Заочный физико-математический лицей
«Авангард»

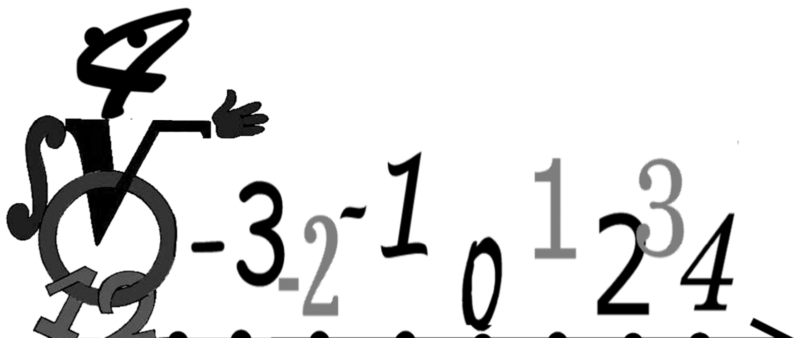
Е. Н. Филатов

АЛГЕБРА

7

Экспериментальный учебник

Часть 1



МОСКВА – 2015

Заочный физико-математический лицей
«Авангард»

Е. Н. Филатов

АЛГЕБРА

7

Экспериментальный учебник

Часть 1

МОСКВА – 2015

Филатов Е. Н. **Математика-7. Часть 1.** Экспериментальный учебник. – М.: ЗФМЛ «Авангард», 2015. – 320 с.

Учебник предназначен для углубленного изучения математики в 7-м классе. Главная цель учебника – научить ребят самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» - краткие рекомендации к их решению и ответы.

© *Е.Н. Филатов, 2015*
© *Заочный физико-математический лицей «Авангард», 2015*

§ 1. РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ

Прежде чем мы приступим к решению уравнений кратко напомним тем, кто уже знает и сообщим впервые для тех кто не знает, что такое ***степень числа***.

Допустим, у нас имеется произведение: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, то есть число 2 повторяется сомножителем 6 раз. Спрашивается, нельзя ли записать это выражение *покороче?*

Вот, например, когда у нас имеется сумма 6 слагаемых:

$$2+2+2+2+2+2,$$

то ее мы для краткости записываем в виде произведения:

$$2+2+2+2+2+2=2\times 6.$$

Для того чтобы кратко записывать «длинные» произведения, математики ввели такое обозначение:

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6.$$

Запись 2^6 читается так: «два в шестой степени». В этой записи 2 называется ***основанием степени***. Число 6, которое показывает, сколько раз число 2 повторяется сомножителем, называется ***показателем степени***, а само выражение 2^6 – «просто» ***степенью***.

В общем виде можно записать так:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{сомножителей}} = a^n. \qquad (1.1)$$

Здесь a – основание степени, n – показатель степени, a^n – «просто» степень.

Читатель: А может ли показатель степени быть равным единице?

Автор: Тут надо ***договориться***! Ведь на самом деле не вполне понятно, что значит: взять, например, число 2 сомножителем ОДИН РАЗ! Ясно, что для операции умножения нужно уж никак не меньше двух сомножителей!

Но математики договорились, что им будет ***удобно*** (почему – выясним в дальнейшем!), если любое число в первой степени мы будем считать равным самому этому числу:

$$a^1 = a. \tag{1.2}$$

Учтите, что формула (1.2) ниоткуда не следует! Это ***определение*** 1-й степени любого числа!

Читатель: А может ли показатель степени быть равным нулю?

Автор: Тут, на первый взгляд, все ещё непонятнее. Как это: ноль раз (то есть ни разу!) умножить, например, число 2 само на себя? Но и тут «работает» договоренность математиков! Оказалось ***удобным*** (почему – обязательно выясним!) считать, что любое число, кроме нуля, в степени ноль равно единице:

$$a^0 = 1 \ \ (a \neq 0). \tag{1.3}$$

Читатель: А до чего же договорились математики по поводу нуля в нулевой степени?

Автор: Они пришли к выводу, что это примерно то же самое, что и 0:0, то есть ***непонятно что***! Поэтому выражение 0^0 считается ***неопределенным***. Почему? Со временем обязательно разберемся!

А теперь решим задачу.

Пример. Вычислить: а) 2^3; б)1^{100}; в) 10^4; г) 11^2; д) 7^1; е) 81^0.

Решение.

а) $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 4\cdot 2 = 8$.

б) $1^{100} = \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{100 \text{ раз}} = 1$.

в) $10^4 = 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = (10\cdot 10)\cdot(10\cdot 10) = 100\cdot 100 = 10000$.

г) $11^2 = 11\cdot 11 = 121$.

д) $7^1 = 7$ (согласно формуле (1.2)).

е) $81^0 = 1$ (согласно формуле (1.3)).

Ответ: а) 8; б) 1; в) 10000; г) 121; д) 7; е) 1.

Квадрат и куб данного числа

Если какое-то число возвели во вторую степень, то говорят, что данное число «возвели в квадрат». Иными словами выражение 3^2 можно прочитать как «три во второй степени», а можно сказать и так: «три в квадрате».

Читатель: А причем тут квадрат?

Автор: Допустим, у нас есть квадрат, сторона которого равна 3 см. Тогда площадь этого квадрата будет равна: $3 \times 3 = 3^2 = 9$ квадратных сантиметров (рис. 1.1). Поэтому возвести число в квадрат – это значит вычислить площадь такого квадрата, сторона которого равна данному числу.

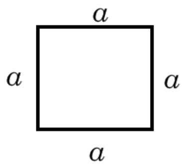


Рис. 1.1

Запомним: a^2 – читается как «а в квадрате».

Если же какое-то число возвели в третью степень, то говорят, что данное число «возвели в куб». То есть выражение 2^3 можно прочитать и как «два в третьей степени», и как «два в кубе».

Напомним, что куб можно представить себе как ящик, у которого длина, ширина и высота равны. Чтобы вычислить объем куба, надо умножить его длину на ширину и на высоту. Допустим, у нас есть куб, сторона которого равна 2 см. Тогда объем этого куба будет равен: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ кубических сантиметров (рис. 1.2).

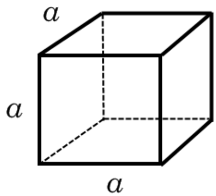


Рис. 1.2

Что такое «уравнения» и зачем они нужны?

Автор: Допустим нам надо решить такую задачу: «Я задумал число, умножил его на 3, от полученного произведения отнял 4 и получил то число, которое я задумал. Угадайте, какое число я задумал?»

Читатель: Честно говоря, даже не знаю, как подступиться к Вашей задаче…

Автор: Давайте обозначим задуманное число буквой x. Тогда чему будет равно произведение этого числа на 3?

Читатель: По-моему, $3\times x$.

Автор: Верно. А что мы получим, если отнимем от этого произведения 4?

Читатель: $3\times x - 4$.

Автор: Правильно! Напомню только, что при умножении числа на букву знак умножения принято для краткости опускать. Поэтому наше выражение лучше записать так: $3x - 4$. По условию задачи это выражение равно заданному числу, то есть $3x - 4 = x$.

Мы получили ***уравнение***, то есть два алгебраических выражения, соединенных знаком равенства. Теперь ясно, что для того, чтобы решить задачу, нам достаточно *подобрать* такое значение x, при котором левая часть уравнения ($3x-4$) равна правой (x).

Читатель: По-моему, подходит $x = 2$. Левая часть: $3x - 4 = 3\times 2 - 4 = 2$. Правая часть: $x = 2$.

Мы получили верное равенство $2 = 2$.

Автор: Верно, значит, я загадал число 2! Теперь мы с Вами поняли, что такое уравнение, составили одно уравнение и даже решили его, подобрав (или угадав) решение.

Значение неизвестной величины, которую мы обозначили буквой x и при которой уравнение превращается в верное числовое равенство, называется ***корнем уравнения***.

Является ли данное число корнем?

Задача 1.1. Определите, является ли значение $x = 2$ корнем уравнения: а) $x+2=4$; б) $6x-12=2x$; в) $x^2+x=6$; г) $x^3=10-x$.

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо подставить значение $x = 2$ в левую и правую части каждого уравнения и проверить: будет ли левая часть равна правой. Если да, то $x = 2$ – корень данного уравнения, а если нет, то нет.

а) $x+2=4$.

Левая часть: $x+2=2+2=4$, правая часть: 4. Отсюда 4 = 4, значит, $x=2$ корень данного уравнения.

б) $6x-12=2x$.

Левая часть: $6x-12=6\times2-12=0$. Правая часть: $2x = 2\times2 = 4$. Отсюда $0\neq4$, значит, $x=2$ не является корнем данного уравнения.

в) $x^2+x=6$.

Левая часть: $x^2+x=2^2+2=6$. Правая часть: 6. 6 = 6, значит, $x=2$ корень данного уравнения.

г) $x^3=10-x$. Левая часть: $x^3=2^3=2\times2\times2=8$. Правая часть: $10-x = 10 - 2 = 8$, 8 = 8, значит, $x=2$ корень данного уравнения.

Ответ: а), в), г) да; б) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

А1. Является ли $y = 2$ корнем уравнений:

а) $y+2=2$; б) $2-y=0$; в) $-2 + y = 2$?

Б1. Является ли $a = -10$ корнем уравнений:

а) $a^2 = 100$; б) $1000:a=-10$; в) $a + a^2 = 90$?

Угадай корень!

Задача 1.2. Решите уравнения, подобрав подходящие корни: а) $x+100=101$; б) $x^2=-1$; в) $y^2=0,01$; г) $a(a+1)=12$.

Решение.

а) $x+100=101$. Тут догадаться совсем нетрудно, что $x=1$, так как 1 + 100 = 101.

б) $x^2=-1$. Здесь надо обратить внимание на то, что в левой части уравнения стоит квадрат неизвестного числа. Как вы помните, квадрат любого числа может быть только положительным или равным нулю числом. В правой же части находится отрицательное число, получаем противоречие. Это означает, что у данного уравнения корней нет.

в) $y^2 = 0{,}01$. Здесь квадрат некоторого неизвестного числа y является числом положительным, противоречия нет – остается только подобрать такое число, которое при возведении в квадрат даст 0,01.

Читатель: По-моему, годится $y = 0{,}1$, потому что $0{,}1^2 = 0{,}01$.

Автор: Верно! Но все ли корни мы нашли? Вспомним о том, что и отрицательное число при возведении в квадрат тоже дает положительное число.

Читатель: Я Вас понял. Годится еще $y = -0{,}1$, так как $(-0{,}1)^2 = (-0{,}1)\cdot(-0{,}1) = 0{,}01$.

Автор: Совершенно правильно!

г) $a(a+1) = 12$.

Читатель: Ясно, что неизвестное нам число a не может быть очень большим. Попробуем перебрать все возможные значения, начиная с $a = 1$.

Предположим, что $a = 1$, тогда $1\times(1+1)=1\times2=2$; $2 \neq 12$. Не подходит.

Предположим, что $a = 2$, тогда $2\cdot(2+1) = 2\times3 = 6$; $6 \neq 12$. Не подходит.

Предположим, что $a = 3$, тогда $3\cdot(3+1) = 3\times4 = 12$; $12 = 12$. Подходит! Значит, $a = 3$ – корень уравнения $a(a+1) = 12$.

Автор: Вы правы, но произведение двух отрицательных чисел тоже может равняться 12…

Читатель: Согласен! $(-4)\cdot(-3) = +12$, значит, $a = -4$ – тоже корень нашего уравнения.

Автор: Правильно!

Ответ: а) $x = 1$; б) нет решений; в) $y = 0{,}1; y = -0{,}1$;

г) $a = 3; a = -4$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А2. Угадайте корни уравнений: а) $b\cdot b\cdot b = 0$; б) $34 + a = 34$; в) г) $0 - n = 0$; д) $a\cdot a = 1$.

Б2. Найдите корни уравнений:

а) $x \cdot x = \dfrac{1}{25}$; б) $4x^2 = 16$; в) $x^3 = -27$.

В1. Найдите корни уравнений:

а) $x(x-1) = 2$; б) $x^2 + x = 0$; в) $x^2(x + 1)(x - 1) = 0$.

Может ли уравнение: а) не иметь корней? б) иметь бесконечно много корней?

Автор: Как Вы считаете, имеют ли корни уравнения: а) $2 \cdot x = 0$; б) $0 \cdot x = 2$.

Читатель: По-моему, в случае а) корень $x = 0$, так как $2 \cdot 0 = 0$, а в случае б) корней вообще нет, так как всякое число, умноженное на ноль, равно нулю, а правая часть уравнения равна 2.

Автор: Верно! Значит, мы с Вами установили, что уравнения, не имеющие корней, существуют. А теперь давайте рассмотрим такое уравнение: $0 \cdot x = 0$. Как Вы считаете, чему равен корень такого уравнения?

Читатель: Я думаю, $x = 0$, так как $0 \cdot 0 = 0$.

Автор: Вы правы, $x = 0$ действительно является корнем данного уравнения. Но единственный ли это корень? Возьмем, например, $x = 100$. Разве это значение не является корнем?

