой оси точки *M* и *N* (рис. 1.16).

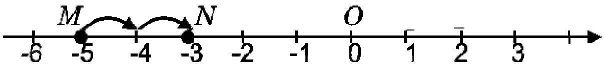

Рис. 1.16

Ответ виден сразу: длина отрезка *MN* равна 2, потому что от *M* до *N* ровно 2 «шага».

Рассмотрим более общий случай. Пусть координата точки *M* равна *a* (*a* < 0), а координата точки *N* равна *b* (*b* < 0) и пусть *a* < *b* (рис. 1.17). Найдем длину отрезка *MN*.

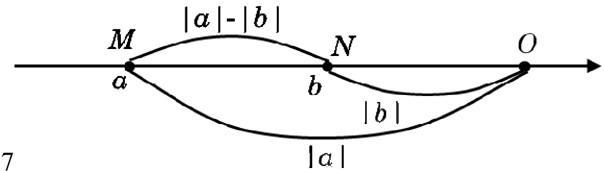

Рис. 1.17

Из рисунка видно, что длина отрезка *MN* равна разности длин отрезков *MO* и *NO*. Поскольку $MO = |a|$, а $NO = |b|$, то $MN = MO - NO = |a| - |b|$.

Если, например, взять $a = -2\,000\,200$; $b = -1000\,001$, то

$MN = \left|-2\,000\,200\right| - \left|-1000\,001\right| = 2\,000\,200 - 1000\,001 = 1000199.$

Ответ: а) 2; б) 8; в) 2.

СТОП! Решите самостоятельно!

А10. По заданным координатам точек *M* и *N* вычислите длины отрезков *MN*: а) *M*(1); *N*(5); б) *M*(–5); *N*(1); в) *M*(-5); *N*(-1).

Б7. По заданны *M* координата *M* точек *M* и *N* вычислите длины отрезков *MN*: а) *M*(101); *N*(521); б) *M*(-521); *N*(101); в) *M*(–333); *N*(–112).

Уравнения со знаком модуля

Задача 1.7. Решите уравнения: а) $|x| = 5$; б) $-|x| = -5$; в) $-|x| = 5$; г) $|-x| = 5$; д) $|x-1| = 5$.

Решение.

а) $|x| = 5$. Если *x* – это координата некоторой точки на числовой оси, то расстояние от этой точки до 0 равно 5. Такое возможно в двух случаях: либо *x* = 5, либо *x* = –5 (рис. 1.18). Значит, наше уравнение имеет два корня: $x_1 = 5;\quad x_2 = -5$.

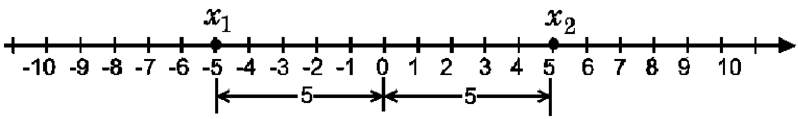

Рис. 1.18

б) $-|x| = -5$. Если два целых числа равны, то и противоположные им числа тоже равны, то есть если 5 = 5, то –5 = –5, а если –5 = –5, то и –(–5) = –(–5). $-|x|$ – это некоторое «засеченное» число. Поэтому если перед каждым из чисел в нашем уравнении поставить знак минус, то равенство не нарушится: $-|x| = -5 \to -(-|x|) = -(-5) \to |x| = 5$. А это уравнение мы уже решили в пункте а), оно имеет два корня: $x_1 = 5; \quad x_2 = -5$.

в) $-|x| = 5$. Поставим знак минус перед каждым из чисел в нашем уравнении, получим: $-|x| = 5 \to -(-|x|) = -5 \to |x| = -5$.

Читатель: Но, по-моему, модуль любого числа – число положительное! Как же положительное число может быть равным отрицательному?

Автор: Вы абсолютно правы: это невозможно. Значит, наше уравнение не имеет корней.

г) $|-x| = 5$. Сделаем такую «хитрость»: заменим «засекреченное» число $-x$ в нашем уравнении на «засекреченное» число *y*, то есть пусть *y* = –*x*. Тогда уравнение примет вид $|y| = 5$. А такое уравнение мы уже умеем решать, оно имеет два корня: $y_1 = 5; \ y_2 = -5$.

Нам осталось найти *x*. Поскольку *y* = –*x*, то получаем два равенства: 1) 5 = –*x*; 2) –5 = –*x*.

Поставим в каждое из этих равенств минус перед каждым из чисел и легко найдем ответ:

1) $5 = -x \to -5 = -(-x) \to -5 = x \to x = -5$.

2) $-5 = -x \to -(-5) = -(-x) \to 5 = x \to x = 5$.

Следовательно, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = -5; \quad x_2 = 5$.

Читатель: Получается, что уравнения $|x| = 5$ и $|-x| = 5$ имеют одни и те же корни?

Автор: Совершенно верно.

д) $|x-1| = 5$. Сделаем «хитрость», похожую на ту, что мы только что применили в пункте г): заменим неизвестное число $x - 1$ на неизвестное число *y*, получим уже хорошо нам известное уравнение $|y| = 5$, которое имеет два корня: $y_1 = 5$, $y_2 =$

$= -5$. Теперь вспомним, что $y = x - 1$, и получим два простых уравнения:

1) $x - 1 = 5 \to x - 1 + 1 = 5 + 1 \to x = 6$; проверим: $|6 - 1| = 5$;

2) $x - 1 = -5 \to x - 1 + 1 = -5 + 1 \to x = -4$; проверим:
$$|-4 - 1| = |-5| = 5.$$

То есть наше уравнение имеет два корня: $x_1 = 6$; $x_2 = -4$.

Ответ: а) $x_1 = 5$; $x_2 = -5$; б) $x_1 = 5$; $x_2 = -5$; в) нет корней; г) $x_1 = -5$; $x_2 = 5$; д) $x_1 = 6$; $x_2 = -4$.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б8. Решите уравнения: а) $|y| + 2 = 0$; б) $|2y| = 30$; в) $-|-y| = -6$.

В4. Решите уравнения: а) $|y + 1| = 5$; б) $|2y + 1| = 3$; в) $|1 - y| = 3$.

Как сравнивать целые числа?

Допустим, у нас есть два целых числа, и требуется их сравнить. Спрашивается: как это сделать?

Во-первых, заметим, что эти два числа могут быть:

1) оба положительные;
2) одно нуль, а другое положительное;
3) одно нуль, а другое отрицательное;
4) одно положительное, а другое отрицательное;
5) оба отрицательные.

Рассмотрим все случаи по порядку.

С первым случаем все ясно: сравнивать положительные числа мы уже умеем. Со вторым случаем тоже все ясно: ***любое положительное число больше нуля.***

А чтобы разобраться с тремя оставшимися случаями, будем исходить из здравого смысла.

Представим себе термометр (рис. 1.19). Над нулем, как вы знаете, отмечены положительные температуры, а под нулем – отрицательные. Ясно, что чем выше находится число на шкале термометра, тем больше температура, а чем ниже – тем меньше.

Тогда ясно, что ***нуль больше любого отрицательного числа***, например: 0 > –10. Ясно также, что ***любое положительное число больше любого отрицательного***: ведь любое положительное число ***выше нуля***, а любое отрицательное – ***ниже***, например: 1 > –5.

Осталось рассмотреть случай двух отрицательных чисел. Возьмем, например, числа (–18) и (–20). Ясно, что (–20) ниже, чем (–18), значит, –20 < –1.

То есть ***из двух отрицательных чисел меньше то число, модуль которого больше.*** В самом деле, чем больше модуль отрицательного числа, тем оно ниже на шкале термометра!

Итак, мы указали способ сравнения целых чисел с помощью шкалы термометра: чем выше число, тем оно больше.

С помощью горизонтальной числовой прямой числа сравнивать тоже очень удобно: ***чем правее находится число, тем оно больше.*** Для этого числовую прямую даже необязательно рисовать, достаточно ее просто представить мысленно.

Читатель: А все-таки: **почему** больше то число, которое находится правее на числовой оси? Почему, например, нельзя считать бóльшим то число, которое находится дальше от нуля?

Автор: На этот вопрос ответ простой: математики так ДОГОВОРИЛИСЬ. Могли бы, конечно, договориться и как-то по-другому, но они договорились именно так. А исходили они из здравого смысла!

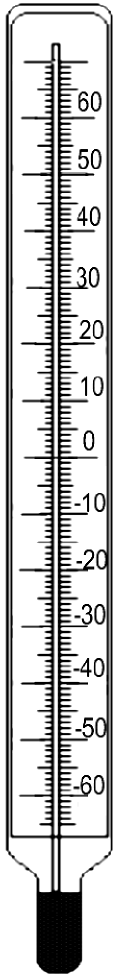

Рис. 1.19

СТОП! Решите самостоятельно!

А11. Сравните числа, представляя себе шкалу термометра: а) –7 и –14; б) 8 и –13; в) 5 и –5; г) 0 и 11; д) –31 и –31; е) –17 и 0; ж) 16 и 1.

А12. Сравните числа, используя горизонтальную числовую прямую: а) –5 и 2; б) –3 и –4; в) 0 и 6; г) 0 и –10; д) –6 и –6; е) 7 и –2; ж) 7 и 5.

Б9. Запишите в порядке возрастания числа 14, –8, –25, 1, –3, –33, 117, 0, –28, 59, –1.

Б10. Запишите в порядке убывания числа 2, –7, –13, 5, –2, 0, 10, –11, 12, –15, –12.

В5. Число a положительно, число b отрицательно. Сравните $-a$ и $-b$.

Задача 1.8. Выпишите в порядке возрастания все целые числа от –3 до 2 включительно.

Решение. Отметим на числовой прямой точки –3 и 2 (рис. 1.20).

