Заочный физико-математический лицей
«Авангард»

Е. Н. Филатов

АЛГЕБРА

8

Экспериментальный учебник

Часть 1

МОСКВА – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Делимость…………………………………………….

§ 2. Чёт – нечет……………………………………………

§ 3. Множества…………………………………………….

§ 4. Забавные задачи…………………………………….

§ 5. Комбинаторика (первое знакомство)………………….

§ 6. Математическая логика…………………………….

§ 7.Угадываем числа, ищем фальшивые монеты…………

§ 8. Принцип Дирихле…………………………………….

ПОДСКАЗКИ ....

ОТВЕТЫ ....

ГЛАВА 1
Учимся решать олимпиадные задачи

§ 1. Делимость

Вспомним, что значит *разделить* одно натуральное число a на другое натуральное число b, то есть что значит *выполнить действие* $a:b$.

Читатель: По-моему, это значит найти такое натуральное число c, что $c \cdot b = a$.

Автор: Совершенно верно! $100 : 20 = 5$, потому что $5 \cdot 20 = 100$.

Напомним, что то число, *которое* мы делим, называется *делимым*; то число **на** которое мы делим, называется *делителем*, а *результат деления* называется *частное*. Таким образом, в примере $100 : 20 = 5$ делимое 100, делитель 20, частное 5.

Мы знаем, что не всегда одно натуральное число *нацело* (без остатка) можно разделить на другое натуральное число. Например, 100 делится на 20, но не делится на 21. (Сразу оговоримся, что в данном параграфе мы будем иметь дело только с натуральными делителями.)

Для краткости записи будем в дальнейшем использовать следующие обозначения: $\vdots$ – «делится», $\not\vdots$ – «не делится». Например, запись $100 \vdots 20$ означает, что число 100 делится на число 20 без остатка, а запись $100 \not\vdots 21$ означает, что число 100 не делится на число 21 без остатка.

Делитель натурального числа

Каждое число обязательно делится на какое-нибудь число. Как минимум, оно делится на единицу и на самого себя. Так,

$7 : 1 = 7$ и $7 : 7 = 1$; $100 : 1 = 100$ и $100 : 100 = 1$ и т.д. Но некоторые числа делятся не только на единицу и самого себя, но и на другие числа: $12 \vdots 6$, $12 \vdots 4$; $12 \vdots 3$; $12 \vdots 2$.

Числа, на которые без остатка делится данное натуральное число, называются его *делителями*. Например, у числа 3 два делителя: 1 и 3, так как 3⋮1 и 3⋮3, у числа 4 три делителя: 1, 2 и 4, так как 4⋮1, 4⋮2, 4⋮4, а у числа 12 шесть делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12, так как 12⋮1, 12⋮2, 12⋮3, 12⋮4, 12⋮6, 12⋮12.

Итак, у каждого натурального числа, большего единицы, есть делители и этих делителей всегда не менее двух. Число 1 здесь исключение: у него всего один делитель: 1⋮1 и всё!

СТОП! Решите самостоятельно.

А1. Запишите все делители следующих чисел: а) 6; б) 18; в) 24; г) 26; д) 169; е) 61.

Числа простые и составные

Числа, которые делятся только на единицу и самих себя называются *простыми*. Например, простыми являются числа 2, 3, 5, 7, 17, 41, 101. Числа, которые имеют более двух делителей, называются *составными*, например: 4, 6, 8, 9, 100, 1000.

Заметим, что число 1 математики условились считать НЕ простым и НЕ составным, так как оно уникально: у него только один делитель – единица.

Кратность натуральных чисел

Число, которое делится на данное натуральное число без остатка, называется *кратным для данного числа*. Например:

$100 ⋮ 10 \rightarrow 100$ – кратное 10,

$50 ⋮ 10 \rightarrow 50$ – кратное 10,

$20 ⋮ 10 \rightarrow 20$ – кратное 10,

$1000 ⋮ 10 \rightarrow 1000$ – кратное 10,

$1000\,000 ⋮ 10 \rightarrow 1000\,000$ – кратное 10,

$10 ⋮ 10 \rightarrow 10$ – кратное 10.