Читатель: Да, похоже, что является, потому что $0 \cdot 100 = 0$.

Автор: А можете ли Вы придумать такое число, которое НЕ является корнем уравнения $0 \cdot x = 0$?

Читатель: Пожалуй, что нет. Ведь любое число, умноженное на ноль, равно нулю.

Автор: Верно! Значит, ЛЮБОЕ натуральное число является корнем данного уравнения. Вот мы с Вами и нашли уравнение, которое имеет бесконечно много корней!

Задача 1.3. Решите уравнения: а) $2x + 3x - 5x = 7 + 3 - 5$; б) $2 + x = x + 2$.

а) $2x+3x-5x=7+3-5$.

1. Воспользуемся распределительным законом умножения и преобразуем наше уравнение:

$$2x+3x-5x=7+3-5 \rightarrow x(2+3-5)=7+3-5 \rightarrow x\cdot 0=5.$$

2. Поскольку произведение любого числа x на 0 равно 0, то левая часть данного уравнения всегда будет равна нулю, а правая часть уравнения всегда равна 5. Значит, ни при каких значениях x равенства не достигается. Корней нет.

б) $2+x=x+2$.

Вычтем из обеих частей уравнения неизвестное число x, получим $2+x=x+2 \rightarrow 2+x-x=x+2-x \rightarrow 2=2$.

Мы получили верное числовое равенство. Значит, любое число является корнем данного уравнения.

Ответ: а) уравнение не имеет корней; б) корнем уравнения является любое число.

СТОП! Решите самостоятельно.

А3. Найдите все корни уравнений: а) $2x - 2x = 1$; б) $2x = 5 - 5$; в) $x-x = 3 - 3$.

Б3. Решите уравнение: $2x+3=2x+4$.

В2. Решите уравнение: $x(x+1)=x(x+2)$.

Сколько корней имеет уравнение?

Задача 1.4. Даны уравнения: а) $-5-x^2-x^4=0$; б) $x^2=-9$; в) $x^2=0{,}09$; г) $x^2=x^2$; д) $x\left(x+1\right)\left(x+2\right)=0$. Не решая их, скажите, имеют ли они корни? Если да, то сколько?

Решение. При решении этих задач необходимо помнить, что четная степень любого числа может быть числом либо положительным, либо равным нулю, т.е. $5^4 \ge 0$; $(-3)^2 \ge 0$; $x^2 \ge 0$; $(-a)^4 \ge 0$ и т.д.

а) $-5-x^2-x^4=0 \rightarrow (-5)+(-x^2)+(-x^4)=0$. Здесь $x^2 \ge 0$ и $x^4 \ge 0$, значит, $-x^2 \le 0$, $-x^2 \le 0$ и $-x^2 - x^4 \le 0$, т.е. два отрицательных или равных нулю числа могут дать в сумме лишь отрицательное или равное нулю число. А если к отрицательному или равному нулю числу прибавить отрицательное число, получим отрицательное число: $-5-x^2-x^4<0$. Мы получили уравнение, в котором левая часть не равна правой (одна меньше нуля, вторая равна нулю) при любых значениях x. Это означает, что у этого уравнения корней нет.

б) $x^2=-9$. Здесь $x^2\geq 0$, поэтому в левой части уравнения при любых x будет находиться положительное или равное нулю число. В правой же части находится отрицательное число –9. Таким образом, левая часть никогда не будет равна правой – у уравнения нет корней.

в) $x^2=0,09$. Здесь $x^2\geq 0$ и справа находится положительное число, никаких противоречий нет. Существуют два числа, которые при возведении в квадрат дадут 0,09: одно из них положительное, второе отрицательное. Это 0,3 и –0,3. У уравнения два корня.

г) $x^2=x^2$. В этом уравнении справа и слева стоит одно и то же выражение. Это означает, что левая часть будет равна правой при любом значении x. У такого уравнения бесконечно много корней.

д) $x\left(x+1\right)\left(x+2\right)=0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, значит, равенство выполняется, если: $x=0$, $x+1=0\rightarrow x=-1$; $x+2=0\rightarrow x=-2$. Следовательно, наше уравнение имеет три корня

Ответ: а) нет корней; б) нет корней; в) два корня; г) бесконечно много корней; д) три корня.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б4. Определите, сколько корней имеют уравнения:

а) $x^4+x^2+5=0$; б) $x^2=9$; в) $x(x-1)(x-2)=0$?

В3. Определите, сколько корней имеют уравнения:

а) $\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x+1}=0$; б) $x^2=-x^2$; в) $x^2-x=x(x-1)$?

«Хитрые» вопросы про корни уравнений

Задача 1.5.

а) Может ли уравнение $x^6+3x^5+1=0$ иметь положительные корни?

б) Докажите, что уравнение $6x^{50}+3x^{30}-18x^{10}=1$ не имеет целых корней.

Решение.

а) Может ли уравнение $x^6+3x^5+1=0$ иметь положительные корни?

Предположим, что данное уравнение имеет положительный корень. Тогда x^6 и x^5 также будут числами положительными, и вся левая часть будет положительной. Это означает, что левая часть ни при каких x не будет равна правой (т.е. нулю). Значит, наше уравнение не имеет положительных корней.

б) Докажите, что уравнение $6x^{50}+3x^{30}-18x^{10}=1$ не имеет целых корней.

Преобразуем исходное уравнение:

$$6x^{50}+3x^{30}-18x^{10}=1 \to 3(2x^{50}+x^{30}-6x^{10})=1 \to$$

$$3(2x^{50}+x^{30}-6x^{10}):3=1:3 \to 2x^{50}+x^{30}-5x^{10}=\frac{1}{3}.$$

Теперь применим метод доказательства «от противного». Пусть уравнение имеет целый корень. Тогда слагаемые $2x^{50}$, x^{30} тоже будут целыми, а значит, целым числом будет и вся левая часть уравнения. В правой же части находится дробное число. Мы получили противоречие. Следовательно, уравнение целых корней не имеет.

Ответ: а) уравнение не имеет положительных корней; б) уравнение не имеет целых корней.

СТОП! Решите самостоятельно.

А4. Имеет ли уравнение $x^6+2x^5+x^3+x^2+6=0$ положительные корни?

Б5. Определив знак выражения в левой части уравнения $2x^5+3x^2+x+9=0$, ответьте на вопрос: какие из чисел –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4 точно не являются его корнями.

В4. Докажите, что уравнение $6x^5-12x^4+24x=171$ не имеет целых корней.

Начинаем *решать* уравнения

Автор: Давайте теперь попробуем *не угадывать* решения уравнений, а *решать* уравнения.

Читатель: А разве *угадать решения* и *решить* уравнение это не одно и то же?

Автор: Если Вы правильно угадали все корни уравнения, то Вы, безусловно, его решили! Но дело в том, что угадать корни уравнения иногда очень непросто! Вот попробуйте, например, угадать корни уравнения: $x(x+13)=48138$. Вам придется ОЧЕНЬ долго угадывать решение такого уравнения (корни этого уравнения равны $x=213; x=-226$, можете проверить). Было бы гораздо лучше, если бы мы нашли какой-то *порядок действий*, который бы позволил нам вычислять значения корней уравнения безо всяких догадок!

Уравнения вида $x\pm a=\pm b$

Задача 1.6. Решите уравнение: а) $x+15=128$; б) x – 1,7 = = –2,6; в) $\frac{4}{5}-x=-1\frac{7}{10}$.

Решение.

а) $x+15=128$. Прежде всего, заметим, что если от двух равных чисел отнять по равному числу, то полученные числа тоже будут равны. Например, если 12 = 12, то и 12–1 = 12–1, и 12–10 = 12–10 и 12–12 = 12–12.

Наше уравнение – это равенство двух чисел: $x+15$ и 128.

(Конечно, $x+15$ – это пока «засекреченное» число. Оно превратится в «нормальное» число только тогда, когда мы вместо буквы x подставим ее значение.)

Поскольку числа $x+15$ и 128 равны, то мы можем отнять от каждого из них одно и то же число 15, равенство при этом не нарушится: $x+15-15=128-15 \to x=128-15 \to x=113$.

Корень найден! Давайте проверим правильность нашего решения. Для этого убедимся, что *левая часть* нашего уравнения, то есть $x+15$ при $x=113$ равна *правой части* нашего уравнения, то есть 128.

Левая часть: $x+15$ = 113 + 15 = 128; правая часть: 128. Левая часть равна правой: 128 = 128. Значит, все верно!

б) x – 1,7 = –2,6. Прибавим к обеим частям уравнения число 1,7. Получим: x – 1,7 + 1,7 = –2,6 + 1,7. Отсюда x = –0,9. Сделаем проверку: левая часть: x – 1,7 = –0,9 – 1,7 = –2,6; правая часть: –2,6; –2,6 = –2,6. Все верно.

в) $\frac{4}{5}-x=-1\frac{7}{10}$. Вычтем из обеих частей уравнения число $\frac{4}{5}$. Получим

$$\frac{4}{5}-x-\frac{4}{5}=-1\frac{7}{10}-\frac{4}{5} \to -x=-1,7-0,8 \to -x=-2,5 \to x=2,5.$$

Сделаем проверку: левая часть $\frac{4}{5}-x=\frac{4}{5}-2\frac{1}{2}=$ 0,8 – 2,5 = = –1,7; правая часть: $-1\frac{7}{10}$ = –1,7; –1,7 = –1,7. Все верно!

СТОП! Решите самостоятельно.

А5. Решите уравнения:

а) x + 45 = 52; б) x – 17 = 39; в) 119 – x = 54.

Б6. Решите уравнения:

а) x – 2,9 = –34; б) x + 6,7 = 115; в) $\frac{3}{5}-x=6\frac{1}{10}$.

Неизвестное с коэффициентом

Иногда в уравнение входит неизвестное, умноженное на число, например: $5x = 100$; $\frac{1}{2}x = 10$; $(-3,5)x = -1$; и т.д. Число, на которое умножается неизвестное (в нашем примере это 5; $\frac{1}{2}$; –3,5), называется ***коэффициентом.***

Уравнения вида $\pm ax = \pm b$

Задача 1.7. Решите уравнения: а) $2x = 100$; б) $4x = -\frac{8}{9}$; в) $x \cdot (-2,3) = -6\frac{9}{10}$.

Решение.

а) $2x = 100$. Заметим, что если два равных числа разделить на одинаковые числа, то полученные частные также будут равны. Например, если 100 = 100, то 100:2 = 100:2; 100:4 = = 100:4; 100:50 = 100:50 и т.д.

Разделим обе части нашего уравнения на 2, получим:

$$2x = 100 \rightarrow 2x : 2 = 100 : 2 \rightarrow x \cdot 2 : 2 = 100 : 2 \rightarrow x = 50.$$

Проверим: левая часть: $2x = 2 \cdot 50 = 100$; правая часть: 100; 100 = 100. Все верно.

б) $4x = -\frac{8}{9}$. Разделим обе части уравнения на 4:

$$4x = -\frac{8}{9} \rightarrow 4x : 4 = -\frac{8}{9} : 4 \rightarrow x \cdot 4 : 4 = -\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{4} \rightarrow x = -\frac{8 \cdot 1}{9 \cdot 4} \rightarrow x = -\frac{2}{9}$$

.

Проверим: левая часть $4x = 4 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{8}{9}$;

правая часть: $-\frac{8}{9}$; $-\frac{8}{9} = -\frac{8}{9}$.

Все верно!

в) $x \cdot (-2,3) = -6\frac{9}{10}$. Разделим обе части уравнения на (–2,3):

$$x(-2,3):(-2,3) = -6\frac{9}{10}:(-2,3) = \frac{69}{10}:\frac{23}{10} \to x = \frac{69 \cdot 10}{10 \cdot 23} = 3.$$

Проверим: левая часть: $x(-2,3) = 3 \cdot (-2,3) = -6,9$; правая часть: $-6\frac{9}{10} = -6,9$; $-6,9 = -6,9$. Все верно!

Ответ: а) $x = 50$; б) $x = -\frac{2}{9}$; в) $x = 3$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А6. Решите уравнения:

а) $8x = 16$; б) $x \cdot 6 = \frac{1}{6}$; в) $2,5x = 5$; г) $\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}$.

Б7. Решите уравнения: а) $-8x = 1,6$; б) $1,2x = -1\frac{1}{5}$.

Уравнения с параметром

Параметром в уравнении называется «известное» число, обозначенное буквой. Причем в условии всегда указывается, какие буквы в данном уравнении считаются неизвестными величинами, а какие – известными, то есть ***параметрами.***

Обычно неизвестную величину обозначают буквой x, а для параметров используют первые буквы латинского алфавита: a, b, c, ...

Рассмотрим уравнение $ax = b$, в котором x – неизвестная величина, а a и b – параметры. Если $a \neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на a, получим:

$$ax = b \to ax : a = b : a \to x = b : a.$$

Итак, если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, но $b \neq 0$, уравнение принимает вид: $0 \cdot x = b$. Это уравнение не имеет решений.

Если $a = 0$ и b=0, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$. Решением этого уравнение является любое число.