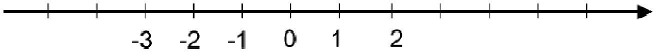

Рис. 1.20

Записать числа в порядке возрастания – означает, что при записи чисел нужно будет двигаться от меньшего числа к большему. Итак, глядя на числовую прямую на рис. 1.20, выпишем требуемые числа: –3, –2, –1, 0, 1, 2.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б11. Выпишите в порядке возрастания все целые числа: а) от –1 до 4 включительно; б) от –5 до 0 включительно.

Б12. Выпишите в порядке убывания все целые числа: а) от –50 до –55 включительно; б) от 2 до –5 включительно.

Двойные неравенства

Задача 1.9. Укажите все целые числа: а) бóльшие 3 и меньшие 5; б) бóльшие –1 и меньшие 3; в) бóльшие –3 и меньшие 0.

Решение.

а) Заметим, что вместо того, чтобы писать: «число a больше 3 и меньше 5», можно использовать запись, которая называется ***двойным неравенством***: $3 < a < 5$. Нам нужно назвать все целые числа, которые удовлетворяют этому двойному неравенству. Проще всего ответить на вопрос задачи с помощью рисунка (рис. 1.21).

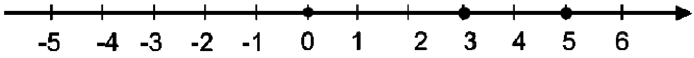

Рис. 1.21

Из рисунка видно, что единственное целое число, которое лежит правее 3, но левее 5 – это 4. Значит, $3 < 4 < 5$.

б) Нам надо найти целые числа, большие –1 и меньшие 3, то есть все такие числа, которые удовлетворяют двойному неравенству: $-1 < a < 3$. Из рис. 1.22 видно, что между –1 и 3 находятся три целых числа: 0; 1 и 2. В самом деле: $-1 < 0 < 3$; $-1 < 1 < 3$; $-1 < 2 < 3$.

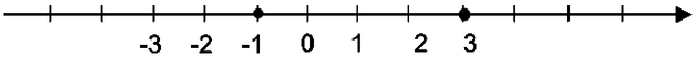

Рис. 1.22

в) Нам надо найти целые числа *a*, удовлетворяющие двойному неравенству $-3 < a < 0$. Из рис. 1.23 видно, что между –3 и 0 находятся два целых числа: –2 и –1, то есть $-3 < -2 < 0$; $-3 < -1 < 0$.

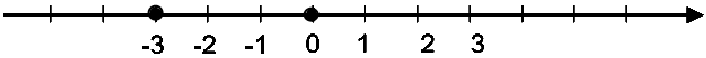

Рис. 1.23

Ответ: а) 4; б) 0; 1; в) –2; –1.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б13. Запишите все отрицательные целые числа, которые: а) больше –4; б) больше –12, но меньше –9; в) меньше –3, но больше –11.

В6. Какие целые числа можно подставить вместо буквы “*a*”, чтобы получилось верное неравенство: а) $-1 < a < -3$; б) $-3 < a < 3$; в) $-20 < a < -17$; г) $-105 < -a < -102$.

Арифметические действия с целыми числами. Сложение целых чисел

Положительные числа мы уже складывать умеем, знаем мы и то, что прибавить к положительному числу нуль – это значит оставить все, как есть. Но возникают следующие вопросы:

1. Что значит прибавить к отрицательному числу положительное число?
2. Что значит прибавить к положительному числу отрицательное число?
3. Что значит прибавить к отрицательному числу отрицательное число?

Попробуем сначала провести рассуждения с позиции «здравого смысла».

ТАБЛИЦА ЗДРАВОГО СМЫСЛА № 1

3 + 5 = 8	Вчера было 3 градуса тепла, сегодня потеплело на 5 градусов – стало 8 градусов	**Сложение двух положительных чисел**
(–3) + 5 = 2	Вчера было –3 градуса, сегодня температура повысилась на 5 градусов, значит сегодня +2 градуса	**Сложение отрицательного и положительного чисел**
3 + (–5) = (–2)	Вчера было три градуса, сегодня на 5 градусов холоднее, т.е. –2 градуса	**Сложение положительного и отрицательного чисел**
(–3) + (–5) = (–8)	Вчера было –3 градуса, сегодня холоднее на 5 градусов. Значит, сегодня –8 градусов	**Сложение двух отрицательных чисел**

Если такие рассуждения мы считаем для себя достаточно убедительными, то попробуем теперь описать наши действия словами. На самом деле, складывая целые числа в таблице здравого смысла № 1, мы поступали следующим образом. Сначала мы мысленно отмечали на шкале термометра точку, соответствующую первому слагаемому (например, –3), а затем перемещались вверх или вниз на ***величину модуля второго слагаемого.***

Вверх мы перемещались, когда второе слагаемое было положительным, а вниз – когда отрицательным. Например, в примере (–3) + 5 мы перемещались из точки с координатой (–3) на 5 «шагов» вверх и попадали в точку с координатой 2. А в примере 3 + (–5) мы перемещались из точки с координатой 3 вниз на 5 «шагов» и попадали в точку с координатой (–2).

Ясно, что между шкалой термометра и числовой осью нет никакой принципиальной разницы. Различие только в том, что на термометре движение в положительном направлении – это движение вверх, а на числовой оси – вправо.

После работы с термометром легко перейти к действиям на числовой прямой.

Задача 1.10. Вычислите с помощью числовой прямой: а) 2 + 4; б) (–2) + 4; в) 2+ (–4); г) (–2) + (–4).

Решение.

а) 2 + 4. Чтобы решить первый пример, нам нужно отметить на числовой прямой точку 2 (первое слагаемое) и отложить от нее 4 единичных отрезка вправо. Точка 6, в которую мы попадем, и будет решением нашего примера, т.е. 2 + 4 = 6 (рис. 1.24).

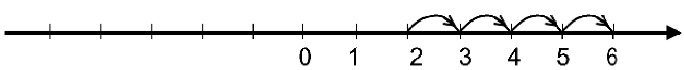

Рис. 1.24

б) (–2) + 4. Чтобы решить второй пример, нужно отметить на числовой прямой точку (–2) (первое слагаемое) и отложить от нее 4 единичных отрезка вправо. Точка 2, в которую мы попадем, будет решением нашего примера, т.е. (–2) + 4 = 2 (рис. 1.25).

Рис. 1.25

в) 2 + (–4). Прибавление отрицательного числа означает движение по числовой прямой влево. Если мы сместимся из точки 2 на 4 отрезка влево, то попадем в точку с координатой (–2), т.е. 2 + (–4) = –2 (рис. 1.26).

Рис. 1.26

г) (–2) + (–4). А если мы сместимся из точки (–2) влево на 4 единичных отрезка, то получим –6. Таким образом, (–2) + + (–4) = (–6) (рис. 1.27).

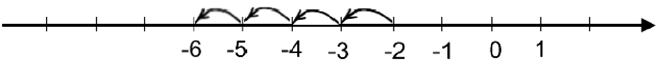

Рис. 1.27

А теперь можно сформулировать:

Правило для сложения целых чисел с помощью числовой прямой. *Для того чтобы прибавить к целому числу (положительному или отрицательному) целое положительное число, надо отложить соответствующее число единичных отрезков вправо (в положительном направлении числовой оси), а чтобы прибавить целое отрицательное число, надо отложить соответствующее число единичных отрезков влево (в отрицательном направлении числовой оси).*

Читатель: А что получится, если сложить два противоположных числа, например, 3 и –3?

Автор: Ясно, что если из числа (–3) переместиться в положительном направлении на 3 единицы, то попадем в начало координат. Значит, $3 + (-3) = 0$. Это справедливо для любых противоположных чисел. Поэтому запомним формулу:

$$a + (-a) = 0. \tag{1.1}$$

СТОП! Решите самостоятельно!

А13. Выполните сложение с помощью числовой прямой: а) $-7 + 8$; б) $-7 + (-4)$; в) $4 + 8$; г) $0 + (-9)$; д) $6 + (-6)$; е) $9 + (-0)$; ж) $(-2) + (-9)$.

Б14. Выполните сложение с помощью числовой прямой: а) $-2 + + 4 +(-6)$; б) $-5 + (-2) + 10$; в) $11 + (-0) + 1 + (-4) + (-5) + 2$. Как изменится результат, если к нему прибавить нуль? А если отнять?

Читатель: А нельзя ли как-нибудь обойтись без числовой оси: уж очень утомительно ее все время рисовать, да и не очень-то нарисуешь, если придется складывать двузначные или трехзначные числа.

Автор: Разумеется, можно и даже нужно. Числовая ось нам нужна лишь для того, чтобы понять «суть событий». А после того, как суть мы с Вами поняли, можно сформулировать правила сложения целых чисел.

> ***Правило сложения отрицательных чисел.*** *Чтобы сложить два отрицательных числа, нужно вначале сложить их модули, а потом перед результатом записать знак минус.*

Задача.1.11. Сложите числа -3 и -5.

Решение. Ответ мы уже знаем: $(-3) + (-5) = -8$ (см. Таблицу здравого смысла № 1). Попробуем произвести вычисление с помощью Правила, которое мы только что сформулировали.

1. Вычислим модули наших слагаемых: $|-3| = 3$, $|-5| = 5$.

2. Сложим эти модули: $3 + 5 = 8$.

3. Поставим перед результатом знак минус: -8. Как видите, результаты совпали!

СТОП! Решите самостоятельно!

А14. Вычислите с помощью Правила сложения отрицательных чисел: а)–3 + (–2); б) –5 + (–11); в) –12 + (–10); г) –1 + (–2) + (–3).

Правило сложения целых чисел, <u>имеющих разные знаки</u>. *Чтобы сложить два целых числа с разными знаками, нужно из большего модуля вычесть меньший, и перед результатом поставить знак того слагаемого, модуль которого больше.*

Читатель: Это правило какое-то запутанное и не очень понятное.