Ясно, что *кратных* у данного числа бесконечно много, и одним из этих кратных является само число, так как всякое число делится самого на себя. Напомним, что числа, кратные 2, называются *чётными* (например, 2, 4, 6, 8, 12…), а не кратные 2 – *нечетными* (например, 1, 3, 5, 7…).

СТОП! Решите самостоятельно.

А2. Запишите по три кратных для следующих чисел: а) 2; б) 17; в) 24; г) 100.

Теперь вспомним, что такое ***обыкновенная дробь***, а также ***основное свойство дроби***.

Читатель: Насколько я помню, ***обыкновенная дробь*** – это выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа. Например: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$ и т.д. А ***основное свойство дроби*** состоит в том, что числитель и знаменатель дроби можно умножить и разделить на любое число, не равное нулю. Величина дроби при этом не изменится: $\frac{10}{20} = \frac{10 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{20}{40}$ и $\frac{10}{20} = \frac{10:10}{20:10} = \frac{1}{2}$.

Автор: Совершенно верно! На основном свойстве дроби основана операция, которая называется *сокращением* дроби. Мы *делим* и числитель и знаменатель на одно и то же число, не равное нулю, и *заменяем* исходную дробь на равную ей дробь, но с меньшими числителем и знаменателем. Так, $\frac{10}{20} = \frac{10:10}{20:10} = \frac{1}{2}$ – это как раз и есть сокращение дроби.

Задача 1.1. Сократите дроби:

а) $\frac{25 \cdot 18}{5}$; б) $\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 25}$, в) $\frac{80-16}{160-32}$.

***Решение*.**

а) $\dfrac{25\cdot18}{5}=\dfrac{\cancel{5}\cdot5\cdot18}{\cancel{5}\cdot1}=\dfrac{5\cdot18}{1}=90$;

б) $\dfrac{2^9\cdot3^4\cdot5}{2^8\cdot3^5\cdot25}=\dfrac{(2\cdot\cancel{2^8})\cdot\cancel{3^4}\cdot\cancel{5}}{\cancel{2^8}\cdot(3\cdot\cancel{3^4})\cdot5\cdot\cancel{5}}=\dfrac{2}{3\cdot5}=\dfrac{2}{15}$;

в) $\dfrac{80-16}{160-32}$. Конечно, здесь можно было бы сначала выполнить вычитание, а затем уже заниматься сокращением. Но дело значительно упростится, если заметить, что 80 = 5·16, 160 = 10·16, 32 = 2·16. Тогда

$$\frac{80-16}{160-32}=\frac{5\cdot16-1\cdot16}{10\cdot16-2\cdot16}=\frac{16\cdot(5-1)}{16\cdot(10-2)}=\frac{\cancel{16}\cdot4}{\cancel{16}\cdot8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: а) 90; б) $\dfrac{2}{15}$; в) $\dfrac{1}{2}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А3. Сократите дроби: а) $\dfrac{25}{35}$; б) $\dfrac{15\cdot8}{5}$; в) $\dfrac{35\cdot17\cdot2}{34\cdot7\cdot5}$.

Б1. Сократите дроби: а) $\dfrac{2^4\cdot3^4\cdot7}{2^3\cdot3^3}$; б) $\dfrac{2^3\cdot3^4}{2^4\cdot3^3\cdot7}$.

Б2. Сократите дроби:

а) $\dfrac{22+33}{77+88}$; б) $\dfrac{45+75}{55+50}$; в) $\dfrac{12+36}{60+24}$; г) $\dfrac{20+30}{50+100}$.

Б3. Сократите дроби: а) $\dfrac{65-13}{130-26}$; б) $\dfrac{153-51}{136+17}$.