Задача 1.8. При каком значении *a* уравнение $ax = -10$: а) имеет корень *x* = 2; б) имеет корень – целое число; в) не имеет корней; г) имеет единственный корень; д) имеет бесконечное число корней?

Решение.

1. Подставим в наше уравнение значение *x* = 2 и найдем значение *a*: $a \cdot 2 = -10 \to a = (-10) : 2 \to a = -5$.

2. $ax = -10 \to x = -\dfrac{10}{a}$. Ясно, что дробное выражение $-\dfrac{10}{a}$ является целым числом тогда, когда 10 нацело делится на a, то есть при $a = \pm 1$; $a = \pm 2$; $a = \pm 5$; $a = \pm 10$.

3. Решений нет, когда a = 0.

4. Единственное решение $x = -\dfrac{10}{a}$ при любом $a \neq 0$.

5. В данном случае ни при каких значениях *a* уравнение не примет вид: $0 \cdot x = 0$, значит, бесконечного числа корней быть не может.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б8. В уравнении *ax* = 15 найдите коэффициент *a*, зная, что корень уравнения равен: а) –3; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $-\dfrac{1}{15}$; г) 0,02.

В5. Имеет ли корни уравнение 4*x* + 5 = 4*x* + *a* при *a* = 2.

Г1. При каких значениях *s* уравнение $8s^2 + 6s = sx$ имеет: а) единственный корень; б) не имеет корней; в) имеет бесконечно много корней?

Д1. При каком значении *c* уравнение $(3c-1)(c+3)x = 9c^2 - 1$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней?

В уравнениях с параметрами, которые мы будем далее рассматривать в этом параграфе (если это не будет оговорено особо), x – неизвестная величина, а все остальные буквы – параметры.

Задача 1.9. Решите уравнения: а) $x - a = -b$; б) $c - x = b + 0{,}5$.

Решение.

Читатель: Все-таки не очень понятно, что значит решить уравнение $x - a = -b$. Ведь в этом уравнении одни только буквы, а чисел вообще нет. *Что* мы должны *найти*?

Автор: Мы должны выразить неизвестную величину x через известные величины a и b. Иными словами, мы должны получить такое равенство, в левой части которого будет стоять «один икс», а в правой части – некоторое алгебраическое выражение, содержащее буквы a и b.

а) $x - a = -b$. К обеим частям уравнения прибавим число a. Получим: $x - a + a = -b + a \to x = -b + a$.

Проверим: левая часть^ $x - a = -b + a - a = -b$; правая часть^ $-b$; $-b = -b$. Все верно.

б) $c - x = b + 0{,}5$. Здесь неизвестным также является x, а c и b – некоторые известные числа. Вычтем из обеих частей уравнения число c. Получим:

$$c - x - c = b + 0{,}5 - c \to -x = b + 0{,}5 - c.$$

Значит, x будет равно числу, противоположному $(b + 0{,}5 - c)$.

Итак, $x = -(b + 0{,}5 - c) = -b - 0{,}5 + c = c - b - 0{,}5$.

Проверить наш результат попробуйте самостоятельно.

Ответ: а) $x = -b + a$; б) $x = c - b - 0{,}5$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б9. Решите уравнения:

а) $x - a = -2{,}6$; б) $x + c = 0{,}5 - b$; в) $-x - d = -\dfrac{26}{121}$.

Задача 1.10. Решите уравнение: а) $5x = 2b$; б) $x \cdot 2{,}5a = 5b$ $(a \neq 0)$; в) $x \cdot a = -\dfrac{a}{b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Решение. У нас опять уравнение с буквами (параметрами). Неизвестное, как всегда, x, а параметры a и b.

а) $5x = 2b$. Наша цель – найти x. Разделим обе части уравнения на 5. Получим: $x = \frac{2b}{5}$.

б) $x \cdot 2{,}5a = 5b$. Разделим обе части на коэффициент при x, т.е. на $2{,}5a$:

$$x \cdot 2{,}5a : (2{,}5a) = 5b : (2{,}5a) \to x = \frac{5b}{2{,}5a} = 2\frac{b}{a}.$$

Деление на a возможно, так как по условию $a \neq 0$.

в) $x \cdot a = -\frac{a}{b}$. Действуем аналогично пунктам а) и б):

$$x \cdot a = -\frac{a}{b} \to x \cdot a : a = -\frac{a}{b} : a \to x = -\frac{a}{ba} = -\frac{1}{b}.$$

Заметим, что наши преобразования были бы невозможны, если бы $a = 0$ или $b = 0$. Но так как по условию $a \neq 0$, $b \neq 0$, то все правильно!

Ответ: а) $x = \frac{2b}{5}$; б) $x = 2\frac{b}{a}$; в) $x = -\frac{1}{b}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б10. Решите уравнения:

а) $4x = d$; б) $5{,}5x = -\frac{11bc}{5a}$ $(a \neq 0)$; в) $x \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9d}{25}$.

В6. Решите уравнения:

а) $x \cdot \frac{a}{c} = -\frac{a}{b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$; б) $x \cdot 3{,}2a = 3{,}84$ $(a \neq 0)$;

в) $x\frac{6}{5a} = -\frac{9a}{25b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$; г) $x \cdot (a-b) = -\frac{a-b}{b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

Уравнения вида $\pm ax \pm b = \pm c$

Начнем с обыкновенных уравнений с числами.

Задача 1.11. Решите уравнения:

а) $2x-10=100$; б) $10-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$; в) $-1,44x-2,25=9\frac{3}{4}$.

Решение.

а) $2x-10=100$. Сначала прибавим к обеим частям уравнения число 10, получим:

$$2x-10=100 \to 2x-10+10=100+10 \to 2x=110.$$

А теперь разделим обе части уравнения на 2, получим:

$$2x=110 \to 2x:2=110:2 \to x=55.$$

Проверим: левая часть $2x-10=2\cdot 55-10=110-10=100$; правая часть 100; 100 = 100. Все верно!

б) $10-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$. Вычтем из обеих частей уравнения 10:

$$10-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3} \to 10-\frac{2}{3}x-10=\frac{1}{3}-10-\frac{2}{3}x=-9\frac{2}{3} \to$$

$$-\frac{2}{3}x=-9\frac{2}{3}.$$

Теперь делим обе части на $-\frac{2}{3}$:

$$-\frac{2}{3}x=-9\frac{2}{3} \to -\frac{2}{3}x:\left(-\frac{2}{3}\right)=-9\frac{2}{3}:\left(-\frac{2}{3}\right) \to x=\frac{29}{3};$$

$$\frac{29}{2}=14\frac{1}{2} \to x=14\frac{1}{2}.$$

в) $-1,44x-2,25=9\frac{3}{4}$. Сначала прибавим к обеим частям 2,25, получим: $-1,44x - 2,25 + 2,25 = 9,75 + 2,25 \to -1,44x = 12$.

Теперь разделим обе части уравнения на коэффициент при x, то есть на –1,44. Получим:

$$-1,44x:(-1,44)=12:(-1,44) \to$$

$$\to x=-\frac{12}{1,44} \to x=-\frac{12\cdot 100}{1,44\cdot 100} \to$$

$$x=-\frac{12\cdot 100}{144} \to x=-\frac{100}{12}=-\frac{25}{3}=-8\frac{1}{3}.$$

Ответ: а) $x = 55$; б) $x = 14\frac{1}{2}$; в) $x = -8\frac{1}{3}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А7. Решите уравнения:

а) $8x - 4 = 20$; б) $2{,}5x - 2{,}5 = 2{,}5$; в) $1{,}7 + x \cdot 5{,}1 = 1{,}8$.

Б11. Решите уравнения: а) $-8x + 1{,}44 = -1{,}56$;

б) $1 - x \cdot 6 = \frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{3}x - 3 = -3\frac{1}{3}$; г) $-3{,}5x - 2{,}6 = 4{,}4$.

В7. Решите уравнения:

а) $8 - \frac{6}{11}x = -\frac{2}{11}$; б) $1{,}2x + 2\frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}$; в) $7{,}75 - 1{,}75x = 2\frac{1}{2}$.

Теперь потренируемся в решении уравнений такого же типа: $\pm ax \pm b = \pm c$, но с «буквами».

Задача 1.12. Решите уравнения:

а) $2x - a = 1$; б) $x \cdot \frac{2}{3} + b = a$; в) $-xa + \frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ $(a \neq 0)$.

Решение.

а) $2x - a = 1$. Еще раз напомним: x – неизвестное, a – некоторое известное число, обозначенное буквой.

Прибавим a к обеим частям уравнения, а потом обе части разделим на 2 (т.е. на коэффициент при x), получим:

$$2x - a = 1 \to 2x - a + a = a + 1 \to 2x = a + 1 \to x = \frac{a+1}{2}.$$

б) $x \cdot \frac{2}{3} + b = a$. Здесь x – снова неизвестное, a и b – некоторые известные числа, обозначенные буквами. Действуем аналогично:

$$x \cdot \frac{2}{3} + b = a \to x \cdot \frac{2}{3} + b - b = a - b \to x \cdot \frac{2}{3} = a - b \to$$

$$x \cdot \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = (a - b) : \frac{2}{3} \to x = (a - b) \cdot \frac{3}{2} \to x = \frac{3(a-b)}{2}.$$

в) $-xa+\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$. Аналогично:

$$-xa+\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\to -xa+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b}{3}-\frac{a}{2}\to -xa=\frac{b}{3}-\frac{a}{2}\to$$

$$-xa:a=\left(\frac{b}{3}-\frac{a}{2}\right):a\to -x=\left(\frac{b}{3}-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}=\frac{b}{3a}-\frac{1}{2}\to x=\frac{1}{2}-\frac{b}{3a}.$$

Ответ: а) $x=\frac{a+1}{2}$; б) $x=\frac{3(a-b)}{2}$; в) $x=\frac{1}{2}-\frac{b}{3a}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В8. Решите уравнения: а) $4x + 3 = d$; б) $4 + x\cdot 3{,}2a = 0{,}16$ ($a \neq 0$); в) $cx-\frac{3}{5}=-1{,}88$ ($c\neq 0$); г) $51-x\frac{2a}{3bc}=51-\frac{6a}{7b}$ ($a\neq 0$; $b\neq 0$; $c\neq 0$).

Г2. Решите уравнения: а) $x\frac{3a}{c}-a=\frac{3a}{c}$ ($a \neq 0$; $c \neq 0$); б) $\frac{a-b}{2}-x\cdot(a-b)=-\frac{a-b}{2}$ ($a\neq b$); в) $-(k + l)x - (k - l) = 2k - 2l$ ($k\neq l$); г) $\frac{3}{4}abcx-0{,}25\frac{ab}{c}=0{,}5\frac{bc}{a}$ ($a\neq 0$; $b\neq 0$; $c\neq 0$).

Приведение подобных членов

Уравнения типа $\pm ax\pm bx=c\pm d$

Задача 1.13. Решите уравнение: а) $3x-2x=10+5$; б) $0{,}2x+0{,}3x-0{,}1x=-0{,}4-0{,}5$; в) $-\frac{2}{5}x-7\frac{3}{5}x+297=293$.

Решение. Вспомним, как приводятся подобные члены. Допустим, у нас есть алгебраическое выражение $3x-2x$. Как его можно *упростить*? Можно, например, воспользоваться распределительным законом умножения и записать это выражение так:

$$3x-2x=x\times 3-x\times 2=x\times(3-2)=x\times 1=x.$$

А можно рассуждать так: x – это некоторое количество денег в одном кошельке. Сначала у нас на столе лежало 3 таких кошелька, потом забрали 2 кошелька, и на столе остался один кошелек, в котором находится денежная сумма x. Значит, $3x-2x=x$.

Аналогично упрощается выражение $3x+2x$: к трем кошелькам добавили два кошелька, получили 5 кошельков, значит $3x+2x=5x$.

Теперь приступим к решению наших уравнений, они решаются очень просто:

а) $3x-2x=10+5 \to x=15$.

б) $0{,}2x + 0{,}3x – 0{,}1x = –0{,}4 – 0{,}5$.

Упростим левую часть: $0{,}2x + 0{,}3x – 0{,}1x = (0{,}2 + 0{,}3 – 0{,}1)x = 0{,}4x$. Упростим правую часть: $–0{,}4 – 0{,}5 = 0{,}9$.

Получили:

$$0{,}4x=-0{,}9 \to 0{,}4x:0{,}4=-0{,}9:0{,}4 \to x=-\frac{9}{4}=-2\frac{1}{4}.$$

в) $-\frac{2}{5}x-7\frac{3}{5}x+297=293$. Для начала отнимем от обеих частей уравнения 297, а потом выполним приведение подобных членов:

$$-\frac{2}{5}x-7\frac{3}{5}x+297=293 \to -\frac{2}{5}x-7\frac{3}{5}x+297-297=293-297 \to$$

$$-\frac{2}{5}x-7\frac{3}{5}x=-4 \to \left(-\frac{2}{5}-7\frac{3}{5}\right)x=-4 \to -8x=-4 \to x=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $x=15$; б) $x=-2\frac{1}{4}$; в) $x=\frac{1}{2}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А8. Решите уравнения: а) $3a+2a=75$; б) $m-5m=90$.