Автор: Ну что же давайте его «распутаем». Для этого рассмотрим два случая.

1. Допустим, мы складываем отрицательное число a с положительным числом b и пусть $|a| < |b|$ (рис. 1.28). Тогда если мы отложим от точки a ($a < 0$) отрезок длиной $|b|$ в положительном направлении, то попадем в точку с координатой $|b| - |a|$, причем это число будет положительным.

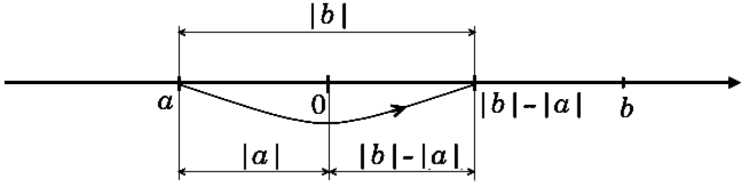

Рис. 1.28

Таким образом, мы получили наш результат, вычитая из большего модуля $|b|$ меньший $|a|$. При этом результату мы присвоили знак «плюс», то есть знак числа с большим модулем – знак числа b.

2. Пусть мы складываем отрицательное число a с положительным числом b и пусть $|a| > |b|$ (рис. 1.29). Тогда если мы отложим от точки a ($a < 0$) отрезок длиной $|b|$ в положительном направлении, то попадем в точку с отрицательной коор-

динатой. Причем ***модуль*** этой координаты будет равен, как видно из рис. 1.29, $|a|-|b|$. А значение координаты ***с учетом знака*** будет соответственно равно $-(|a| - |b|)$.

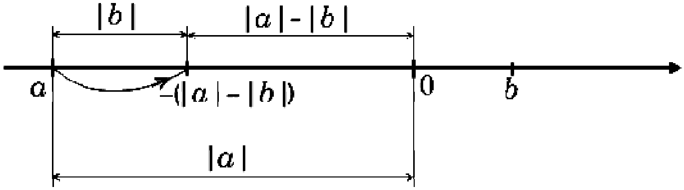

Рис. 1.29

Таким образом, мы опять вычли из большего модуля $|a|$ меньший модуль $|b|$ и взяли получившееся число со знаком «минус», т.е. с тем знаком, который был у слагаемого с бо́льшим модулем, то есть числа a.

Читатель: Наверное, надо рассмотреть еще два случая, когда мы складываем положительное число с отрицательным?

Автор: При желании Вы вполне можете это сделать самостоятельно, но можно этого и не делать, если предположить, что для любых целых чисел справедлив переместительный закон: $a + b = b + a$.

Читатель: А откуда мы знаем, что этот закон справедлив для целых чисел?

Автор: Примерно по тем же соображениям, по которым мы считаем его справедливым для натуральных чисел – из здравого смысла. Мы считаем, что если температура сначала понизится на 4 градуса, а потом повысится на 3 градуса и если температура сначала повысится на 3 градуса, а потом понизится на 4 градуса, то окончательная температура в обоих случаях будет одинаковой.

Задача 1.12. Сложите числа: а) –7 и 8, б) 4 и –6.

Решение. Получим результат двумя способами.

Для начала снова воспользуемся числовой прямой.

Отложив от точки (–7) восемь единичных отрезков вправо (прибавляем положительное число), получим 1.

Отложив от точки 4 шесть единичных отрезков влево (прибавляем отрицательное число), получаем –2. Таким образом, $(-7) + 8 = 1$, $4 + (-6) = -2$.

Теперь выполним сложение с помощью Правила сложения целых чисел, имеющих разные знаки.

а) $(-7) + 8$:

- вычислим модули слагаемых: $|-7| = 7$, $|8| = 8$;

- вычтем из большего модуля меньший: $8 - 7 = 1$;

- присвоим результату знак слагаемого с большим модулем. Слагаемое с большим модулем (8) у нас имеет знак «плюс», получаем ответ: +1.

б) $4 + (-6)$:

- вычислим модули слагаемых: $|4| = 4$, $|-6| = 6$;

- вычтем из большего модуля меньший: $6 - 4 = 2$;

- присвоим результату знак слагаемого с большим модулем. Слагаемое с большим модулем (–6) у нас имеет знак «минус», получаем ответ: –2.

Как видите, результаты, полученные двумя различными методами, совпали!

СТОП! Решите самостоятельно!

А15. Вычислите, используя правило сложения целых чисел, имеющих разные знаки: а) $-8 + 9$; б) $6 + (-7)$; в) $33 + (-60)$; г) $24 + (-7) + 0$.

Б15. Выполните сложение:

а) $(+13) + (+1) + (-1)$; б) $0 + (-11) + (+11)$;

в) $(+20) + (-20) + (-1)$; г) $(+12) + (-6) + (-12)$;

д) $(-35) + (+35) + (+8)$; е) $(-7) + (-15) + (+15)$.

В7. Какие из следующих утверждений верны?

1. Сумма двух любых положительных чисел положительна.

2. Сумма двух любых отрицательных чисел отрицательна.

3. Сумма положительного и отрицательного чисел может быть положительной.

4. Сумма положительного и отрицательного чисел может быть отрицательной.

5. Сумма положительного и отрицательного чисел может быть равна нулю.

6. Сумма двух целых чисел больше любого из слагаемых.

7. Сумма двух целых чисел больше меньшего из слагаемых.

Вычитание целых чисел

Вспомним, что называется разностью двух положительных чисел.

Разностью двух положительных чисел называется положительное число, которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое. То есть если

УМЕНЬШАЕМОЕ – ВЫЧИТАЕМОЕ = РАЗНОСТЬ,

то

РАЗНОСТЬ + ВЫЧИТАЕМОЕ = УМЕНЬШАЕМОЕ.

Например, если $5 - 3 = 2$, то $2 + 3 = 5$.

Читатель: С положительными числами все понятно. А вот как быть с отрицательными?

Автор: Согласитесь, было бы разумно ***договориться,*** чтобы ***разностью двух целых чисел*** называлось целое число, которое ***в сумме с вычитаемым давало бы уменьшаемое.*** Именно так математики и ***договорились.***

Прежде чем двигаться дальше, вспомним сочетательный закон для положительных чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Будем считать, что это же закон справедлив не только для положительных, но и для всех целых чисел.

Читатель: А как это согласовать со «здравым смыслом»?

Автор: В Древней Индии, например, положительные числа понимали как «***имущество***», а отрицательные как «***долг***».

Пусть a, b и c – это определенные количества денег. Количество денег, которым мы владеем (имущество), берется со знаком «плюс», а количество денег, которые мы должны вернуть (например, кредит банку), берется со знаком «минус». (У нас может быть несколько «имуществ» (кошельков с деньгами) и несколько долгов (банковских кредитов).)

Если мы захотим подсчитать сумму денег, которой мы реально располагаем, нам нужно сложить все «имущества» и все «долги». Если получим положительное число, то все в порядке: нашего имущества хватает на то, чтобы расплатиться со всеми долгами.

А вот если получим отрицательное число, то дела наши плохи: нашего имущества не хватает на то, чтобы уплатить по всем долгам, и если с нас потребуют немедленно вернуть все долги, то мы окажемся ***банкротами***, то есть *НЕПЛАТЕЖЕСПОСОБНЫМИ клиентами* со всеми проистекающими из этого неприятностями.

Понятно, что при расчете нашего финансового состояния (его еще называют текущим балансом) совершенно неважно, в каком порядке мы будем складывать наши «имущества» и наши «долги».

А сейчас докажем важное утверждение: разность двух целых чисел $a - b$ равна сумме числа a и числа $(-b)$:

$$a - b = a + (-b). \qquad (1.2)$$

Доказательство. Если к разности прибавить вычитаемое, то должно получиться уменьшаемое. Уменьшаемое у нас – это a, вычитаемое – это b, а разность по нашему предположению – это $a+(-b)$.

Прибавим к разности вычитаемое, получим:

$$\text{РАЗНОСТЬ} + \text{ВЫЧИТАЕМОЕ} = (a+(-b)) + b =$$
$$= a + ((-b) + b) = a + 0 = a = \text{УМЕНЬШАЕМОЕ}.$$

Наше утверждение доказано. Сформулируем его еще раз.

Правило вычитания целых чисел. *Чтобы из одного целого числа вычесть другое, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.*

Заметим, что если уменьшаемое равно вычитаемому, то их разность равна нулю.

Задача 1.13. Выполните вычитание: а) 2 – 6; б) –6 – 2; в) –8 – (–2).

Решение. По правилу вычитания целых чисел вычитание можно заменить сложением. То есть вместо того, чтобы вычитать число a, можно прибавить число $(-a)$.

а) 2 – 6 = 2 + (–6). Вычитаем из большего модуля меньший: 6 – 2 = 4 и ставим знак числа с большим модулем (больший модуль имеет число –6), получаем –4.

б) –6 – 2 = (–6) + (–2). Поскольку оба слагаемых отрицательные, складываем их модули: 6 + 2 = 8, и ставим перед полученным числом знак «минус», получаем –8.

в) –8 – (–2) = –8 + (–(–2)) = –8 + 2. Вычитаем из большего модуля меньший: 8 – 2 = 6 и ставим знак числа с большим модулем (больший модуль имеет число –8), получаем –6.

Ответ: а) –4; б) –8; в) –6.

СТОП! Решите самостоятельно!

А16. Вычислите с помощью Правила вычитания целых чисел: а) –10–7; б) –32 – (–4); в) 31 – 9; г) –17 – 0; д) –8 – 13; е) –8 – (–13).

Б16. Может ли разность двух чисел быть больше уменьшаемого?

А теперь потренируемся вычислять значения более сложных арифметических выражений.

Задача 1.14. Выполните действия: –12 – (–7) + (–6) + 8.