Ещё один взгляд на операцию деления

Заметим, что деление числа a на число b можно рассматривать как операцию сокращения дроби $\dfrac{a}{b}$. Если после всех возможных сокращений знаменатель обратится в

1, значит, число a нацело разделилось на число b: $a \vdots b$, а если нет – значит, a не делится на b: $a \not\vdots b$.

Задача 1.2. Выясните, делится ли: а) $2^5 \cdot 7$ на 8; б) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ на 1000; в) $68 \cdot 65$ на 5.

Решение. Во всех трёх случаях попробуем сократить дроби.

а) $\dfrac{2^5 \cdot 7}{8}$. Заметим, что 8 = 2·2·2 = 2^3, тогда

$$\frac{2^5 \cdot 7}{8} = \frac{2^5 \cdot 7}{2^3 \cdot 1} = \frac{2^2 \cdot \cancel{2^3} \cdot 7}{\cancel{2^3} \cdot 1} = \frac{2^2 \cdot 7}{1} = 2^2 \cdot 7.$$

Значит ($2^5 \cdot 7$) делится на 8.

б) $\dfrac{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2}{1000}$. Заметим, что 1000 = $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$, тогда

$$\frac{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2}{1000} = \frac{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{(\cancel{2^3} \cdot 2^6) \cdot 3^5 \cdot \cancel{5^2}}{\cancel{2^3} \cdot \cancel{5^2} \cdot 5} = \frac{2^6 \cdot 3^5}{5}.$$

Все возможные сокращения мы провели, но знаменатель оказался равным 5, то есть мы получили дробное число, а значит, $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \not\vdots 1000$.

в) $\dfrac{68 \cdot 65}{5}$. Заметим, что 65 = 5·13, а дальше всё просто:

$$\frac{68 \cdot 65}{5} = \frac{68 \cdot \cancel{5} \cdot 13}{\cancel{5} \cdot 1} = \frac{68 \cdot 13}{1} = 68 \cdot 13 \Rightarrow (68 \cdot 65) \vdots 5.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б4. Выясните, делится ли: а) $2^9 \cdot 3$ на 2; б) $2^9 \cdot 3$ на 5.

В1. Выясните, делится ли число a на число b без остатка, если:

а) $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 7$;

б) $a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$ и $b = 3 \cdot 3 \cdot 5$;

в) $a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ и $b = 3 \cdot 5 \cdot 5$;

г) $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$ и $b = 21$;

д) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $b = 135$;

е) $a = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5$ и $b = 1000$.

В случае, когда a делится на b, найдите частное.

Делится или не делится?

Теперь мы будем определять, делится ли данное число (или арифметическое выражение) на другое число, *не проводя самой операции деления.*

Главный признак делимости: если натуральное число a можно представить в виде произведения $a = k{\cdot}b$, где k и b – натуральные числа, то $a \vdots k$.

В самом деле: $\dfrac{a}{k} = \dfrac{\cancel{k} \cdot b}{\cancel{k} \cdot 1} = \dfrac{b}{1} = b$.

Например, $777 = 7 \cdot 111$, значит, $777 \vdots 7$.

Задача 1.3. Докажите, что: а) $(19{\cdot}30) \vdots 3$; б) $(28{\cdot}25) \vdots 5$; в) $(14{\cdot}51) \vdots 7$.

Решение. Воспользуемся главным признаком делимости: если $a = k{\cdot}b$, то $a \vdots k$.

а) $19{\cdot}30 = 19{\cdot}3{\cdot}10 = 3{\cdot}(19{\cdot}10) \rightarrow\ 3{\cdot}(19{\cdot}10) \vdots 3$.

б) $28{\cdot}25 = 28{\cdot}5{\cdot}5 = 5{\cdot}(28{\cdot}5) \rightarrow\ 5{\cdot}(28{\cdot}5) \vdots 5$.