Б12. Решите уравнения:

а) $3{,}8x-1{,}3x=3-\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{7}x+\frac{9}{14}x=-1-\frac{7}{8}$.

В9. Решите уравнение $-1,27x-2,33x+2\frac{2}{5}=1\frac{1}{5}$.

Теперь рассмотрим уравнения такого же типа, но уже «с буквами».

Задача 1.14. Решите уравнения: а) $3x+3,5x=0,5d$; б) $x + ax = a + 1$.

Решение.

а) $3x+3,5x=0,5d$. Упростим сначала левую часть: $3x+3,5x=$ $x(3 + + 3,5) = 6,5x$. Теперь выполним деление обеих частей на 6,5:

$$6,5x=0,5d\to 6,5x:6,5=0,5d:6,5\to x=\frac{0,5d}{6,5}\to x=\frac{d}{13}.$$

б) $x + ax = a + 1$. Упростим левую часть: $x + ax = x(a + 1)$. Теперь выполним деление обеих частей на $a + 1$. Но здесь есть один «нюанс»: как вы помните, деление на 0 выполнять нельзя, поэтому $a + 1$ не должно равняться 0 ($a + 1 \neq 0$ или $a \neq -1$).

Итак, при $a \neq -1$: $x(a + 1) = a + 1 \to x=\frac{a+1}{a+1}=1$.

Читатель: А если $a = -1$?

Автор: Рассмотрим и этот случай. При $a = -1$ наше уравнение примет вид: $x + (-1)x = (-1) + 1 \to x - x = -1 + 1 \to 0\cdot x = 0$. Это значит, что при $a = -1$ решением будет любое число.

Ответ: а) $x=\frac{d}{13}$; б) $x = 1$ при $a \neq -1$ и x – любое число при $a = -1$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б13. Решите уравнения: а) $4x + 3d + 2x = d$; б) $5x - a - 3,5x = {}$ $= 4,5a-\frac{a}{2}$; в) $cx - 2x = c - 1$, где $c \neq 2$.

В10. Решите уравнения:

а) $4x + 4ax = 8$; б) $cx-\frac{3}{5}x=-0,4$; в) $(c + 1)x - 0,2x = -3$.

Г3. Решите уравнения: а) $\frac{a-b}{2}x - x(a-b) = -\frac{a-b}{2}$;

б) $(k-2)x + \frac{3}{2}(k-2)x - \frac{k-2}{2}x - 4x = k - 5k - 4$.

Уравнения со скобками

Уравнения типа $\pm ax \pm b(x+c) = c \pm d$

Задача 1.15. Решите уравнения: а) $2(x-5)=10$;

б) $0,2x - 0,1(x+50) = 2$; в) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}(5-x) = 4$.

Решение.

а) $2(x-5)=10$. Здесь нам даже не придется раскрывать скобки – достаточно просто разделить обе части уравнения на 2:

$$2(x-5) = 10 \to 2(x-5):2 = 10:2 \to x-5 = 5.$$

Теперь прибавим 5 к обеим частям уравнения и получим ответ:

$$x-5=5 \to x-5+5=5+5 \to x=10.$$

Проверим: левая часть: $2(x-5) = 2\cdot(10-5) = 2\cdot 5 = 10$; правая часть: 10; 10 = 10. Все верно!

б) $0,2x - 0,1(x+50) = 2$. Раскроем скобки:

$$0,2x - 0,1x - 5 = 2.$$

Приводим подобные члены и прибавляем к обеим частям 5:

$$0,2x - 5 - 0,1x = 2 \to 0,1x - 5 = 2 \to$$

$$0,1x - 5 + 5 = 2 + 5 \to 0,1x = 7.$$

Умножим обе части уравнения на 10:

$$0,1x = 7 \to 0,1x\cdot 10 = 7\cdot 10 \to x = 70.$$

в) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}(5-x) = 4$. Здесь в левой части уравнения находятся два дробных выражения со знаменателями 2 и 4 соответственно. От дробей легко «избавиться», умножив обе части уравнения на 4:

$$4\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}(5-x)\right)=4\cdot4\to 2x-(5-x)=16\to 2x-5+x=16\to$$

$$3x-5=16\to 3x-5+5=16+5\to 3x=21\to x=7.$$

Ответ: а) x =10; б) x = 70; в) x = 7.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б14. Решите уравнения:

а) $4(x-2)=8$; б) $35-(5-y)=41$; в) $(x-12)\cdot 8=-56$.

В11. Решите уравнения: а) $\frac{1}{2}(5x-3)=1$; б) $0,25+\left(x-3\frac{1}{5}\right)=2,75$;

в) $-5(-2,2x-1,4)+x=9,1$.

Теперь, прежде чем идти дальше, сформулируем одно правило, которое поможет нам более эффективно решать уравнения.

Рассмотрим такое уравнение $x+a=b$.

Мы уже знаем, что для решения данного уравнения надо прибавить к обеим частям $(-a)$, тогда получим:

$$x+a=b\to x+a+(-a)=b+(-a)\to x=b+(-a)\to x=b-a.$$

А теперь сравним две записи: $x+a=b$ и $x=b-a$. Можно сказать, что мы как бы перенесли слагаемое a из левой части уравнения в правую, поменяв его знак на противоположный, то есть с «плюса» на «минус».

Рассмотрим другое уравнение: $b=x-a$.

Перепишем его в виде: $b=x+(-a)$. Прибавим к обеим частям уравнения a, получим:

$$b=x+(-a)\to b+a=x+(-a)+a\to b+a=x.$$

Сравним записи: $b=x+(-a)$ и $b+a=x$. Получается, что мы как бы перенесли слагаемое $(-a)$ из правой части уравнения в левую, поменяв его знак на противоположный (в данном случае с «минуса» на «плюс»).

Теперь, когда мы разобрались в сути дела, сформулируем ПРАВИЛО ПЕРЕНОСА СЛАГАЕМЫХ:

При решении уравнений можно переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный.

Попробуем решить несколько простых уравнений, пользуясь этим правилом.

Задача 1.16. Решите уравнения: а) $x-2=-12$; б) $2+x=12$; в) $2+x=4+2x$.

Решение.

а) $x-2=-12 \to x+(-2)=-12$. Перенесем слагаемое (–2) из левой части уравнения в правую, изменив знак числа на противоположный, то есть с «минуса» на «плюс»: $x+(-2)=-12 \to x=-12+2 \to x=-10$.

б) $2+x=12$. Перенесем 2 из левой части уравнения в правую, поменяв знак на противоположный, то есть с «плюса» на «минус», получим: $2+x=12 \to x=12+(-2) \to x=10$.

в) $2+x=4+2x$. Сначала перенесем 4 из правой части уравнения в левую, поменяв знак с «плюса» на «минус», получим:

$$2+x=4+2x \to 2+x+(-4)=2x \to x-2=2x$$

Теперь перенесем x из левой части в правую, поменяв знак с «плюса» на «минус» и получим ответ:

$$x-2=2x \to -2=2x+(-x) \to -2=x \to x=-2.$$

Ответ: а) $x=-10$; б) $x=10$; в) $x=-2$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А9. Решите уравнения: а) $x + 10 = 20$; б) $x + 10 = -20$.

Б15. Решите уравнения: а) $0,5 - x = -2$; б) $2=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$.

В12. Решите уравнения: а) $x+2=2x+0,5$; б) $0,5-0,5x=x-1$.

Задача 1.17. Решите уравнения: а) $a(x-a)=2$;

б) $0,2x+(x-a)=1,4a$; в) $c-c\left(x-\frac{1}{2}\right)=1,5c.$

Решение.

а) $a(x-a)=2$. Разделим обе части на a (это можно сделать при условии, что $a \neq 0$), получим:

$$a(x-a)=2 \to a(x-a):a=2:a \to x-a=\frac{2}{a} \to x=\frac{2}{a}+a.$$

(Мы перенесли слагаемое ($-a$) из левой части уравнения в правую, изменив знак с «минуса» на «плюс».)

Читатель: А если $a = 0$?

Автор: При $a = 0$ уравнение принимает вид $0\cdot(x-0)=2$. Это равенство не выполняется ни при каких значениях x, поэтому при $a = 0$ у уравнения решений нет.

б) $0,2x+(x-a)=1,4a$. Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$0,2x+(x-a)=1,4a \to (0,2x+x)-a=1,4a \to$$
$$1,2x-a=1,4a \to 1,2x=1,4a+a.$$

Мы перенесли ($-a$) из левой части в правую, изменив знак с «минуса» на «плюс». Получили:

$$1,2x=2,4a \to 1,2x:1,2=2,4a:1,2 \to x=2a.$$

в) $c-c\left(x-\frac{1}{2}\right)=1,5c.$ Вынесем в левой части уравнения c за скобки и разделим на c обе части уравнения:

$$c-c\left(x-\frac{1}{2}\right)=1,5c \to c(1-(x-0,5))=1,5c \to$$

$$c(1-(x-0,5)):c=1,5c:c \to 1-x+0,5=1,5 \to 1,5-x=1,5.$$

Перенесем 1,5 из левой части в правую:

$$-x=1,5-1,5 \to -x=0 \to x=0.$$

Это решение верно при $c \neq 0$, так как в процессе решения мы выполняли деление на c. При $c = 0$ уравнение приобретает вид $0-0\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=1,5\cdot 0$.

Данное равенство выполняется при любых значениях x, т.е. его решением будет любое число.

Ответ: а) $x = \frac{2}{a} + a$ при $a \neq 0$ и нет решений при $a = 0$; б) $x = 2a$; в) $x = 0$ при $c \neq 0$ и x – любое число при $c = 0$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б16. Решите уравнения:

а) $(c + 1)x - 0{,}2x = 3$; б) $0{,}2c + (x - 3c) = 2{,}2c$; в) $k(x + 2) = 2k$.

В13. Решите уравнение: а) $\frac{a}{2}(4x - 2) = a + \frac{a}{4}$; б) $0{,}5k(k + x + 1{,}5) = 2k$; в) $-5b(0{,}2x - 1) + bx = 0$; г) $6a - 3a\left(x - \frac{1}{8}\right) = 0$.

Неизвестное в обеих частях уравнения

Уравнения вида $\pm ax \pm b = \pm cx \pm d$

Задача 1.18. Решите уравнение: а) $3x - 4 = x$; б) $0{,}1x - 2 = 0{,}2x + 3$.

Решение.

а) $3x - 4 = x$. Перенесем $3x$ из левой части уравнения в правую, получим:

$$3x - 4 = x \to -4 = x + (-3x) \to -4 = -2x \to 4 = 2x \to 2 = x \to x = 2.$$

б) $0{,}1x - 2 = 0{,}2x + 3$. Одновременно перенесем $0{,}1x$ из левой части в правую, а 3 – из правой в левую получим:

$$0{,}1x - 2 = 0{,}2x + 3 \to -2 + (-3) = 0{,}2x + (-0{,}1x) \to -5 = 0{,}1x.$$

Теперь умножим обе части уравнения на 10 и сразу получим ответ:

$$-5 = 0{,}1x \to 10 \cdot (-5) = 10 \cdot 0{,}1x \to -50 = x \to x = -50.$$

Ответ: а) $x = 2$; б) $x = 50$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б17. Решите уравнение: а) $x + 3 = 2x + 1$; б) $3 - x = 1 + x$, в) $3x + 4 = 6x - 2$.

В14. Решите уравнение: а) $3{,}5x-3x=2{,}3+x$; б) $\frac{1}{3}-4x=2+x$.

Теперь рассмотрим более сложные уравнения, для решения которых нам придется и раскрывать скобки, и пользоваться правилом переноса слагаемых, и приводить подобные члены.

Задача 1.19. Решите уравнение $(12-x)-(3x+4)=-x+1$.

Решение. Начнем с того, что раскроем скобки и приведем подобные члены в левой части уравнения:

$$(12-x)-(3x+4)=-x+1 \to 12-x-3x-4=-x+1 \to$$
$$-4x+8=-x+1.$$

Теперь перенесем $(-x)$ из правой части в левую, а 8 – из левой части в правую, получим:

$$-4x+8=-x+1 \to -4x+x=1-8 \to -3x=-7 \to x=\frac{-7}{-3}=2\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=2\frac{1}{3}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б18. Решите уравнения: а) $(5x-1)-2(3x-6)=11-x$;

б) $2(x-4)-4(x-2)=-(-2-2x)$;

в) $2(x-1)-(x+2)=-3(4-x)+4(3-x)$.

В15. Решите уравнение: $5(-2{,}2x-1{,}4)+x=9{,}1-10{,}2x$.

Теперь рассмотрим уравнения с обыкновенным дробями, которые удобнее всего решать путем умножения обеих частей уравнения на целое число, которое «превращает» все дроби в целые числа. Покажем, как это делается на конкретном примере.

Задача 1.20. Решите уравнения:

а) $\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{3}x-1$; б) $2\left(\frac{1}{4}x-1\right)=\left(0{,}75+\frac{x}{2}\right)$.