Решение. Будем проводить вычисления последовательно:

$$-12-(-7)+(-6)+8=(-12+7)-6+8=(-5)-6+8=$$
$$=((-5)-6)+8=((-5)+(-6))+8=(-11)+8=-3.$$

Ответ: –3.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б17. Выполните действия: а) 14 – 25 – (–32); б) –(–26 – 47 + 85); в) –3 + 8 + (–15) – (–19) – 26.

Рациональный порядок вычислений

Задача 1.15. Вычислите наиболее рациональным способом: а) 121–89–264–121+189–(–64); б) –24–16–10+23+17.

Решение.

а) 121–89–264–121+189–(–64). Для начала представим данное арифметическое выражение в виде суммы положительных и отрицательных слагаемых:

$$121 - 89 - 264 - 121 + 189 - (-64) =$$
$$= 121 + (-89) + (-264) + (-121) + 189 + 64.$$

Теперь сгруппируем наши слагаемые парами так, чтобы каждая пара давала в сумме круглое число, получим:

$$[121 + (-121)] + [(-89) + 189] + [(-264) + 64] =$$
$$= 0 + 100 + (-200) = -100.$$

б) –24–16–10+23+17. Это арифметическое выражение также преобразуем в сумму, а затем сгруппируем слагаемые парами так, чтобы каждая пара давала в сумме число, либо круглое, либо небольшое, получим:

$$-24 - 16 - 10 + 23 + 17 = (-24) + (-16) + (-10) + 23 + 17 =$$
$$= [(-24) + 23] + [(-16) + 17] + (-10) = (-1) + 1 - 10 = -10.$$

Ответ: а) –100; б) –10.

СТОП! Решите самостоятельно!

А17. Вычислите рациональным способом: –5 + 17 + 5 – 17.

Б1. Вычислите рациональным способом:

$$126 - 254 - 126 - (-254) + 11.$$

В8. Вычислите рациональным способом:

$$2009 - 127 + 888 + 228 - 2010.$$

Задача 1.16. Представьте число –13 в виде разности двух положительных чисел двумя способами.

Решение. Нам надо представить отрицательное число в виде разности двух положительных чисел. Значит, модуль вычитаемого должен быть больше, чем модуль уменьшаемого, и разность модулей этих чисел должна равняться 13.

Самое простое, что приходит на ум: $1 - 14 = -13$, $2 - 15 = -13$ и т.д.

Ответ: $1 - 14 = -13$, $2 - 15 = -13$.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б19. Представьте число –24 в виде суммы двух отрицательных чисел пятью способами.

Б20. Представь число +33 в виде разности чисел разного знака пятью способами.

Задача 1.17. Древний грек родился в 453 году до н.э. и умер в день своего 89-летия. В каком году он умер?

Решение. Представим время в виде числовой оси. Пусть года нашей эры будут соответствовать натуральным числам. Тогда время до нашей эры будет соответствовать отрицательной части числовой оси. Таким образом, наша задача сводится к выполнению действий с целыми числами: нам нужно к –453 (году рождения) прибавить 89 (количество лет, которые древний грек прожил): $-453 + 89$.

1. Вычитаем из большего модуля меньший: $453 - 89 = 364$.

2. Берем знак слагаемого с большим модулем. Слагаемое с большим модулем (–453) имеет знак минус, поэтому окончательный результат: –364.

Ответ: древний грек умер в 364 году до н.э.

СТОП! Решите самостоятельно!

В9. Древний грек родился в 567 году до н.э. и стал победителем спортивных состязаний в день своего 18-летия. В каком году это случилось?

В10. В 2000 году археологи нашли записи о правителе, родившемся в 23 году до н.э. Сколько лет прошло между этими событиями?

Чтобы понять, что значит умножить положительное число на отрицательное, отрицательное на положительное и (самое трудное!) отрицательное на отрицательное попробуем начать со «здравого смысла».

ТАБЛИЦА ЗДРАВОГО СМЫСЛА № 2

$3\times 5 = 15$	**Три раза *получить* по 5 рублей – это 15 рублей *дохода***
$3 \times (-5) = -15$	**Три раза *заплатить штраф* в 5 рублей – это 15 рублей *убытка***
$(-3) \times 5 = -15$	**Три раза *недополучить* по 5 рублей – это 15 рублей *убытка***
$(-3)\times (-5) = 15$	**Три раза *не заплатить штраф* по 5 рублей – это 15 рублей *дохода***

Читатель: А нельзя ли все-таки СТРОГО доказать, что $3\times(-5) = -15$ и $(-3)\times(-5) = 15$?

Автор: Давайте попробуем, но сначала нам придется договориться, что мы будем считать справедливым для целых чисел распределительный закон умножения: $a\cdot(b+c)=ab+bc$.

Докажем сначала, что $3 \times (-5) = -15$.

Что такое -15? Это число, противоположное 15, то есть число, которое в сумме с 15 дает 0. Так что нам надо доказать, что $3\cdot(-5)+15=0$. В самом деле,

$$3\cdot(-5)+15=3\cdot(-5)+3\cdot 5=3\cdot(-5+5)=3\cdot 0=0.$$

Наше утверждение доказано.

(Вынося 3 за скобку, мы воспользовались распределительным законом: $ab+bc=a(b+c)$ при $a=3; b=-5; c=5$).

Докажем теперь, что $(-3)\cdot(-5)=15$. Для этого запишем: $(-3) + 3 = 0$ и умножим обе части равенства на (-5):

$$((-3)+3)\cdot(-5)=0\cdot(-5)=0.$$

Раскроем скобки в левой части: $(-3)\cdot(-5)+(-15)=0$.

Таким образом, число $(-3)\cdot(-5)$ противоположно числу (-15), т.е. равно 15, что и требовалось доказать.

После того, как мы с вами разобрались с сутью умножения отрицательных чисел, вам будет легко понять и запомнить.

Правило умножения целых чисел. *Для того чтобы перемножить два целых числа с разными знаками, необходимо перемножить их модули, а перед результатом поставить знак минус. Чтобы перемножить два отрицательных или два положительных числа, нужно перемножить их модули и результат взять со знаком плюс.*

Более кратко можно сказать так: ***плюс на минус и минус на плюс дают минус, а минус на минус дает плюс.***

Задача 1.1. Выполните умножение: а) $8\cdot(-7)$; б) $(-6)\cdot 3$; в) $(-7)\cdot(-4)$.

Решение.

а) $8\cdot(-7)$. Перемножаем модули: $7\cdot 8 = 56$, а так как сомножители имели разные знаки, то перед результатом нужно поставить знак минус: $8\cdot(-7) = -56$.

б) $(-6)\cdot 3$. Перемножаем модули: $6\cdot 3 = 18$, а так как сомножители имели разные знаки, то перед результатом ставим минус: $(-6)\cdot 3 = -1$.

в) $-7\cdot(-4)$. Так как оба числа имеют одинаковые знаки, то нам достаточно перемножить их модули и взять результат со знаком плюс: $7\cdot 4 = +28$.

Ответ: а) -56; б) -1; в) 28.

СТОП! Решите самостоятельно!

А1. Выполните умножение: а) $9\cdot(-9)$; б) $(-5)\cdot(-7)$; в) $(-9)\cdot 4$.

Б21. Выполните умножение: а) $3\cdot(-5)\cdot 4$; б) $-2\cdot 11\cdot(-4)$; в) $3\cdot(-4)\times$ $\times(-5)$; г) $(-6)\cdot(-12)\cdot 10\cdot 0\cdot(-2)$.

Какой знак имеет произведение?

Задача 1.19. Какой знак (плюс или минус) имеют следующие произведения: а) $(-15)\cdot 3\cdot(-12)\cdot(-13)$; б) $(-12)^5$; в) $(-2)^6$?

Решение.

а) $(-15)\cdot 3\cdot(-12)\cdot(-13)$. Сгруппируем наши сомножители так: $[(-15)\cdot(-12)]\cdot(-13)\cdot 3$.

1. После того, как мы выполним умножение в квадратных скобках, мы получим положительное число (минус на минус дают плюс).

2. Умножив это положительное число на (-13), получим отрицательное число (плюс на минус дают минус).

3. Умножив отрицательное число на 3, мы получим отрицательное число, так как минус на плюс дают минус. Значит, произведение $(-15)\cdot 3\cdot(-12)\cdot(-13)$ имеет знак минус, то есть

$$(-15)\cdot 3\cdot(-12)\cdot(-13) < 0.$$

б) $(-12)^5 = (-12)\cdot(-12)\cdot(-12)\cdot(-12)\cdot(-12)$. Сгруппируем сомножители следующим образом:

$$(-12)\cdot(-12)\cdot(-12)\cdot(-12)\cdot(-12) =$$
$$= [(-12)\cdot(-12)]\cdot[(-12)\cdot(-12)]\cdot(-12).$$

Все произведения, стоящие в квадратных скобках, – положительные величины, значит, и их произведение $[(-12)\cdot(-12)]\times$ $\times[(-12)\cdot(-12)]$ – положительная величина.

Поскольку это положительное число умножается на отрицательное число (-12), то результат – число отрицательное. Значит, степень $(-12)^5$ имеет знак минус, то есть $(-12)^5 < 0$.

Читатель: По-моему, если отрицательных сомножителей нечетное число, то произведение отрицательное.

Автор: Вы правы. А если четное?

Читатель: Тогда положительное. Ведь мы можем тогда разбить все произведения на пары отрицательных сомножителей, а каждая такая пара при перемножении становится положительным числом.

Автор: Совершенно верно! Давайте воспользуемся Вашей идеей при решении пункта в).

в) $(-2)^6 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = [(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)]\times \times [(-2)\cdot(-2)]$.

Каждое произведение в квадратных скобках больше нуля, а значит, и все произведение больше нуля. Следовательно, выражение $(-2)^6$ имеет знак плюс.