в) $14{\cdot}51 = 7{\cdot}2{\cdot}51 = 7{\cdot}(2{\cdot}51) \rightarrow\ 7{\cdot}(2{\cdot}5) \vdots 7$.

Ответ: все утверждения доказаны.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б5. Докажите, что: а) $(34{\cdot}12) \vdots 3$; б) $(33{\cdot}23) \vdots 3$; в) $(73{\cdot}90) \vdots 5$; г) $(35{\cdot}48) \vdots 5$; д) $(8{\cdot}21) \vdots 7$; е) $(56{\cdot}12) \vdots 7$.

Задача 1.4. Докажите, что $(3^8 - 3^7 + 3^6) \vdots 7$.

Решение. Преобразуем наше выражение и воспользуемся главным признаком делимости:

$$(3^8 - 3^7 + 3^6) = 3^2 \cdot 3^6 - 3{\cdot}3^6 + 1{\cdot}3^6 = 3^6{\cdot}(3^2 - 3 + 1) =$$
$$= 3^6{\cdot}(9 - 3 + 1) = 3^6{\cdot}7 = 7{\cdot}3^6.$$

А согласно главному признаку деления $7 \cdot 3^6 \vdots 7$.

Утверждение доказано.

СТОП! Решите самостоятельно.

А4. Докажите, что $(17^6 + 17^5) \vdots 18$.

Б6. Докажите, что: а) $7^8 - 7^7 + 7^6$ делится на 43; б) $2^{13} - 2^{10} - 2^9$ делится на 13.

В2. Докажите, что значение дроби $\frac{6^{10} - 6^9 - 6^8}{3^{11} + 3^9 - 3^8}$ – целое число.

Задача 1.5. Докажите, что $(81^4 - 9^7 + 3^{12}) \vdots 73$.

Решение. Представим каждое слагаемое в виде степени с основанием 3, а затем вынесем за скобки общий множитель:

$$81^4 - 9^7 + 3^{12} = (3^4)^4 + (3^2)^7 + 3^{12} = 3^{16} - 3^{14} + 3^{12} = 3^{12} \cdot 3^4 + 3^{12} \cdot 3^2 + 3^{12} \cdot 1 =$$

$$= 3^{12}(3^4 - 3^2 + 1) = 3^{12}(81 - 9 + 1) = 3^{12} \cdot 73 \to$$

$$3^{12} \cdot 73 \vdots 73.$$

Значит, $(81^4 - 9^7 + 3^{12}) \vdots 73$.

Утверждение доказано.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б7. Докажите, что: а) $(36^5 - 6^9) \vdots 30$; б) $(36^4 - 6^7) \vdots 7$; в) $(27^5 - 9^5) \vdots 26$; г) $(5^{18} - 25^8) \vdots 24$.

Задача 1.6. Докажите, что:

а) $(25^7 - 5^{12}) \vdots 120$; б) $(3^5 - 3^4)(3^3 + 3^2) \vdots 24$.

Решение.

а) $(25^7 - 5^{12}) = (5^2)^7 - 5^{12} = 5^{14} - 5^{12} = 5^{12}(5^2 - 1) = 5^{12} \cdot 24$.

Пока неочевидно, что наше выражение делится на 120, поэтому продолжаем преобразования:

$$5^{12} \cdot 24 = 5^{11}(5 \cdot 24) = 5^{11} \cdot 120 \vdots 120.$$

б) $(3^5 - 3^4)(3^3 + 3^2) = 3^4(3 - 1) \cdot 3^2(3 + 1) = 3^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 4 =$

$$= 3^4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 4 = 3^4 \cdot 3(3 \cdot 2 \cdot 4) = 3^5 \cdot 24 \vdots 24.$$

Утверждения доказаны.

СТОП! Решите самостоятельно.