Решение. а) $\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{3}x-1$. Сделаем такую «хитрость»: умножим обе части уравнения на 6, получим:

$$6\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)=6\cdot\left(\frac{1}{3}x-1\right)\to$$

$$\to 6\cdot\frac{1}{2}x+6\cdot 1=6\cdot\frac{1}{3}x-6\cdot 1\to$$

$$\to 3x+6=2x-6.$$

Теперь переносим $2x$ в левую часть, а 6 – в правую:

$$3x+6=2x-6\to 3x-2x=-6-6\to x=-12.$$

б) $2\left(\frac{1}{4}x-1\right)=\left(0,75+\frac{x}{2}\right)$.

Автор: Как Вы считаете, на какое целое число надо умножить обе части, чтобы «избавиться» от дробей?

Читатель: По-моему, на 4:

$$4\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{4}x-1\right)=4\cdot\left(0,75+\frac{x}{2}\right)\to$$

$$\to 8\cdot\frac{1}{4}x-8\cdot 1=4\cdot 0,75+4\cdot\frac{x}{2}\to$$

$$2x-8=3+2x.$$

Далее переносим (–8) в правую часть, а $2x$ – в левую и получаем:

$$2x-8=3+2x\to 2x-2x=3+8\to 0\cdot x=11.$$

Решений нет.

Автор: Совершенно верно!

Ответ: а) $x = -12$; б) нет решений.

СТОП! Решите самостоятельно.

В16. Решите уравнения: а) $\frac{3}{5}x-4=\frac{1}{5}x-2,5$;

б) $\frac{1}{2}(5x-12)=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{7}(x+1)=\frac{1}{5}(x-1)$.

Уравнения с делением

Уравнения типов $\pm(ax \pm d):b = \pm c$ **и** $a:(bx \pm c) = \pm d$

Задача 1.21. Решите уравнения: а) $x:120=40$; б) $120:x=40$; в) $(x+2):3=2x-6$.

Решение.

а) $x:120=40$. Если два числа равны (например, 5 = 5), то при умножении этих чисел на одинаковые сомножители произведения также будут равны, например:

$$5\times3=5\times3;\ 5\times17=5\times17;\ 5\times100=5\times100.$$

Умножим обе части нашего уравнения на 120, получим

$$x:120=40 \to x:120\times120=40\times120 \to$$

$$\to x=40\times120 \to x=4800.$$

Проверим: левая часть $x:120=4800:120=40$; правая часть 40; 40 = 40. Все верно!

б) $120:x=40$. Умножим обе части уравнения на «засекреченное» число x, получим:

$$120:x=40 \to 120:x\times x=40\times x \to 120=40x.$$

Теперь разделим обе части уравнения на 40 и получим ответ:

$$120=40x \to 120:40=40\cdot x:40 \to 3=x.$$

Проверим: левая часть $120:x=120:3=40$; правая часть 40; 40 = 40. Все верно.

в) $(x+2):3=2x-6$. Начнем с того, что умножим обе части уравнения на 3:

$$(x+2):3=2x-6 \to (x+2):3\times3=(2x-6)\times3 \to x+2=3(2x-6).$$

Воспользуемся распределительным законом умножения и раскроем скобки в правой части уравнения:

$$x+2=3\cdot2x-3\cdot6 \to x+2=6x-18.$$

Теперь перенесем x в правую часть, а (–18) – в левую:

$$x+2=6x-18 \to 2+18=6x-x \to 20=5x.$$

Теперь разделим обе части уравнения на 5 и получим ответ:

$$20 = 5x \to 20:5 = 5\cdot x:5 \to x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б19. Зная, что произведение 126 и 35 равно 4410, решите уравнения: а) $p:126 = 35$; б) $4410:k = 126$; в) $4410:t = 35$.

В17. Решите уравнения: а) $30:(x+2) = 5$; б) $(x+2):30 = x-56$; в) $x:10 = 2(x-57)$.

Продолжим решать «уравнения с делением», только теперь в качестве делимых и делителей у нас будут выступать обыкновенные и десятичные дроби.

Задача 1.22. Решите уравнения: а) $(x+0,5):0,1 = -0,2$; б) $x:\frac{1}{8} = -2\frac{1}{4}$; в) $0,2:(x-0,1) = -\frac{3}{5}$.

Решение.

а) $(x+0,5):0,1 = -0,2$. Сначала умножим обе части уравнения на 0,1, получим:

$$(x + 0,5):0,1 = -0,2 \to (x + 0,5):0,1\cdot 0,1 = -0,2\cdot 0,1 \to$$
$$x + 0,5 = -0,02 \to x = -0,02 - 0,5 \to x = -0,52.$$

б) $x:\frac{1}{8} = -2\frac{1}{4}$. Умножим обе части на $\frac{1}{8}$:

$$x:\frac{1}{8} = -2\frac{1}{4} \to x:\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = -2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} \to x = -\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{9}{32}.$$

в) $0,2:(x-0,1) = -\frac{3}{5}$. Умножим обе части на $(x - 0,1)$:

$$0,2:(x-0,1)\cdot(x-0,1) = -\frac{3}{5}\cdot(x-0,1) \to 0,2 = -\frac{3}{5}(x-0,1).$$

Теперь умножим обе части уравнения на 5 и избавимся от знаменателя:

$$5\cdot 0,2 = 5\left(-\frac{3}{5}(x-0,1)\right) \to 1 = -3(x-0,1) \to 1 = -3x + 0,3 \to$$

$$1-0,3=-3x \to 0,7=-3x \to -0,7=3x \to -7=30x \to x=-\frac{7}{30}.$$

Ответ: а) $x = -0,52$; б) $x=-\frac{9}{32}$; в) $x = -\frac{7}{30}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б20. Решите уравнения:

а) $x:\frac{7}{8}=-0,2$; б) $(-0,4):x=-\frac{7}{8}$; в) $x:1\frac{2}{5}=-\frac{5}{7}$.

В18. Решите уравнения: а) $\frac{1}{2}(x-0,4):\left(-\frac{3}{4}\right)=1\frac{7}{9}$;

б) $-0,1\left(x-\frac{7}{9}\right):\frac{2}{5}=3\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{5}:\left(-x-\frac{3}{5}\right)=-0,8$.

Г4. Решите уравнение

$$-0,1\cdot(-0,2)\cdot 0,3\cdot x:\frac{1}{1000}=500\cdot(0,12x+0,1)-\frac{2}{3}x.$$

Задача 1.23. Решите уравнения:

а) $2x:a=0,30$; б) $b:(x+a)=-\frac{2}{3}a$.

Решение.

а) $2x:a=0,30$. Умножим обе части уравнения на a:

$$2x:a=0,30 \to 2x:a\cdot a=0,3a \to 2x=0,3a \to$$

$$x=0,3a:2=0,15a.$$

Ясно, что решение есть только при $a\neq 0$. При $a=0$ решений нет.

б) $b:(x+a)=-\frac{2}{3}a$. Действуем аналогично пункту а), то есть умножаем обе части на $(x+a)$:

$$b:(x+a)=-\frac{2}{3}a \to b:(x+a)\cdot(x+a)=-\frac{2}{3}a\cdot(x+a) \to$$

$$b=-\frac{2}{3}a\cdot(x+a).$$

Теперь делим обе части на $\left(-\frac{2}{3}a\right)$:

$$b:\left(-\frac{2}{3}a\right)=\left(-\frac{2}{3}a\right)\cdot(x+a):\left(-\frac{2}{3}a\right)\to -b\cdot\frac{3}{2a}=x+a\to$$

$$-\frac{3b}{2a}=x+a\to x=-a-\frac{3b}{2a}.$$

Ответ: а) $x = 0{,}15a$; б) $x=-a-\frac{3b}{2a}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В19. Решите уравнения: а) $0{,}7x{:}c = 0{,}56\,(c\neq 0)$; б) $121c{:}(1{,}1x) = 110bc\,(c\neq 0; b\neq 0)$; в) $\frac{5x}{8}:(a-4)=a+4$.

Г5. Решите уравнение $\frac{2}{ab}(ax+b):10=2\frac{2}{5}$.

Составляем и решаем разные уравнения

Задача 1.24. При каком значении x значение выражения $-5x + 3$ в три раза меньше значения выражения $-2x + 7$?

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи необходимо составить и решить уравнение. Значение выражения $-5x + 3$ в три раза меньше значения выражения $-2x + 7$, значит, если мы умножим на 3 выражение $-5x + 3$, то получим выражение $-2x + 7$. Получаем уравнение:

$$3(-5x+3)=-2x+7\to -15x+9=-2x+7.$$

Перенесем $-2x$ в левую часть, а 9 – в правую, получим:

$$-15x+2x=7-9\to -13x=-2\to x=\frac{2}{13}.$$

Ответ: $x=\frac{2}{13}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А10. При каких значениях x значение выражений: а) $-2{,}1x$; б) $-\frac{1}{3}x+2$ равно $-0{,}3$?

Б21. При каких значениях x значение выражения $-\frac{1}{8}-0{,}2x$ равно значению выражения: а) $-0{,}1-0{,}1x$; б) $-2-\frac{1}{5}x+1{,}875$?

Пропорция и ее свойства

Пропорцией называется равенство вида: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Например: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$; $\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}$; $\frac{0{,}1}{0{,}2}=\frac{1}{2}$ и т.д.

У пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ a и d называются ***крайними членами,*** а b и c – ***средними членами***.

Так вот, оказывается, что ***произведение крайних членов равно произведению средних членов,*** то есть: $ad=bc$.

Читатель: А почему?

Автор: Это нетрудно доказать. Умножим обе части равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ на bd, получим:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\to bd\cdot\frac{a}{b}=bd\cdot\frac{c}{d}\to\frac{\cancel{b}da}{\cancel{b}}=\frac{b\cancel{d}c}{\cancel{d}}\to da=bc,$$

что и требовалось доказать.

Итак, запомним:

$$\text{если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } ad=bc. \qquad (1.4)$$

Равенство $ad=bc$ иногда называют ***свойством пропорции.***

Уравнения, использующие свойство пропорции

Задача 1.25. Решите уравнения: а) $(x + 3):2 = (3x - 2):7$;
б) $\frac{2}{x-1} = \frac{5}{2x}$; в) $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$.

Решение.

а) $(x + 3):2 = (3x - 2):7 \rightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{3x-2}{7}$. Применим свойство пропорции, получим: $7(x + 3) = 2(3x - 2)$. Теперь можно раскрывать скобки:

$$7(x + 3) = 2(3x - 2) \rightarrow 7x + 21 = 6x - 4 \rightarrow 7x - 6x = -4 - 21 \rightarrow x = -25.$$

б) $\frac{2}{x-1} = \frac{5}{2x}$. Заметим, что дроби $\frac{2}{x-1}$ и $\frac{5}{2x}$ существуют, только если их знаменатели не равны нулю, то есть $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$ и $2x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$. Применим к нашему уравнению свойство пропорции:

$$2 \cdot 2x = 5(x - 1) \rightarrow 4x = 5x - 5 \rightarrow 4x - 5x = -5 \rightarrow -x = -5 \rightarrow x = 5$$

Найденный корень не равен ни 1, ни 0, т.е. не нарушает установленных ограничений.

На всякий случай проверим: левая часть $\frac{2}{x-1} = \frac{2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; правая часть: $\frac{5}{2x} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Все верно!

в) $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$. Тут ограничением будет $x \neq 0$ – это нужно, чтобы знаменатель дроби $2/x$ не превратился в 0. Применяем свойство пропорции: $x \cdot x = 2 \cdot 8 \rightarrow x^2 = 16$. Теперь нам необходимо найти число, квадрат которого равен 16. Одно находится легко – это 4: $4^2 = 16$. Второе находим, вспомнив о том, что отрицательное число при возведении в квадрат тоже дает положительный результат. Таким образом, вторым корнем будет –4, так как $(-4)^2 = 16$.

Ответ: а) $x = -25$; б) $x = 5$; в) $x = 4$ и $x = -4$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А11. Решите уравнения: а) $\frac{2x}{2}=\frac{4x+5}{4}$; б) $\frac{6x+1}{3}=\frac{-2x-2}{4}$.

Б22. Решите уравнения: а) $\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x-3}$; б) $\frac{3}{x-1,5}=\frac{2}{3x-\frac{1}{3}}$.

В20. Решите уравнения: а) $\frac{2}{x-1}=\frac{x-1}{2}$; б) $\frac{1,4x+0,7}{7}=\frac{\frac{2}{7}x-\frac{3}{14}}{2}$.

Линейным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное содержится только в первой степени. Например, $2x+3=0; (2x-5)=5x; 4x=5$ и т.д.

Квадратным (или уравнением второй степени) называется уравнение, содержащее неизвестное во второй степени и (может быть) – в первой степени, а также числа. Например: $x^2=4;\ x^2+x=0;\ 2x^2+x+6=0$.

Кубическим (или уравнением третьей степени) называется уравнение, содержащее неизвестное в третьей и (может быть) во второй и первой степени, а также числа. Например, $x^3=4;\ x^3+x=0;\ 2x^3+x^2+6x+1=0$.