Ответ: а) минус; б) минус; в) плюс.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б22. Какой знак «плюс» или «минус» имеют следующие арифметические выражения: а) $(-1)^3$; б) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$; в) $(-5)^{10}$; г) 0^{14}; д) $(-2)^{121}$?

Произведение нескольких сомножителей

Задача 1.20. Вычислите значения арифметических выражений: а) $(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)$; б) $(-2)^5+(-1)^{10}$; в) произведение всех целых чисел от –10 до +10: $(-10)\cdot(-9)\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10$.

Решение.

а) $(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)$. Прежде всего, определим знак произведения. Поскольку отрицательных сомножителей три – нечетное число, то произведение имеет знак минус. Модуль произведения равен произведению модулей всех сомножителей: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(4\cdot 5)=6\cdot 20=120$. Значит, наше произведение равно $(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)=-120$.

б) $(-2)^5+(-1)^{10}$. Здесь $(-2)^5$ – это произведение пяти отрицательных сомножителей, 5 – нечетное число, значит, $(-2)^5<0$. Модуль этого произведения равен

$$2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)=4\cdot 8=32.$$

Значит, $(-2)^5=-32$. $(-1)^{10}$ – это произведение 10 отрицательных сомножителей. Поскольку 10 –число четное, то $(-1)^{10}$ – число положительное. Очевидно, что модуль этого числа равен 1, так как $1^{10}=1$. Следовательно, $(-1)^{10}=+1$.

Теперь можно вычислить значение нашего выражения:

$$(-2)^5 + (-1)^{10} = -32 + 1 = -31.$$

в) Запишем произведение всех целых чисел от –10 до +10: $(-10)\cdot(-9)\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10$.

Читатель: Здесь нам уж очень долго придется вычислять модуль произведения, ведь в нем 21 сомножитель!

Автор: Если подумать, то вычислить модуль можно за одну секунду!

Читатель: С помощью компьютера?

Автор: Нет, в уме. Скажите, а среди двадцати одного сомножителя случайно нет нуля?

Читатель: Есть. Ведь ноль тоже целое число… Значит, произведение равно нулю?

Автор: Совершенно верно! $(-10)\cdot(-9)\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot 0\cdot 1\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10 = 0$. Потому что при умножении любого числа на ноль получается ноль.

Ответ: а) –120; б) –31; в) 0.

СТОП! Решите самостоятельно!

В11. Вычислите значения арифметических выражений: а) $(-2)^4$; б) $(-3)^3$; в) $(-1)^{121}$; г) $\dfrac{0^6}{(-121)^{121}}$.

В12. Вычислите значения арифметических выражений: а) $3\cdot(-2)^2$, б) $2\cdot(-(-5)^2)$; в) $-(-2)^3$; г) $-(-3)^4$; д) $-4\cdot(-3)^3$; е) $-4\cdot(-3)^2$.

Минус перед скобкой

Автор: Как Вы думаете, что получится, если некоторое целое число a (положительное или отрицательное) умножить на (–1)?

Читатель: По-моему, число изменится на противоположное, то есть $(-1)\cdot a = -a$. Ведь при умножении на (–1) модуль числа не меняется, а вот знак меняется на противоположный: если был плюс, то станет минус, а если был минус, то станет плюс. Например: $(-1)\cdot 5 = -5$; $(-1)\cdot(-5) = +5 = -(-5)$.

Автор: Совершенно верно. Запомним важную формулу:

$$(-1)\cdot a = -a \qquad (1.3)$$

Это означает, что поставить перед числом знак минус – это все равно, что умножить это число на (–1).

Задача 1.21. Раскройте скобки и вычислите арифметические выражения: а) –(3 – 18 + 7); б) –(795 – 89·79) – 89·79.

Решение.

а) –(3 – 18 + 7).

Читатель: А зачем тут раскрывать скобки? Гораздо проще сначала вычислить значение выражения в скобках, а потом поставить перед ним знак минус:

$$-(3 - 18 + 7) = -((3 + 7) - 18) = -(10 - 18) = -(-8) = +8.$$

Автор: Это верно. Но давайте ***проверим*** Ваши вычисления, раскрыв скобки. Для этого представим наше выражение в виде: $-(3 - 18 + 7) = (-1)\cdot(3 - 18 + 7) = (-1)\cdot(3 + (-18) + 7)$.

Теперь воспользуемся распределительным законом умножения, получим:

$$(-1)\cdot(3 + (-18) + 7) = (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot(-18) + (-1)\cdot 7 =$$
$$= (-3) + 18 + (-7).$$

Обратите внимание, что все числа, стоявшие в скобках, поменяли свои знаки: 3 превратилась в (–3), (–18) превратилось в +18, 7 превратилось в –7. Теперь осталось выполнить сложение:

$$(-3) + 18 + (-7) = (-3) + (-7) + 18 = (-10) + 18 = +8.$$

Как видите, результаты совпали! И хотя в данном случае Ваш метод вычисления более удобный, но и второй метод – тоже правильный.

б) –(795 – 89·79) – 89·79. Если здесь сначала вычислить значение выражения, стоящего в скобках, то придется умножать «в столбик» 89 на 79. Попробуем лучше сначала раскрыть скобки, тогда получим:

$$–(795 – 89·79) – 89·79 = (–1)·(795 + (–89·79)) – 89·79 =$$
$$= (–1)·795 + (–1)·(–89·79) – 89·79= –795 + 89·79 – 89·79 = –795.$$

Ответ: а) +8; б) –795.

СТОП! Решите самостоятельно!

А19. Раскройте скобки и вычислите: а) –(5 + 7); б) –(3 – 8 + 7); в) –(–3 + 8 + 7); г) –(–10 – 12 + 1).

Б23. Раскройте скобки и вычислите: а) 919 – (919 + 111); б) –919 – (111 – 919); в) –(121 + 919) + (919–1).

В13. Раскройте скобки и вычислите: а) – (2·5 + 48) + 20; б) –(32 – 74) – 74; в) –(–120 – 9·9) – 81; г) +(120 – 9^2) – (110–81).

Деление целых чисел

Вспомним: как разделить одно ***натуральное*** число на другое? Разделить число a на число b – это значит найти такое натуральное число c, которое, будучи умноженным на число b, даст число a, то есть если $a : b = c$, то $c \times b = a$.

Читатель: А что значит разделить положительное число на отрицательное или отрицательное на положительное?

Автор: Будем исходить из того, что разделить одно ***целое*** число a (положительное или отрицательное) на другое целое число b (положительное или отрицательное) – это значит найти такое *целое* число c, которое, будучи умноженным на число b, даст число a, то есть если $a : b = c$, то $c \times b = a$.

Теперь, когда мы с вами уже умеем умножать любые целые числа друг на друга, выясним, какой знак (плюс или минус) будет иметь частное, если знаки делимого и делителя нам известны.

Пусть a – делимое; b – делитель, а c – частное, то есть $a:b=c$. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $a>0$; $b>0$. Это случай когда натуральное число делится на натуральное. Ясно, что и частное в этом случае тоже натуральное число, то есть $c>0$.

2. Пусть $a<0$; $b>0$. То есть отрицательное число делится на положительное, например: (–10):2. Частное (число c) должно быть таким, чтобы выполнялось равенство: $c\times b=a$.

Поскольку a – отрицательное, а b – положительное, то c должно быть отрицательным, то есть (–10):(+2) = (–5), потому что (–5)×(+2) = (–10).

3. Пусть $a>0$; $b<0$. То есть положительное число делится на отрицательное, например: (+10):(–2). Частное (число c) должно быть таким, чтобы выполнялось равенство $c\times b=a$.

Поскольку a – положительное, а b – отрицательное, то c должно быть отрицательным, то есть (+10):(–2) = (–5), потому что (–5)×(–2) = (+10).

4. Пусть $a<0$; $b<0$. То есть отрицательное число делится на отрицательное, например: (–10):(–2). Частное (число c) должно быть таким, чтобы выполнялось равенство $c\times b=a$.

Поскольку a – отрицательное и b – отрицательное, то c должно быть положительным, то есть (–10):(–2) = (+5), потому что (+5)×(–2) = (–10).

Сведем полученные результаты в одну таблицу.

Таблица 1.1

$a:b=c$		
$a>0$	$b>0$	$c>0$
$a>0$	$b<0$	$c<0$
$a<0$	$b>0$	$c<0$
$a<0$	$b<0$	$c>0$

Заметим, что «правило знаков» при делении целых чисел точно такое же, как и при умножении, то есть «минус на плюс» и «плюс на минус» дают минус, а «плюс на плюс» и «минус на минус» дают плюс.

Сформулируем теперь более четко **правило знаков при делении целых чисел**:

1. Если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, то частное положительно.
2. Если делимое и делитель имеют разные знаки, то частное отрицательно.

Задача 1.22. Выполните деление: а) (–100):5; б) 100:(–20); в) (–100) : (–50).

Решение. Во всех трех случаях мы должны сначала разделить модуль делимого на модуль делителя, а потом поставить перед частным соответствующий знак (плюс или минус).

а) (–100):5 = –(100:5) = –20 (минус на плюс дают минус);

б) 100:(–20) = –(100:20) = –5 (плюс на минус дают минус);

в) (–100):(–50) = +100:50 = +2 (минус на минус дают плюс).

Ответ: а) –20; б) –5; в) 2.

СТОП! Решите самостоятельно!

А20. Выполните деление: а) (–54):(–9); б) (–64):16; в) 78:(–78); г) 0:(–12); д) (–4):(–1); е) (–7):(+1); ж) (–1):(–1).

Как вынести общий множитель за скобки?

Задача 1.23. Вычислите значения арифметических выражений наиболее рациональным способом: а) –57·36–57·64; б) 42·53–82·53–42·63+22·63.

Решение.