В3. Докажите, что: а) $(2^{10} + 2^8)(2^5 - 2^3) \vdots 60$; б) $(5^{31} - 5^{29}) \vdots 100$.

В4. Докажите, что: а) $(9^8 + 3^5 + 27^2) \vdots 39$; б) $(4^6 + 8^5 + 2^{10}) \vdots 44$.

Прежде чем перейти к следующим задачам, вспомним некоторые формулы сокращённого умножения.

Формула суммы (разности) кубов:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \qquad (1.1)$$

Формула суммы нечетных степеней:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} =$$
$$= (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n}). \qquad (1.2)$$

Например: $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Формула разности степеней:

$$a^n - b^n =$$
$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (1.3)$$

Например: $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

(Если формулы (1.1) и (1.2) Вам не знакомы, попробуйте их доказать для $n = 5$ простым перемножением.)

Задача 1.7. Докажите, что:

а) $(29^3 + 46^3) \vdots 25$; б) $(5 \cdot 7^{12} - 5) \vdots 30$; в) $(9^{10} + 19^5) \vdots 100$.

***Решение*.**

а) $29^3 + 46^3$. Воспользуемся формулой (1.1) и получим:

$$29^3 + 46^3 = (29 + 46) \cdot (29^2 - 29 \cdot 46 + 46^2) =$$
$$= 75 \cdot (29^2 - 29 \cdot 46 + 46^2) = 25 \cdot [3 \cdot (29^2 - 29 \cdot 46 + 46^2)] \vdots 25.$$

б) $5 \cdot 7^{12} - 5 = 5 \cdot (7^{12} - 1)$. Воспользуемся формулой (1.3):

$$5 \cdot (7^{12} - 1) = 5 \cdot (7 - 1)(7^{11} + 7^{10} \cdot 1 + 7^9 \cdot 1^2 + 7^8 \cdot 1^3 + 7^7 \cdot 1^3 + \ldots + 1) =$$
$$= 5 \cdot 6 \cdot (7^{11} + 7^{10} + \ldots + 7 + 1) = 30 \cdot (7^{11} + 7^{10} + \ldots + 7 + 1) \vdots 30.$$

в) $9^{10} + 19^5 = 9^{2 \cdot 5} + 19^5 = (9^2)^5 + 19^5 = 81^5 + 19^5$. Воспользуемся формулой (1.2) и получим:

$$81^5 + 19^5 = (81 + 19)(81^4 - 81^3 \cdot 19 + 81^2 \cdot 19^2 - 81 \cdot 19^3 + 19^4) =$$
$$= 100 \cdot (81^4 - 81^3 \cdot 19 + 81^2 \cdot 19^2 - 81 \cdot 19^3 + 19^4) \vdots 100.$$

Все утверждения доказаны.

СТОП! Решите самостоятельно.

В5. Докажите, что: а) $(114^3 - 33^3) \vdots 81$; б) $(44^3 + 19^3) \vdots 60$; в) $(79^3 - 29^3) \vdots 50$.

Г1. Докажите, что: а) $(7 \cdot 3^{11} + 7) \vdots 28$; б) $(101^{12} - 64^2) \vdots 99$.

Задача 1.8. Докажите, что число вида $\overline{aaabbbccc}$ делится на 13, если $a + c = b$.

Решение. Представим 9-значное число $\overline{aaabbbccc}$ в следующем виде: $\overline{aaabbbccc} = \overline{ccc} + 1000 \cdot \overline{bbb} + 1000000 \cdot \overline{aaa}$ (например, $111222333 = 333 + 222 \cdot 10^3 + 111 \cdot 10^6$). Поскольку $a + c = b$, то $\overline{bbb} = \overline{aaa} + \overline{ccc}$, тогда наше число примет вид

$$\overline{ccc} + 1000 \cdot (\overline{aaa} + \overline{ccc}) + 1000000 \cdot \overline{aaa} =$$