Уравнением n-й степени называется уравнение, содержащее неизвестное в n-й степени и (может быть) в более низких степенях, а также числа. Например: $x^n=4;\ x^n+x^{n-1}=0;$ $2x^n+x^{n-2}+6x+1=0$.

Мы с вами пока решали, главным образом, линейные уравнения и изредка – простейшие квадратные уравнения.

Уравнения, сводящиеся к линейным, путем сокращения членов, содержащих более высокие степени типа $x^2-x^2\pm ax\pm bx=\pm c$

Покажем на примере, о чем идет речь. Рассмотрим такое уравнение $x^4+x=x^4+1$. На первый взгляд, это уравнение содержит x в четвертой (!) степени, но если перенести x^4 из левой части уравнения в правую, то получим $x^4 + x - x^4 = 1 \to x = 1$. То есть «страшные» четвертые степени исчезли и осталось простейшее линейное уравнение!

Задача 1.26. Решите уравнение: $x(x+1) - (x+1)(x+2) = 4$.

Решение. Напомним, как раскрываются скобки при преобразовании выражения вида $(a + b)(c + d)$. Сначала мы рассматриваем выражение $(a + b)$ как некоторое число $(a + b) = A$, тогда наше выражение принимает вид

$$(a+b)(c+d) = A(c+d) = Ac + Ad.$$

Теперь вместо A подставим $(a+b)$, получим

$$Ac + Ad = (a+b)c + (a+b)d.$$

А дальше преобразуем каждое из слагаемых согласно распределительному закону умножения, получим:

$$(a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Итак, мы получили формулу:

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd. \qquad (6.2)$$

Теперь можно приступить к решению нашего уравнения.

Сначала преобразуем первое слагаемое:

$$x(x+1) = x \cdot x + x \cdot 1 = x^2 + x.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$(x+1)(x+2) = (x+1)\cdot x + (x+1)\cdot 2 = x \cdot x + 1 \cdot x + x \cdot 2 + 1 \cdot 2 =$$

$$= x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2.$$

Теперь наше уравнение можно переписать в виде:

$$x(x+1) - (x+1)(x+2) = 4 \quad \to$$

$$x^2 + x - (x^2 + 3x + 2) = 4 \to$$

$$x^2 + x - x^2 - 3x - 2 = 4 \to (x^2 - x^2) + (x - 3x) = 4 + 2 \to$$

$$-2x = 6 \to x = -3.$$

Ответ: $x = -3$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В21. Решите уравнения: а) $x^2 = x(x+1)$; б) $x(x+1) - x(x-1) = 1$; в) $(x+1)(x+2) = x^2 + 3$.

Г6. Решите уравнение $\dfrac{(3x+1)(2x-3)}{6} = x^2 - 1$.

Уравнения с модулями

Вспомним, что модулем (абсолютной величиной) числа a называется само это число, если оно положительное: $|a| = a$, и число, противоположное данному, если это число отрицательное: $|a| = -a$. Например, $|+3| = 3$, а $|-5| = -(-5) = +5$.

Геометрический смысл модуля числа очень прост – это расстояние от начала координат до точки, координата которой равна данному числу (рис. 6. 1).

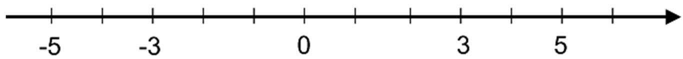


Рис. 6.1

Автор: Как Вы считаете, верно ли равенство $|x| = |-x|$?

Читатель: Я думаю, верно, потому что $|2| = |-2| = 2$ и $|-2| = |-(-2)| = |2| = 2$.

Автор: Совершенно правильно! Это можно объяснить и так: точки, координаты которых равны x и $-x$ симметричны друг другу относительно начала координат, а значит, они находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, то есть их модули равны.

Задача 1.27. Решите уравнения: а) $|x| = 2$; б) $|x| = -2$; в) $|x+1| = 2$; г) $x + |-x| = 1$.

Решение. а) $|x| = 2$. Если расстояние от точки с координатой x до начала координат равно 2, то это значит, что либо

$x=2$, либо $x=-2$. Эти значения и являются корнями нашего уравнения.

б) $|x|=-2$. Модуль любого числа есть величина положительная, значит, данное уравнение не имеет решений.

в) $|x+1|=2$. Сделаем такую «хитрость»: заменим выражение $x+1$ на переменную *z*, то есть пусть $z=x+1$, тогда наше уравнение примет вид $|z|=2$. А корни такого уравнения мы уже нашли в пункте а): $z=2; z=-2$.

Теперь вспомним, что $z=x+1$ и получим два очень простых уравнения относительно неизвестной величины *x*: $x+1=2$ и $x+1=-2$. Решая эти уравнения, находим корни нашего уравнения:

$$x+1=2 \to x=2-1 \to x=1;$$
$$x+1=-2 \to x=-1-2 \to x=-3.$$

Проверим $x=1$: левая часть: $|x+1|=|1+1|=|2|=2$; правая часть 2; 2 = 2. Все верно. Проверим $x=-3$: левая часть: $|x+1|=|-3+1|=|-2|=2$; правая часть: 2; 2 = 2. Все верно.

г) $x+|-x|=1$. Прежде всего, заметим, что поскольку $|x|=|-x|$, наше уравнение можно записать в виде $x+|x|=1$. Нам надо «избавиться» от знака модуля. Вспомним, что если $x \geq 0$, то $|x|=x$. То есть для неотрицательных значений *x* наше уравнение примет вид:

$$x+|x|=1 \to x+x=1 \to 2x=1 \to x=\frac{1}{2}.$$

$x=\frac{1}{2}>0$, а значит, условие $x \geq 0$ выполняется, и $x=\frac{1}{2}$ – корень данного уравнения.

Теперь рассмотрим случай $x<0$, теперь $|x|=-x$, и наше уравнение примет вид $x+|x|=1 \to x-x=1 \to 0 \cdot x=1 \to$ решений нет.

Таким образом, наше уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x = 2$; $x = -2$; б) решений нет; в) $x = 1$; $x = -3$; г) $x = \frac{1}{2}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б23. Решите уравнения: а) $|x| = 9$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -5$.

В22. Решите уравнение: а) $|3x| = 39$; б) $|-1{,}2x| = 6$; в) $|6{,}1x| = 0$; г) $|-2{,}9x| = -8{,}7$; д) $|x - 1| = 2$.

Г7. Решите уравнение: а) $x - |x| = 1$; б) $\frac{x}{|x|} = 1$.

Метод замены переменных

Задача 1.28. Решите уравнения: а) $5(x+2)+3 = 5-(x+2)$; б) $5|x+2|+3 = 5-3|x+2|$; в) $5\cdot\frac{1}{|x+2|}+3 = 5-3\cdot\frac{1}{|x+2|}$.

Решение.

а) $5(x+2)+3 = 5-(x+2)$. Вместо того, чтобы раскрывать скобки, сделаем такую ***замену***: $z = x+2$. Тогда наше уравнение примет вид $5z+3 = 5-3z$. Решить такое уравнение значительно проще:

$$5z+3 = 5-3z \to 5z+3z = 5-3 \to 8z = 2 \to z = \frac{1}{4}.$$

Теперь вспомним, что $z = x+2$, тогда

$$\frac{1}{4} = x+2 \to \frac{1}{4}-2 = x \to x = -(2-\frac{1}{4}) = -1\frac{3}{4}.$$

Итак, наше уравнение имеет один корень:

$$x = -1\frac{3}{4}.$$

б) $5|x+2|+3=5-3|x+2|$. Теперь сделаем такую замену: $z=|x+2|$, и наше уравнение примет вид: $5z+3=5-3z$. А это уравнение мы только что решили в пункте а): $z=\frac{1}{4}$. Теперь вспомним, что $z=|x+2|$ и получим: $|x+2|=\frac{1}{4}$.

Сделаем еще одну замену, пусть $t=x+2$, и наше уравнение примет вид $|t|=\frac{1}{4}$. А такие уравнения мы уже решать умеем: равенство $|t|=\frac{1}{4}$ означает, что либо $t=\frac{1}{4}$, либо $t=-\frac{1}{4}$, и мы получаем два простых уравнения относительно x:

1) $x+2=\frac{1}{4} \to x=\frac{1}{4}-2 \to x=-1\frac{3}{4}$;

2) $x+2=-\frac{1}{4} \to x=-\frac{1}{4}-2 \to x=-2\frac{1}{4}$.

То есть уравнение имеет два корня: $x=-1\frac{3}{4}$ и $x=-2\frac{1}{4}$.

в) $5\cdot\frac{1}{|x+2|}+3=5-3\cdot\frac{1}{|x+2|}$. Делаем замену: $z=\frac{1}{|x+2|}$ и получаем уже хорошо знакомое нам уравнение $5z+3=5-3z$, которое имеет корень: $z=\frac{1}{4}$. Тогда $\frac{1}{4}=\frac{1}{|x+2|}$.

Если две дроби равны, и их числители тоже равны, то равны и их знаменатели. Значит, $|x + 2| = 4$. Делаем замену $t=x+2$ и получаем уравнение $|t| = 4$. Это означает, что либо $t = 4$, либо $t = -4$.

Мы получаем два простых уравнения относительно x:

1) $x+2=4 \to x=4-2 \to x=2$;

2) $x+2=-4 \to x=-4-2 \to x=-6$.

Уравнение имеет два корня $x = 2$ и $x = -6$.

Ответ: а) $x=-1\frac{3}{4}$; б) $x=-1\frac{3}{4}$ и $x=-2\frac{1}{4}$;

в) $x=2$ и $x=-6$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б24. Решите, используя замену переменной:

а) $2(2x + 2) = 3$; б) $4\left(x-\frac{1}{8}\right)-\left(x-\frac{1}{8}\right)=3$; в) $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{4}+\frac{2}{x+1}$.

В23. Решите уравнения, используя замену переменной:

а) $3(x - 4{,}5) - 2(x - 4{,}5) = 6$; б) $\left(x+\frac{5}{7}\right)-2\left(x+\frac{5}{7}\right)=-4$;

в) $\left(x+\frac{2}{3}\right)-1=\frac{2\left(x+\frac{2}{3}\right)}{3}$.

Г8. Решите уравнения, используя замену переменной:

а) $|3x - 5| = 2$; б) $2-\left|4x-\frac{1}{2}\right|=5\left|4x-\frac{1}{2}\right|-4$;

в) $6\frac{2}{|x-3{,}5|}-22{,}5=-2\frac{1}{2}+\frac{2}{|x-3{,}5|}$.

Равносильность уравнений

Два уравнения называются ***равносильными***, если все корни первого уравнения являются корнями второго, а все корни второго уравнения являются корнями первого.

Например, равносильны уравнения $x-1=0$ и $2x-2=0$, так как оба уравнения имеют единственный корень $x=1$.

Равносильны уравнения $x^2=4$ и $|x|=2$, так как оба эти уравнения имеют два одинаковых корня: $x=-2$ и $x=2$.

А вот уравнения $x+1=1$ и $|x+1|=1$ НЕ равносильны, потому что первое уравнение имеет единственный корень $x = 0$, а второе уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=-2$.

Читатель: А равносильны ли два уравнения, если оба они не имеют корней?

Автор: Да! Например, равносильны уравнения $|x| = -1$ и $0 \cdot x = 3$.

Равносильными считаются и уравнения, корнями которых являются любые числа. Например, равносильны уравнения $|x| \cdot 0 = 0$ и $0 \cdot x = 0$.

Задача 1.29. Равносильны ли уравнения: а) $x - 2 = 2$ и $2 = 2 - x$; б) $x^2 = 9$ и $|x| = 3$; в) $\frac{x}{x} = 1$ и $0 \cdot x = 0$?

Решение.

а) $x - 2 = 2$ и $2 = 2 - x$. Решим каждое уравнение:

$$x - 2 = 2 \rightarrow x = 2 + 2 \rightarrow x = 4;$$

$$2 = 2 - x \rightarrow 2 - 2 = -x \rightarrow 0 = -x \rightarrow x = 0.$$

Корень первого уравнения $x = 4$, а второго $x = 0$. Следовательно, эти уравнения ***не являются равносильными***.

б) $x^2 = 9$ и $|x| = 3$. Корни первого уравнения $x = 3$ и $x = -3$, корни второго такие же, значит, эти уравнения ***равносильны***.

в) $\frac{x}{x} = 1$ и $0 \cdot x = 0$. Корнем второго уравнения может быть ***любое число,*** а первое уравнение не имеет смысла при $x = 0$, так как возникает деление на 0. Эти уравнения ***не являются равносильными***.

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б25. Проверьте, равносильны ли уравнения: а) $6x - 5 = 11 - 2x$ и $2(5 - 6x) = 2(2x - 11)$; б) $3 + 8x = 11$ и $8x = 11 - 3$; в) $|x| = 2$ и $2x = 4$.