а) –57·36–57·64. Сначала заменим вычитание сложением:

$$-57\cdot 36 - 57\cdot 64 = (-57)\cdot 36 + (-57)\cdot 64.$$

Воспользуемся распределительным законом умножения и вынесем за скобки общий множитель – число (–57), получим

$$(-57)\cdot 36 + (-57)\cdot 64 = (-57)\cdot(36 + 64) = (-57)\cdot 100 =$$

$$= -(57 \cdot 100) = -5700.$$

Читатель: По-моему, можно действовать и по-другому:

$$-57 \cdot 36 - 57 \cdot 64 = 57 \cdot (-36) + 57 \cdot (-64) = 57 \cdot ((-36) + (-64)) =$$
$$= 57 \cdot (-100) = -5700.$$

Автор: Совершенно верно! Оба решения правильные.

б) $42 \cdot 53 - 82 \cdot 53 - 42 \cdot 63 + 22 \cdot 63$. Заменим вычитание сложением:

$$42 \cdot 53 - 82 \cdot 53 - 42 \cdot 63 + 22 \cdot 63 =$$
$$= 42 \cdot 53 + (-82) \cdot 53 + (-42) \cdot 63 + 22 \cdot 63.$$

Сгруппируем наши слагаемые. Разобьем их на две пары:

$$42 \cdot 53 + (-82) \cdot 53 + (-42) \cdot 63 + 22 \cdot 63 =$$
$$= [42 \cdot 53 + (-82) \cdot 53] + [(-42) \cdot 63 + 22 \cdot 63].$$

Вынесем в каждой паре общий множитель за скобки. В первой паре – это число 53, а во второй – число 63. Получим

$$[42 \cdot 53 + (-82) \cdot 53] + [(-42) \cdot 63 + 22 \cdot 63] =$$
$$= 53 \cdot [42 + (-82)] + 63 \cdot [(-42) + 22] = 53 \cdot (-40) + 63 \cdot (-20) =$$
$$= -(53 \cdot 40) + (-(63 \cdot 20)) = -2120 + (-1260) = -3380.$$

Ответ: а) –5700; б) –3380.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б24. Вынесите общий множитель за скобки по образцу:

$$45 \cdot 13 - 45 \cdot 81 = 45 \cdot (13 - 81).$$

а) $49 \cdot 57 - 49 \cdot 570$; б) $58 \cdot 64 - 99 \cdot 64$; в) $(-53) \cdot 48 - (-53) \cdot 59$.

В14. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «минус» по образцу: $4 \cdot 52 - 4 \cdot (-95) = (-4) \cdot (-52 + (-95))$.

а) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18$; б) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91$; в) $-88 \cdot 35 - 77 \cdot 35$;

В15. Вычислите рационально: а) $59 \cdot 64 + 59 \cdot 36 + 41 \cdot 2 + 41 \cdot 98$;

б) $72 \cdot 128 - 72 \cdot 228 + 28 \cdot 5 - 28 \cdot 105$; в) $63 \cdot 356 - 556 \cdot 63 + 22 \cdot 4 - 22 \cdot 54$

Вычисляем значения арифметических выражений

Задача 1.24. Вычислите значения арифметических выражений: а) $50 - 4 \cdot 27$; б) $(26 - 76):(24 - 14)$.

Решение. Порядок действий при вычислении значений арифметических выражений с натуральными числами мы уже знаем: сначала выполняются действия в скобках, потом – операции умножения и деления, а потом – сложения и вычитания. При вычислении арифметических выражений с отрицательными числами порядок действий точно такой же.

а) 50 – 4·27 = 50–54 = –4.

б) (26 – 76):(24 – 14) = (–50):10 = –5.

Ответ: а) –4; б) –5.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б25. Вычислите: а) (–7 + 5 – 4) : 2; б) (–10 – 20 – 30) : 12; в) (3 – 11 + 2) : (–6); г) (8 + 2 – 8 – 10) : (–4).

В16. Найдите значение выражения:

а) –4·(–5)·(–3):12; б) 12·(–5):(–6)·(–1); в) (–12 – 6 + 30):(–4);
г) (6 – 12):(–2 +8); д) –125:(2 – 27)·(–10); е) –800:40·(–5 + 9).

Как упростить алгебраическое выражение?

Для начала выясним, как записать без скобок алгебраическое выражение, перед которым стоит знак «минус». Рассмотрим для примера выражение $-(a+b-c)$.

Читатель: Может быть, представить это выражение в виде: $-(a+b-c)=$ $(-1)\cdot(a+b+(-1)\cdot c)$ и воспользоваться распределительным законом умножения?

Автор: Правильно! Получим:

$$(-1)\cdot(a+b+(-1)\cdot c)=(-1)\cdot a+(-1)\cdot b+(-1)\cdot(-1)\cdot c=-a-b+c.$$

Заметим, что знак перед каждым слагаемым в скобках изменился на противоположный: вначале в скобках перед a и b стоял знак «плюс», а перед c – знак «минус». После того как мы с помощью распределительного закона умножения раскрыли скобки, перед буквами a и b появился знак «минус», а перед c – знак «плюс».

Читатель: Получается, если перед скобкой стоит знак минус, то скобки можно просто убрать, а знак перед каждым слагаемым поменять на противоположный?

Автор: Совершенно верно!

Задача 1.25. Раскройте скобки и, если возможно, упростите выражения: а) $a-(b+a)$; б) $-(b+c)-(x-y)$; в) $2a-(3a-2b)$.

***Решение*.**

а) $a-(b+a)=a+(-1)\cdot(b+a)=a+(-1)\cdot b+(-1)\cdot a=$

$=a-b-a=(a-a)-b=-b$;

б) $-(b+c)-(x-y)=(-1)\cdot(b+c)+(-1)\cdot(x+(-y))=$

$=(-1)\cdot b+(-1)\cdot c+(-1)\cdot x+(-1)\cdot(-y)=-b-c-x+y$;

в) $2a-(3a-2b)=2a+(-1)\cdot(3a+(-1)\cdot 2b)=$

$2a+(-1)\cdot 3a+(-1)\cdot(-1)\cdot 2b=2a-3a+2b=a\cdot(2-3)+2b=$

$=a\cdot(-1)+2b=-a+2b.$

Ответ: а) $-b$; б) $-b-c-x+y$; в) $-a+2b$.

СТОП! Решите самостоятельно!

Б26. Раскройте скобки, пользуясь распределительным законом умножения: а) $-(a-b)$; б) $-3(c+d)$; в) $2(-x+y)$; г) $x(-x+y)$.

В17. Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $a-(b-c+d)-c+(d+b-a)$;

б) $-(a-b+c)-(d+b-a+c)+d$.

Задача 1.26. Упростите алгебраические выражения:

а) $-6x+9a+12x+7a$; б) $(-9c)\cdot(-6c)\cdot 3c\cdot a\cdot(-12)$;

в) $x(-x+2y+1)+x^2$; г) $7\cdot(2x-3)+4\cdot(3x-1)$.

Решение.

а) $-6x+9a+12x+7a$.

Сгруппируем вместе все слагаемые, содержащие x, и отдельно – слагаемые, содержащие a, получим:

$$-6x+9a+12x+7a=(-6x+12x)+(9a+7a).$$

А дальше воспользуемся распределительным законом умножения:

$$(-6x+12x)+(9a+7a)=x\cdot(-6+12)+a\cdot(9+7)=$$
$$=x\cdot 6+a\cdot 16=6x+16a.$$

б) $(-9c)\cdot(-6c)\cdot 3c\cdot a\cdot(-12)$.

Сначала, пользуясь переместительным законом умножения, переставим местами сомножители так, чтобы сначала стояли числа, а потом – буквы:

$$(-9c)\cdot\left(-6c\right)\cdot 3c\cdot a\cdot\left(-12\right)=\left(-9\right)\cdot\left(-6\right)\cdot 3\cdot\left(-12\right)\cdot c\cdot c\cdot c\cdot a=$$
$$=-(9\cdot 6\cdot 3\cdot 12)\cdot c^3\cdot a=-(54\cdot 36)\cdot c^3\cdot a=-1944c^3a.$$

в) $x(-x+2y+1)+x^2$.

Воспользуемся распределительным законом умножения, получим:

$$x(-x+2y+1)+x^2=-x\cdot x+x\cdot 2y+x\cdot 1+x^2=$$
$$=(-x^2+x^2)+2xy+x=2xy+x.$$

г) $7\cdot(2x-3)+4\cdot(3x-1)$. Сначала воспользуемся распределительным законом умножения, а потом приведем подобные члены:

$$7\cdot(2x-3)+4\cdot(3x-1)=7\cdot 2x+7\cdot(-3)+4\cdot 3x+4\cdot(-1)=$$
$$=14x-21+12x-4=14x+12x-21-4=26x-25.$$

Ответ: а) $6x+16a$; б) $-1944c^3a$; в) $2xy+x$; г) $26x-25$.

СТОП! Решите самостоятельно!

А21. Упростите выражения: а) $-6a+3a+a$; б) $2x\cdot(-3y)$; в) $x(x-a)+xa$.

Б27. Раскройте скобки и упростите выражение:

$$(–3a) + (–8c) + (+9a) + (–6a) + (+8c).$$

Б28. Упростите выражения: а) $5a-6+6a-66a+11a+7$; б) $2x^2\cdot\left(-15y\right)\cdot\left(-y\right)\cdot\left(6x\right)$; в) $-x\left(x-a-b\right)$; г) $2\left(x-1\right)-3\left(x+7\right)$.

В1. Упростите выражения: а) $2x(x-1)-3x(x+1)$; б) $2x(1-y)+2x(y-x)$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задачи очень легкие

А22. Изобразите координатную прямую, выбрав единичный отрезок равным 1 см, и отметьте на ней точки: $A(-1)$, $B(-5)$, $D(-2)$, $E(-8)$.