В24. Не решая уравнение, составьте какое-либо уравнение с целыми коэффициентами, ему равносильное:

а) $-5{,}92x = 9{,}13$; б) $\frac{6}{7}x = 11$; в) $-5\frac{2}{5}x = -4{,}1$.

В25. Равносильны ли уравнения $x^2 - 1 = 3$ и $|x - 2| + 4 = 0$?

Г9. При каких значениях *и* равносильны уравнения:

а) $6x + 1 = 19$ и $6x + 1 + u = 19 + u$;

б) $6x + 1 = 19$ и $(6x + 1)u = 19u$;

в) $6x+1=19$ и $6x+1+u=19$?

Решение уравнений методом разложения на множители

Задача 1.30. Решите уравнения:

а) $3x(x+1)=0$; б) $x^2+10x=0$;

в) $(2x-5)(x+3)=3x+9$; г) $x^3-4x^2+x-4=0$.

Решение

а) $3x(x+1)=0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю, то есть $3x(x + 1)$ равно нулю, если $3x = 0$ или $x + 1 = 0$. Нам осталось решить два очень простых уравнения: $3x = 0$ и $x + 1 = 0$. Решая их, получаем два корня: $x = 0$ и $x = -1$.

б) $x^2+10x=0$. Вынесем за скобки x:

$$x^2 + 10x = 0 \to x(x + 10).$$

Получили ситуацию, аналогичную пункту а). Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, значит: 1) $x = 0$; 2) $x + 10 = 0 \to x = -10$.

в) $(2x-5)(x+3)=3x+9$. Заметим, что $3x+9=3(x+3)$. Теперь будем считать, что $x + 3 = A$, и тогда наше уравнение примет вид:

$$(2x-5)(x+3)=3x+9 \to (2x-5)A=3A \to (2x-5)A-3A=0.$$

Вынесем общий множитель за скобки, получим:

$$A\big((2x-5)-3\big)=0 \to A(2x-8)=0 \to (x+3)(2x-8)=0.$$

Отсюда: 1) $x+3=0 \to x=-3$; 2) $2x-8=0 \to 2x=8 \to x=4$.

г) $x^3-4x^2+x-4=0$. Запишем наше выражение в виде $(x^3-4x^2)+(x-4)=0$. Вынесем в первом слагаемом общий множитель x^2 за скобки, а во втором слагаемом вынесем за скобки 1, который всегда является общим множителем у любых слагаемых получим:

$$x^2(x-4)+1\cdot(x-4)=0.$$

Теперь вынесем за скобки (x – 4), получим:

$$x^2(x-4)+1\cdot(x-4)=0 \to (x-4)\left(x^2+1\right)=0.$$

Получаем два уравнения: $x-4=0 \to x=4$ и $x^2+1=0$. Корней нет, так как сумма неотрицательного числа x^2 и положительного числа 1 не может равняться 0. Значит, наше уравнение имеет один корень x = 4.

Ответ: а) x = 0 и x = –1; б) x = 0 и x = –10; в) x = –3 и x = 4; г) x = 4.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б26. Решите уравнения:

а) $4x\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$; б) $(x+2)(x+4)(x-6)=0$.

Б27. Решите уравнения: а) $16x - 4x^2 = 0$; б) $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x=0$.

В26. Решите уравнение $y(y-5)-7(y-5)=0$.

Г10. Решите уравнение $y^3-2y^2+y-2=0$.

Д2. Решите уравнение $y^3-2y^2-y+2=0$.

Решение уравнений «в буквах»

До сих пор известные величины (параметры) обозначались в уравнениях первыми буквами латинского алфавита: a, b, c и т.д., а неизвестные величины обозначались либо буквой x, либо (реже) – буквой y.

Но это был вопрос нашей с вами договоренности, мы с таким же успехом могли бы объявить известными величинами буквы x и y, а неизвестными – буквы a, b и c.

Иногда говорят так: «решите уравнение ***относительно*** такой-то буквы». Например: «решите уравнение $ax=b$ относительно буквы a».

Это значит, что мы должны выразить букву a через все остальные буквы. То есть необходимо записать равенство, в левой части которого будет стоять одна буква a, а в правой части – алгебраическое выражение, содержащее все остальные буквы.

Задача 6.31. Решите уравнение $ax + 2bx = a + b$ относительно: а) a; б) b; в) x.

Решение.

а) В данном случае неизвестной величиной является a, а b и x – некоторые заданные числа. Соберем все слагаемые, содержащие букву a, в левой части уравнения, а не содержащие – в правой, получим:

$$ax + 2bx = a + b \to ax - a = b - 2bx \to a(x - 1) = b - 2bx \to$$

$$a(x - 1) = b - 2bx \to a(x - 1):(x - 1) = (b - 2bx):(x - 1) \to$$

$$a = \frac{b - 2bx}{x - 1}.$$

б) Здесь неизвестной величиной является b, а a и x – некоторые заданные числа. Соберем все слагаемые, содержащие букву b, в левой части уравнения, а не содержащие – в правой, получим:

$$ax + 2bx = a + b \to 2bx - b = a - ax \to b(2x - 1) = a - ax \to$$

$$b(2x - 1):(2x - 1) = (a - ax):(2x - 1) \to b = \frac{a - ax}{2x - 1}.$$

в) В этом случае неизвестной величиной является x, а a и b – некоторые заданные числа. Поскольку все слагаемые, содержащие x, уже находятся в левой части уравнения, сразу выносим x за скобки:

$$ax + 2bx = a + b \to x(a + 2b) = a + b \to$$

$$x(a + 2b): (a + 2b) = (a + b): (a + 2b) \to x = \frac{a + b}{a + 2b}.$$

Ответ: а) $a = \dfrac{b - 2bx}{x - 1}$; б) $b = \dfrac{a - ax}{2x - 1}$; в) $x = \dfrac{a + b}{a + 2b}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б28. Решите уравнение $(a+1)x=b$ относительно: а) a; б) b; в) x.

В27. Решите уравнение $ax + ab + 2bx = 0$ относительно: а) a; б) b; в) x.

Г11. Решите уравнение $\dfrac{a+b}{x-a}=2$ относительно: а) a; б) b.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задачи очень легкие

А12. Является ли $b = 3$ корнем уравнения: а) $b + 2 = 6$; б) $3 - b = 0$; в) $9 - b = 5$?

А13. Угадайте корни уравнений: а) $t + 5 = 11$; б) $4x^2 = 0$; в) $-p - 0 = 8$; г) $(a - 1)(a + 2) = 0$.

А14. Найдите все корни уравнений: а) $6x - 6x = 12$; б) $3x = 9 - 9$; в) $17x - 17x = 34 - 34$.

А15. Решите уравнения:

а) $x+29=74$; б) $x-49=59$; в) $143-x=96$.

А16. Решите уравнения:

а) $4x = 64$; б) $x\cdot 8 = 3:8$; в) $0{,}5\cdot x = -5$; г) $-\dfrac{1}{5}x=-\dfrac{2}{5}$.

А17. Решите уравнения:

а) $9x - 4 = 32$; б) $7{,}2x + 7{,}2 = 7{,}2$; в) $-0{,}1 + x\cdot 3{,}1 = 3$.

А18. Решите уравнения:

а) $5a + 7a = 4$; б) $20k - k = 95$; в) $8z + 7z + 283 = 703$;
г) $29 + 6y + 54 = 149$.

А19. Решите уравнения: а) $3x - 2 = x - 6$; б) $x + 5 = 6x - 10$.

А20. Решите уравнения: а) $\dfrac{3x-1}{3}=\dfrac{4x+3}{2}$; б) $\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{10x-15}{15}$.

Задачи легкие

Б29. Является ли $z = -0{,}1$ корнем уравнений: а) $10z + 2 = -1$; б) $z^2 + z + 1 = 0{,}99$; в) $z^3 = z - 0{,}09$?

Б30. Угадайте корни уравнений: а) 0,0064 = $t \cdot t$; б) $z^3 - 1 = -2$; в) $c^4 = \frac{1}{81}$; г) $4x^2 = 64$.

Б31. Сколько корней имеют уравнения:

а) $x^2 = -4$; б) $-x^2 - x^6 = 12$;

в) $x^2 = 16$; г) $(x-1)(x+2)(x-3) = 0$?

Б32. Имеет ли уравнение: а) $9x^7 + 8x^5 7x^3 + x^2 + 14 = 0$ положительные корни; б) $-4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x = 0$ отрицательные корни?

Б33. Решите уравнения: а) $x - 1{,}08 = -11{,}8$; б) $-x - 2{,}4 = 13{,}69$; в) $-\frac{3}{4} + x = 3\frac{3}{8}$; г) $6\frac{7}{9} - x = 3\frac{1}{6}$.

Б34. Решите уравнения: а) $x \cdot (-5{,}1) = 1{,}7$; б) $\left(-\frac{6}{11}\right)x = -\frac{54}{121}$; в) $2{,}3x = 0$.

Б35. В уравнении $cx = 24$ найдите коэффициент c, зная, что корень уравнения равен: а) –3; б) 1/3; в) $-\frac{1}{6}$; г) 0,05.

Б36. Решите уравнения: а) $x - 3{,}2 = -4{,}9 - a$; б) $c + x = \frac{2}{3} + a$; в) $b - x = -\frac{1}{100} - c$; г) $-a - x = 3{,}5 - a + c$.

Б37. Решите уравнения: а) $6x = 3{,}6d$; б) $-2{,}5x = -\frac{75k}{at}$; в) $cx = -\frac{6c}{5}$ $(c \neq 0)$; г) $5x = 5 - c$

Б38. Приведите пример уравнения, множество корней которого: а) состоит из одного числа; б) является бесконечным; в) является пустым.

Б39. Решите уравнение $xy = 3p$ относительно переменных: а) x; б) y.

Б40. Решите уравнение $5x + 7 = 5x - 2$.

Б41. Решите уравнения: а) $-0{,}02 - x \cdot 3{,}1 = 0{,}6$; б) $-1 - x \cdot 8 = \frac{3}{5}$; в) $\frac{1}{9}x - 4 = -4\frac{1}{3}$; г) $-2{,}5x - 5{,}68 = 4{,}32$.

Б42. Решите уравнения: а) $6x + 8d + 3x = d$; б) $6,5x - 2,5a - 19x = = 9,5a + \frac{a}{2}$; в) $2cx - 2x = c + 1$, где $c \neq 1$.

Б43. Решите уравнения:

а) $3,8x - \frac{3}{5}x = 2 - \frac{2}{5}$; б) $-\frac{2}{5}x - 0,7x = 3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{10}$;

в) $3,5x + 1,81 - x \cdot 7,1 - 10,01 = 1,8$;

г) $8,57x + 1\frac{23}{100}x = -22,41 + 2,81$.

Б44. Решите уравнения:

а) $(35 + 25)x = 300$; б) $4(x+2) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4$;

в) $3(x+2) - x = 10$; г) $12 - 3(x-1) = 0$.

Б45. Решите уравнения: а) $bx - (3+b)x = -3$;

б) $5,8a - (x - c) = -2,2a$; в) $(p-1)(x+2) = 3(p-1)$.

Б46. Решите уравнения:

а) $(5-3)x = 5x - 3 \cdot 2$, б) $3(x+8) - 6x = x$.

Б47. Решите уравнения: а) $(2+x) + (18-4x) = -(6x-2)$;

б) $2(x+3) - 3(x+4) = 4(x-5) - 2(x-2)$;

в) $3(x - 1) - 2(x + 8) = -(4 - x)$.

Б48. Решите уравнения, зная, что произведение чисел 138 и 26 равно 3588: а) $3588:x = -26$; б) $z:138 = 26$; в) $3588:(-y) = 1$.

Б49. Решите уравнения:

а) $\left(-\frac{2}{5}\right) : x = -0,5$; б) $x : (-0,14) = \frac{10}{21}$; в) $x : 1\frac{4}{5} = -2\frac{1}{7}$.

Б50. При каких значениях x значение выражений: а) $-4,8x$; б) $-\frac{2}{5}x - 2,144$ равно $-0,144$?

Б51. Решите уравнения:

а) $\frac{1,5x - 3}{4} = \frac{0,5 + 8}{8}$; б) $\frac{4,5}{x-2} = \frac{9}{3x+2}$; в) $\frac{\frac{1}{4}}{2x - \frac{2}{3}} = \frac{-6}{4x-8}$.

Б52. Решите уравнения: а) $\frac{x-3}{6} - \frac{7}{9} = 0$; б) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3} - 4$;

в) $\frac{1}{3}(6x-1)-(0,5-\frac{x}{2})=0$; г) $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}+\frac{x}{40}=2$.

Б53. Решите уравнения: а) $|x| = 4$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = 3,5$; г) $|x|=-\frac{1}{4}$.

Б54. Решите, используя замену переменной:

а) $5\left(x-\frac{1}{5}\right)-\left(x-\frac{1}{5}\right)=2$; б) $\frac{1}{1+x}=2\frac{1}{1+x}-\frac{1}{8}$.

Б55. Проверьте, равносильны ли уравнения:

а) $6,6x - 3 = 11 - 2x$ и $2(3 - 6,6x) = 2(2x - 11)$;

б) $3 - 7x = 11$ и $7x = 11 - 3$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right)(7+3x)=12$ и $3x + 7 = -6$.

Б56. Решите уравнения: а) $x(x-10)=0$; б) $2x(x+5)=0$; в) $(5x+1)(x-9)=0$.

Б57. Решите уравнение $x(a + 2) = 2c$ относительно: а) a; б) c; в) x.

Б58. Решите уравнение $-x(3a-2)=-\frac{1}{6}c$ относительно: а) a; б) c; в) x.

Задачи средней трудности

В28. Угадайте целые корни уравнений: а) $(k - 5)(k - 1) = 5$; б) $x^2 + 4 = -1$; в) $(v + 3)(v - 4)(v + 5) = 0$; г) $(p - 1)(p - 2)(p - 3) = 6$.

В29. При каких значениях a корнем уравнения $a|2x-1|-4=5$ является число 7?

В30. Выразите из равенства каждую переменную через другие: а) $k + 2l - 4m = 1$; б) $2(a + b) = 8k + 4t$; в) $\frac{2}{5}(a+b+c)=1+a$.

В31. Запишите вместо a такое число, чтобы корнем получившегося уравнения было целое число: а) $ax = 21$; б) $\frac{1}{10}x=a$; в) $\frac{3}{8}x=a$; г) $ax=\frac{1}{9}$.

В32. Сколько корней имеет уравнение: а) $x^2 + 4x^4 = x^2(4x^2 + 1)$; б) $x^4 + x^6 - 5 = -5 - x^4 - x^6$; в) $\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = 0$?

В33. Определив знак выражения в левой части уравнения, ответьте на вопрос, какие из чисел –3,5; –1; 0; $\frac{1}{2}$; 2; $3\frac{1}{8}$ точно не являются его корнями: а) $6x^4 + 5x^3 + x = -18$; б) $-120x^8 - 59x^6 + 272x^3 + 3{,}5x - 1\frac{2}{5} = 0$?

В34. Имеют ли уравнения:

а) $6x^5 + 2x^3 + 8x^2 + 1 = 0$ положительные корни;

б) $3x^7 - 3x^2 + x - 5 = 0$ отрицательные корни?

В35. Имеет ли корни уравнение $6x + 9 = 6x + a$ при $a = 9$.

В36. При каких значениях p корнем уравнения $p(x + 4) - (5 - p) = 16$ является число 2?

В37. Решите уравнения:

а) $a + x - d - 1 = -\dfrac{6}{13}$; б) $a - x + \dfrac{3}{4} + c = 0{,}5 - a + c$.

В38. Запишите вместо c такое число, чтобы корнем получившегося уравнения $c\left(x + 2\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$ было целое число.

В39. Решите уравнение $x(x + 8) = x(x - 6)$.

В40. Придумайте уравнение, у которого: а) будет только один корень, и он будет равен нулю; б) не будет корней.

В41. Решите уравнения: а) $x\left(-2\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{22}{25pt}$;

б) $-x : \dfrac{5(a+c)}{6ab} = -\dfrac{25abc}{9(a+c)(a-c)}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$).

В42. Решите уравнение:

а) $4 + \left(-\dfrac{5}{12}\right)x = \dfrac{5}{6}$; б) $0{,}9x + 3\dfrac{1}{5} = 2\dfrac{3}{4}$;

в) $8{,}75 - 1{,}25x = 1\dfrac{1}{4}$; г) $5\dfrac{2}{3}x - \left(-4\dfrac{3}{5}\right) = -0{,}4$.

В43. Решите уравнение: а) $4ax + x \cdot 0{,}5a = 3a$; б) $2cx - 1\frac{3}{5}x = -0{,}8$;

в) $\left(2c - \frac{1}{2}\right)x + 0{,}5cx = -1$.

В44. Решите уравнения: а) $-\left(-\frac{2}{11}\right)x - \frac{7}{10}x - 0{,}2x = -\frac{31}{110} - \frac{48}{110}$;

б) $\frac{3}{8}x + x\left(-1\frac{3}{32}\right) + \frac{5x}{4} = \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$; в) $-3{,}1 - 15{,}25x + 1{,}26 + 9\frac{1}{4}x = -1{,}84$;

г) $-0{,}007x - 6{,}893x + 7\frac{2}{5} = 6\frac{1}{4}$.

В45. Решите уравнения: а) $2x - 5 = d$;

б) $x \cdot 2{,}2a - 4 = 0{,}51$ $(a \neq 0)$; в) $2cx - \frac{3}{5} = -3{,}4$ $(c \neq 0)$;

г) $\frac{29}{1001} - x\frac{5a}{14bc} = \frac{29}{1001} - \frac{5a^2}{7bc}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$.

В46. Решите уравнения:

а) $5\left(2x - 1\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot 3 - 5 \cdot \frac{1}{2}$; б) $3\left(-\frac{2}{5}z - 0{,}1\right) - 0{,}3z = -3{,}3$;

в) $0{,}49 - 0{,}07\left(x - \frac{3}{8}\right) = 0$; г) $7\left(-\frac{2}{7}y + 0{,}12\right) - \frac{1}{2}y = -0{,}16$.

В47. Решите уравнения: а) $2d\left(-x - 3\frac{1}{2}\right) = 2d \cdot 3 - 2d \cdot \frac{1}{2}$;

б) $c\left(-\frac{3}{4}x - 4c\right) - 0{,}5c = -1{,}5c$; в) $-a\left(\frac{1}{2}x + 4\right) - 2a = -3$.

В48. Решите уравнения: а) $d(x - 3{,}5) = 3d - dx$;

б) $c(0{,}5x - 4c) = 1$; в) $a\left(\frac{1}{4}x - 2\right) - a = -a$.

В49. Решите уравнения: а) $3 + 2{,}2x = 5 - 0{,}3x$;

б) $1{,}75x - 0{,}6 = -\frac{3}{5} + 1\frac{3}{4}x$; в) $\frac{5}{7}x - 0{,}7 = 1\frac{3}{10} - 1\frac{2}{7}x$.

В50. Решите уравнения: а) $0{,}3(2x - 1) - 0{,}4(x + 8) = 1{,}2x - 1$;

б) $-3,75x+1\frac{1}{4}(x-4)=-\left(x-\frac{3}{8}\right)+\left(0,25-1\frac{1}{2}x\right)$;

в) $\frac{1}{8}(2-16x)-3\left(\frac{1}{6}-\frac{x}{3}\right)=-0,25\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot 2-\frac{x}{8}+2\frac{1}{4}$.

В51. Решите уравнения: а) $\frac{1}{9}(x+1)=\frac{1}{11}(x-1)$;

б) $\frac{1}{3}(x+\frac{1}{5})=\frac{1}{5}(x-\frac{1}{3})$; в) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}+x=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}$.

В52. Решите уравнения: а) $55:(x+4)=-11$;
б) $(x-4):15=2x-37$; в) $x:12=2(x-23)$.

В53. Решите уравнения: а) $15:\left(-0,2x-\frac{3}{5}\right)=45$;

б) $(x-4):15=\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}$; в) $\frac{5}{6}(x-1,75):(-0,3)=\left(x-\frac{1}{4}\right):(-0,3)$.

В54. Решите уравнения: а) $0,9x:(ab)=0,54$;

б) $1,69k:(1,3x)=\frac{k}{100l}$ $(k\neq 0)$; в) $3\frac{1}{2}x:(c-6)=c+6$.

В55. При каких значениях x значение выражения $-\frac{1}{8}+0,2x$: а) противоположно значению выражения $-2\frac{1}{5}x$; б) в два раза меньше значения выражения $-(0,5x+1)$; в) на 2,275 больше значения выражения $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$.

В56. Решите уравнения: а) $\frac{x-1}{ac}=\frac{x}{c}$ $(a\neq 0,\ c\neq 0)$; б) $\frac{2,5x+2}{0,5c}=\frac{-4x-2}{4a}$; в) $\frac{16}{x-0,5}=\frac{x-0,5}{4}$.

В57. Решите уравнения: а) $x(x-\frac{1}{3})=x^2+1$;

б) $x(x+0,5)-x(x-0,5)=1$; в) $(x-2)(x+3)=x(x+1)$.

В58. Решите уравнения: а) $|7x|=14$; б) $|0,5x|=0$; в) $|-0,8x|=1$; г) $|-2,5x|=-2,5$.

В59. Решите уравнения, используя замену переменной:
а) $(2x - 2,4) - 2(2x - 2,4) = -6$;
б) $-3\left(3x+\frac{3}{4}\right)-2\left(3x+\frac{3}{4}\right)=5,5\left(3x+\frac{3}{4}\right)$.

В60. Не решая уравнения, составьте какое-либо уравнение с целыми коэффициентами, ему равносильное:

а) $-2,32x = -5,64$; б) $\frac{5}{7}x=-8$; в) $-7\frac{1}{2}x=2,4$.

В61. Равносильны ли уравнения:
а) $|x-2|=2$ и $|x+2|=-2$;
б) $|x+2|=-2$ и $x^2+1=0$; в) $x^2+1=0$ и $(2-2)x=3-3$;
г) $\frac{x}{x}=1$ и $\frac{x}{|x|}=1$; д) $\frac{x}{x}=1$ и $\frac{x^2}{x^2}=1$?

В62. Решите уравнения: а) $x^2-7x=0$; б) $x^2+x=0$;
в) $2x^2-3x=0$; г) $\frac{1}{3}x^2-x=0$.

В63. Решите уравнение $ax+2ab=bx$ относительно: а) a; б) b; в) x.

Задачи трудные

Г12. При каких значениях z уравнение $3z^2-6z+1=zx$ имеет единственный корень; не имеет корней; имеет бесконечно много корней?

Г13. Докажите, что уравнения: а) $5x^4+75x^3-45x-201=0$;
б) $14x^6-133x^4+105x^3-21x=23$ не имеют целых корней.

Г14. При каких значениях a корнем уравнения $a|2x-1|-4=5$ является число -7?

Г15. При каких значениях s уравнение $-9s^2x-\frac{5}{9}s=9sx$: а) имеет единственный корень; б) не имеет корней; в) имеет бесконечно много корней?

Г16. Решите уравнение $\frac{7(a-b)}{2}x-x\cdot 2(a-b)=\frac{1}{4}\cdot\frac{a-b}{2}$.

Г17. Решите уравнения: а) $x\frac{5a}{c}-5a=-\frac{5a}{c}$ $(a\neq 0,\ c\neq 0)$;

б) $-\frac{a-b}{2}-5x(a-b)=-\frac{3(a-b)}{2}$ $(a\neq b)$;

в) $\frac{1}{2}(k+l)x-2(k-l)=3k-3l$ $(k\neq -l)$;

г) $0,75abc^2x-\frac{3}{4}\cdot\frac{ab}{c}=1,5\frac{ac}{b}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$.

Г18. Решите уравнение $(x-2):3+(x-3):2=(x-1):4+1$.

Г19. Решите уравнения:

а) $\frac{1}{a}(ax+b):(5c)=1\frac{3}{5}$; б) $\frac{a\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)}{8b}:(8ax-4)=\frac{1}{4}$.

Г20. Решите уравнение $\frac{(3x+1)(4x+2)}{12}=x^2-1$.

Г21. Решите уравнения: а) $y(y-2)+4(y-2)=0$;

б) $2y^2-50y=75-3y$; в) $15y^2+6y=5y+2$.

Г22. Решите уравнения, используя замену переменной:

а) $|4x-11|=3$; б) $0,25-\left|6x-\frac{1}{2}\right|=4|6x-0,5|-9,75$;

в) $6\frac{4}{\left|2x-3\frac{1}{4}\right|}-27,5=-3\frac{1}{2}+3\frac{4}{|2x-3,25|}$.

Г23. При каких значениях *u* равносильны уравнения:

а) $3x+1=19$ и $3x-1+u=17+u$;

б) $2x-\frac{1}{2}=10$ и $\left(-2x+\frac{1}{2}\right)u=-10u$?

Г24. При каких значениях *a* корнем уравнения $3a|6x-4|+1=14$ является число 5?

Г25. Решите уравнения: а) $|x-4|=8$; б) $|1,1-x|=1,2$;

в) $|0,3x-1|=0,8$; г) $|1,2+0,4x|=1$.

Г26. Решите уравнение $\frac{3b}{2x-4}-6ax=3$ относительно: а) *a*; б) *b*.

Задачи очень трудные

Д3. При каком значении c уравнение $(4c - 1)(3c + 3)x = 12c^2 - 2c$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней?

Д4. Определите, при каких значениях a корни уравнений $1{,}6(2 + x) - 3{,}2(3x + 4) = 0$ и $5ax - 2(4x + a) - x = 16a$ и являются противоположными числами.

Д5. Решите уравнения: а) $\frac{x}{|x|} = -1$; б) $|2{,}5 - |x + 2|| + 1{,}5 = 2{,}5$.

Д6. Решите уравнение: а) $y^3 + 6y^2 - y - 6 = 0$;

б) $y^3 + 3y = 8y^2 + 24$; в) $y^3 - 12 = 3y^2 - 4y$.