А23. Чему равно расстояние от начала координат до точек: $A(-4)$, $B(6)$, $D(-3)$, $F(15)$, $N(-100)$?

А24. Найдите координату точки K, симметричной точке $A(-6)$ относительно точки: а) $O(0)$, б) $E(1)$, в) $S(-1)$.

А25. С помощью числовой прямой найдите сумму:

а) 5 + 4; б) –5 + 4; в) –7 + 5; г) –3 + 5; д) –6 + 6; е) –2 + 7.

А26. С помощью числовой прямой найдите разность:

а) 5 – 4; б) 3 – 5; в) –5 – 4; г) 2 – 7; д) –3 – 5; е) 6 – 9.

А27. Маша по ошибке считает, что $(-a)$ – это запись отрицательного числа. Назовите такое число а, чтобы число $(-a)$ было:

а) положительным числом,

б) отрицательным числом,

в) числом нуль.

А28. Запишите без скобок: а) –(+9), б) +(–3), в) –(–5), г) +(+7).

А29. Для каждого из чисел 2, 5, –3, 10, –17 укажите другое число, имеющее тот же модуль.

А30. Сравните числа:

а) 5 и 0,	в) –7 и 0,	д) –3 и 10,
б) –5 и 0,	г) 8 и –7,	е) –7 и –10.

А31. Сравните целые числа: а) 3 и –8; б) –8 и 8; в) –1 и –10; г) –6 и 0; д) 4 и 0; е) –9 и –2.

А32. Найдите сумму с помощью числовой оси:

а) (+1) + (+3);	б) (+3) + (–3);	в) (+1) + (–5);
г) (–4) + (–1);	д) (+5) + (–2);	е)(+4) + (–6);
ж)(–3) + (–3);	з) (+3) + (–4);	и) (+2) + (–3).

А33. Вычислите: а) $7 – 7$; б) $1 – 10$; в) $2 – 8$; г) $0 – 11$; д) $3 – 5$; е) $10 – 12$.

А34. Замените вычитание сложением и вычислите: а) $4 – (–7)$; б) $–17 – (–2)$; в) $–7 – (–9)$; г) $3 – (–13)$.

А35. Выполните действия: а) $5·(–4)$; б) $–6·(–8)$; в) $–16·4$; г) $6·(–4)$; д) $–9·(–7)$; е) $13·(–8)$.

А36. Выполните деление:

а) $–20 : 5$;	б) $(–50):10$;	в) $(–80) : (–20)$;
г) $–100 : (–25)$;	д) $30 : (–15)$;	е) $64 : (–8)$;
ж) $200 : (–40)$;	з) $(–810) : (–9)$;	и) $(–500) : 100$;
к) $(–560) : (–70)$;	л) $720 : (–90)$;	м) $(–480) :60$.

А37. Упростите: а) $8m·7$; б) $–m·m·n$; в) $–4·(–12x)$; г) $–c·(–b)·6c$.

А38. Упростите: а) $–a·(–b)·(–c)·(–d)$; б) $–3a·(–2c)·3$.

А39. Упростите: а) $a + 4a – a – 7b$; б) $–9x + 7x – 5x + 2x$; в) $5a – 6a + 2a – 10a$; г) $11p + 2p + 20p – 7p$.

Задачи легкие

Б29. Какой станет координата точки $A(–2)$, если: а) перенести точку A на 5 единиц вправо? б) перенести точку A на 3 единицы влево? в) перенести начало координат на 12 единиц вправо? г) перенести начало координат на 3 единицы влево?

Б30. Концы отрезка AB имеют координаты: а) $A(–8)$, $B(4)$, б) $A(–14)$, $B(6)$. Какую координату имеет середина этого отрезка M?

Б31. Запишите без скобок:

а) $–(–(+1))$,	в) $–(–(–(+5)))$,
б) $–(–(–2))$,	г) $–(–(–(–6)))$.

Б32. Запишите без скобок:

а) $–(–(+8))$, б) $–(+(–137)$,

в) $–(+(–(–10)))$, г) $–(– (–(–2))$, д) $–(–(–(–(+30))))$.

Б33. По заданным координатам точек А и В вычислите длины отрезков AB: а) $A(0)$; $B(121)$; б) $A(0)$; $B(–122)$; в) $A(–11)$; $B(12)$; г) $A(–12)$; $B(–1)$.

Б34. Решите уравнения: а) $|x| = 6$; б) $|–y| = 1$; в) $|z| = 0$; г) $–|t| = 5$.

Б35. Сравните числа: а) –1000 и 253; б) –200 и –150; в) 351 и –351; г) –101 и –102; д) –2 и 200; е) –310 и –1003.

Б36. Известно, что x и y – положительные числа. Сравните: а) 0 и x; б) $-y$ и 0; в) $-x$ и y; г) y и $-x$.

Б37. Запишите числа в порядке возрастания:

а) 400, – 400, 0, 236, –528, б) 752, 0, –35, –257, 432.

Б38. Выпишите по порядку целые числа:

а) от –5 до 5 включительно; б) от –7 до 3 включительно; в) от –10 до 0 включительно; г) от –15 до –9 включительно.

Б39. Между какими двумя последовательными целыми числами находится данное число? а) 3; б) 0; в) –5; г) –1; д) –100; е) –253. Ответ запишите в виде двойного неравенства (например, $-3 < -2 < -1$).

Б40. Выполните сложение:

а) –46 + (–18), в) –144 + (–56), д) –8 + (–5),
б) –8 + (–12), г) –6 + (–3), е) –7 + (–4).

Б41. Запишите и вычислите сумму чисел:

а) –7, –13 и –22; в) –6, –19, 0;
б) –5, –12, –17; г) –13, –17, –30.

Б42. Не выполняя вычислений, сравните:

а) –15 + 8 и –15, б) 25 – 73 и –73.

Б43. Вычислите:

а) 18 – (–5); б) 46 – (–6); в) 5 – (–20);
г) –21 – (–20); д) –30 – (–30); е) –50 – (–5).

Б44. Найдите разность:

а) 100 – 200; б) 91 – 100; в) 20 – 270;
г) 44 – 54; д) 20 – 26; е) 1 – 100;
ж) 90 – 180; з) 100 – 1001.

Б45. Представьте число –31 в виде суммы двух отрицательных чисел пятью способами.

Б46. Представьте число 42 в виде разности чисел разного знака пятью способами.

Б47. Выполните умножение:

а) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; б) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;
в) $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$; г) $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 4$.

Б48. Определите знак произведения:

а) $-2 \cdot (-3) \cdot (-9) \cdot (-13) \cdot 14 \cdot (-17) \cdot (-28)$;

б) $4\cdot (-11) \cdot (-12) \cdot (-13) \cdot (-15) \cdot (-17) \cdot 80 \cdot 90$.

Б49. Вычислите рационально:

а) $-(48-93)+8$; б) $-(96-35)+6$;

в) $-(7\cdot 8-20)+7\cdot 8$; г) $+(99-58)+48$.

Б50. Выполните деление:

а) $-48 : 12$; д) $-78 : (-6)$; и) $360 : (-12)$;

б) $64 : (-4)$; е) $99 : (-11)$; к) $-1 : (-1)$;

в) $12 : (-1)$; ж) $-100 : 5$; л) $-18 : 18$;

г) $-30 : (-10)$; з) $-850 : (-85)$; м) $-270:(-30)$.

Б51. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $88\cdot 35-77\cdot 35$; б) $73\cdot 37-73\cdot 73$;

в) $-57\cdot 33+48\cdot 33$; г) $99\cdot 98+99\cdot 100$.

Б52. Вычислите:

а) $-99\cdot 12-99\cdot 88$; б) $-67\cdot 85-67\cdot 115$; в) $41\cdot 91-91\cdot 51$.

Б53. Раскройте скобки и упростите:

а) $(-a)+(+b)+(-x)+(-b)+(-x)$;

б) $(+n)+(-d)+(-y)+(-n)+(-d)$.

Б54. Упростите: а) $-8x+5a+3x+5a$; б) $-a+x+11a-13x$; в) $5a+7a-9m+15m$.

Б55. Раскройте скобки:

а) $x(-x+2y+1)$; б) $-y(x-y+3)$;

в) $-2a(-a+b-4)$; г) $-4(a-2b+3c-5)$;

д) $c(-3a+2c-d+1)$; е) $-5x(x-2y+6n-18)$.

Б56. Упростите: а) $(-a)\cdot(-a)\cdot(-2b)\cdot(-3b)\cdot 3$; б) $(-2c)\cdot(-3)^2\cdot(-d)\cdot 5\cdot b$.

Б57. Приведите подобные члены: а) $5c-(3c+5)+(3c-4)$; б) $-5(x+3)+4(x-2)-6(2x+1)$.

Б58. Упростите: а) $10a+b-10b-a$; б) $-6a+5a-x+4$; в) $-8y+7x+6y+7x$; г) $23x-23+40+4x$.

Задачи средней трудности

В19. Точка M находится на координатной прямой между точками: а) -2 и 3; б) -3 и 2; в) -2 и 2. Между какими точками находится точка N, симметричная точке M относительно начала координат?

В20. Точки M и N перемещаются по координатной прямой, оставаясь все время симметричными друг другу относительно начала координат. Перемещения точки M записываются с помощью выражения: а) $-4 + 9 - 10$; б) $3 - 4 - 7$; в) $-2 - 3 + 5 - 7$. Задайте выражением перемещение точки N.

В21. Перед числом 1 поставили 1999 минусов. Какое число получили?

В22. Допишите равенства так, чтобы получились верные высказывания:

а) $-(\ldots) = 8$, в) $-(\ldots) = -15$, д) $-(\ldots) = +a$,
б) $-(\ldots) = -8$, г) $-(\ldots) = 7$, е) $-(\ldots) = -b$.

В23. Запишите без скобок число, равное данному:

а) $-(-(-(-(-(\ldots(-(+3))\ldots)$ – 10 скобок;
б) $-(-(-(\ldots(-(+3))\ldots)$ – 15 скобок.

В24. Точку A перенесли: а) на 10 единиц влево; б) на 12 единиц вправо. При этом модуль координаты точки А не изменился. Какую координату имела точка А до переноса?

В25. На координатной прямой начало координат передвинули, однако, при этом не изменился модуль координаты точки: а) $A(6)$; б) $B(-8)$. В каком направлении и на сколько единиц передвинули начало координат?

В26. По заданным координатам точек A и B вычислите длины отрезков AB: а) $A(131)$; $B(1311)$; б) $A(-131)$; $B(1311)$; в) $A(-1113)$; $B(-131)$.

В27. Решите уравнения:

а) $|x|=3$; д) $|-a| = 8$; и) $|a| = 0$; н) $-|k| = -7$;
б) $5 = |y|$; е) $|-c| = 1$; к) $-|c| = 0$; о) $-|p| = 10$;
в) $|z| = -2$; ж) $|-m| = -6$; л) $|x - 4| = 0$; п) $-|-a| = 5$;
г) $-9 = |t|$; з) $|-d| = -4$; м) $|2y| = 0$; р) $-|-c| = -6$.

В28. Решите уравнение:

а) $|x| = 9$; в) $|z + 1| = 4$;
б) $|y - 3| = 5$; г) $|a + 2| = 0$.

В29. Решите уравнение и сделайте проверку:

а) $|x + 2| = 1$; в) $|y - 5| = 3$;
б) $|z - 4| = 6$; г) $|a + 7| = 2$.

В30. Известно, что числа a и b – положительные, а числа c и d – отрицательные. Сравните: а) a и 0; б) c и 0; в) $-b$ и 0; г) a и c; д) $-d$ и $-b$;

В31. Запишите числа в порядке убывания:

а) –250, 367, 0, –8, 12, –400, б) –790, 790, 0, –9, –12, 425.

В32. Прибавьте:

а) к сумме –6 и –12 число 20,

б) к числу 2 сумму 5 и –8,

в) к сумме –10 и –1 сумму 5 и 8,

г) к сумме 11 и –6 сумму –3 и –6.

В33. Если сейчас 42 год н.э., то какой год был 88 лет назад? А если сейчас 42 год до н.э., то какой год будет через 88 лет?

В34. Найдите значение выражения:

а)$20 + (-15) - (-6)$; б)$-3 + 12 - (-22)$;

в)$10 - 20 - (-40)$; г) $-7 - (-7) + (-29)$.

В35. Вычислите рационально:

а) $(-12) + (-6) - (-6)$; б) $(+6) - (+9) + (-2) - (-4) - (+11)$;

в) $(+7) - (+4) + (-17)$; г) $(-8) - (+1) - (-14) - 0 + (-7)$;

д) $(-5) - (-15) - (+8)$; е) $(+24) + (-2) - (-3) - (+24) + (-5)$.

В36. Вычислите рационально:

а) $(+1) - (+2) + (-3) - (-4)$;

б) $(-4) - (+7) + (-16) - (-16) - (+1) - (-4)$;

в) $(-4) + (-8) - (-7) - (+9)$;

г) $(+2) - (-5) + (-12) - (-2) - (-12) + (+5)$;

д) $(+3) + (-10) - (+6) - (-7)$;

е) $(-9) + (-21) - (-18) -(9) + (-1) + (-18)$

В37. Представьте число в виде двух слагаемых разных знаков: а) –10; б) –23; в) 99; г) 101.

В38. Найдите произведение всех целых чисел: а) от –6 по –1; б) от –12 по 1.

В39. Определите знак степени, не вычисляя:

а) $(-33)^{50}$; б) $(-103)^{46}$; в) $(-12)^{100}$;

г) $(-24)^{5}$; д) $(-41)^{33}$.

В40. Вычислите: $(-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^6 \cdot (-1)^7$

В41. Вычислите:

а) $(-1)^{11} - (-1)^{11}$; б) $(-1)^4 - (-1)^2 - (-1)^2$;

в) $(–2)^5 – (–3)^3$; г) $(–1)^2 + (–1)^3 + (–1)^4$.

В42. Сравните, не вычисляя: а) $(–2)^4$ и 0; б) $(–3)^5$ и 0; в) $(–2)^2$ и $(–2)^3$.

В43. Раскройте скобки и вычислите сумму:

а) –(–72 + 39) + 39; б) + (398 – 700) + 700;

в) – (754 – 1200) – 1200; г) + (– 32 – 491) + 32;

д) – (–129 + 59) – 129.

В44. Вычислите, раскрыв скобки:

а) (–8)·(–7 +5) – 5· (–8); б) 3· (–98 + 2) + 3·98;

в) (–8) · (–47 + 125) – 47·8; г) (–25) · (45 – 100) + 25·45;

д) 83· (–98 – 1) + 98·83; е) (–15) · (–7 + 15) – 7·15.

В45. Вынесите общий множитель за скобки со знаком “минус” по образцу: 4·52 – 4· (–95) = (–4) · (–52 – 95):

а) 73·37 – 73·73; б) –57·33 + 48·33; в) 99·98 + 99·100.

В46. Вместо знака “?” поставьте знак “+” или “–” так, чтобы равенство было верным:

а) 3· (2 – 7) = ? 3·2 ? 3·7; б) (–5) · (–6 –7) = ? 5·6 ? 5·7;

в) (–2) · (6 + 9) = ?2·6 ? 2·9; г) (–2) · (6 – 9) = ? 2·6 ? 2·9.

В47. Вычислите рационально:

а) 42·53 – 32·53 – 42·63 + 32·63;

б) 79·45 + 79·55 – 89·45 – 89·55;

в) 88·75 –12·45 + 12·75 – 88·45;

г) 392·23 – 492·23 + 392·77 – 492·77.

В48. Вычислите, раскрывая скобки:

а) (–8)·(–7 +5) – 5· (–8); б) 3· (–98 + 2) + 3· 98;

в) (–8) · (–47 + 125) – 47· 8; г) (–25) · (45 – 100) + 25· 45;

д) 83· (–98 – 1) + 98· 83; е) (–15) · (–7 + 15) – 7· 15.

В49. Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(a – b – c) – (a – d) + d – (b – c)$;

б) $– (c – b – d) + a – (b + c) – (d – a)$.

В50. Напишите сумму двух выражений и упростите ее: а) $a + b$ и $p – b$; б) $–m + n$ и $–k – n$.

В51. Напишите разность двух выражений и упростите ее: а) $–a + b$ и $b – a$; $–4 – m$ и $6 – m$.

В52. Раскройте скобки:

а) $(x + y - c) \cdot 3$; б) $(2x - y + 3) \cdot (-2)$;
в) $4 \cdot (m - n - p)$; г) $(3m - 2n + p) \cdot (-1)$;
д) $-8 \cdot (a - b - c)$; е) $(a + 5 - b - c) \cdot m$.

В53. Упростите выражения:
а) $12c + (7 - c) - (5c - 3)$; б) $c - 2(c - d + 2c)$;
в) $-4(x - y) + 2(x + 3y)$; г) $2(a - b) - 4(b - a)$.

В54. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
а) $-8 \cdot (2 - 2y) + 4 \cdot (3 - 4y)$;
б) $5 \cdot (-2x + 4) - (10 - x)$;
в) $-2 \cdot (4c + 8) - 3 \cdot (5c - 1)$.

Задачи трудные

Г1. При каких значениях m верно равенство:
а) $|m| = m$; г) $m = |-m|$; ж) $m + |m| = 2m$;
б) $|m| = -m$; д) $m = -m$; з) $m - |m| = 2m$.
в) $-m = |-m|$; е) $m + |m| = 0$;

Г2. Какие цифры можно написать вместо “*”, чтобы получить верное неравенство: а) –3841 < –384*; б) –5*83 > –5283.

Г3. Найдите все целые числа, которые удовлетворяют неравенствам: а) $|x| < 2$; б) $|x| \le 2$; в) $|x| > 2$; г) $|x| \ge 2$.

Г4. Сравните, не вычисляя:
а) $(-2)^5 \cdot (-4)^3 \cdot (-6)^7$ и $(-3)^4 \cdot (-1)^3 \cdot (-7)^7$;
б) $(-378) \cdot (-538)$ и 0; в) $(-980) \cdot 56$ и 0;
г) $38 \cdot (-9)$ и $(-4) \cdot (-10)$; д) $(-35) \cdot (-83) \cdot (-54)$ и 0;
е) $(-45 - 23 - 65 - 11) \cdot (-83)$ и (-83)

Г5. Покажите, что:
а) $43 \cdot 15 - 55 \cdot 15 + 34 \cdot 15$ делится на 22;
б) $12 \cdot 17 - 16 \cdot 17 + 13 \cdot 17$ делится на 9;
в) $99 \cdot 51 - 99 \cdot 91 + 69 \cdot 99$ делится на 29;
г) $63 \cdot 23 - 32 \cdot 63 + 22 \cdot 63$ делится на 13.

Г6. Вычислите:
а) $42 \cdot 53 - 32 \cdot 53 - 42 \cdot 63 + 32 \cdot 63$;
б) $79 \cdot 45 + 79 \cdot 55 - 89 \cdot 45 - 89 \cdot 55$;
в) $88 \cdot 75 - 12 \cdot 45 + 12 \cdot 75 - 88 \cdot 45$;
г) $392 \cdot 23 - 492 \cdot 23 + 392 \cdot 77 - 492 \cdot 77$.

Задача очень трудная

Д1. Записали 11 чисел подряд так, что суммы любых двух соседних оказались положительны. Может ли сумма всех 11 чисел быть отрицательной?