$$= (\overline{ccc} + 1000 \cdot \overline{ccc}) + (1000 \cdot \overline{aaa} + 1000000 \cdot \overline{aaa}) =$$

$$= \overline{ccc} \cdot (1 + 1000) + 1000 \cdot \overline{aaa} \cdot (1 + 1000) =$$

$$= 1001 \cdot \overline{ccc} + 1001 \cdot 1000 \cdot \overline{aaa} =$$

$$= 1001 \cdot (\overline{ccc} + 1000 \cdot \overline{aaa}).$$

Теперь заметим, что число 1001 можно представить в виде произведения трёх сомножителей: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. С учетом этого наше выражение примет вид

$$13 \cdot [11 \cdot 7 \cdot (\overline{ccc} + 1000 \cdot \overline{aaa})] \vdots 13.$$

Утверждение доказано.

СТОП! Решите самостоятельно.

В6. Докажите, что если к трёхзначному числу приписать справа то же число, то полученное шестизначное число будет кратно 7, 11 и 13.

Г2. Докажите, что «слово» ХАХАХА делится на 7, если буквами Х и А обозначены любые разные цифры. (Например, 121212⋮7).

Г3. Докажите, что трёхзначное число с одинаковыми цифрами делится на 37. (Например, 777⋮37).

Условия делимости разности и суммы двух чисел

Если $a \vdots k$ и $b \vdots k$, то $(a + b) \vdots k$ и $(a - b) \vdots k$. Например, если $a = 400 \vdots 10$, а $b = 200 \vdots 10$, то $a + b = (400 + 200) \vdots 10$, $a - b = (400 - 200) \vdots 10$.

В самом деле: если $a \vdots k$, то a может быть представлено в виде произведения $a = k \cdot c$, где c – некоторое целое число, а если $b \vdots k$, то b может быть представлено в виде произведения $b = k \cdot d$, где d – некоторое целое число. Тогда

$$a + b = k \cdot c + k \cdot d = k \cdot (c + d) \vdots k;$$

$$a - b = k \cdot c - k \cdot d = k \cdot (c - d) \vdots k,$$

что и требовалось доказать.

Задача 1.9. Запишите две пары натуральных чисел a и b, таких, что значение выражения $2a + 11b$ делится на 7.

Решение. Заметим, что $2 \cdot a \vdots 7$, если $a \vdots 7$, т.е. $a = 7 \cdot k$, где k – любое натуральное число, а $11 \cdot b \vdots 7$, если $b \vdots 7$, т.е. $b = 7 \cdot l$, где l – любое натуральное число. Нам необходимо, чтобы каждое из слагаемых $2a$ и $11b$ делилось на 7.

Возьмём:

1) $a = 7 \cdot 1 = 7 \vdots 7$ и $b = 7 \cdot 2 = 14 \vdots 7$;

2) $a = 7 \cdot 10 = 70 \vdots 7$ и $b = 7 \cdot 20 = 140 \vdots 7$.

Получим:

1) $2a + 11b = (2 \cdot 7 + 11 \cdot 7) = 7 \cdot (2 + 11) \vdots 7$;

2) $2a + 11b = (2 \cdot 70 + 11 \cdot 70) = 7 \cdot (2 \cdot 10 + 11 \cdot 10) \vdots 7$.

Ответ: 1) $a = 7$, $b = 14$; 2) $a = 70$, $b = 140$.

Ясно, что эта задача имеет бесконечно много решений.

СТОП! Решите самостоятельно.

А5. Подберите по три значения n, чтобы: а) $(120 - n) \vdots 2$; б) $(240 + 3n) \vdots 5$; в) $(1000 - 25n) \vdots 10$.

Б8. Запишите две пары натуральных чисел x и y, при которых значение выражения $5x + 6y$ делится: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 10; д) на 9; е) на 25.

Задача 1.10. Докажите, что:

а) $(1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100) \vdots 101$;

б) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 198^3 + 199^3) \vdots 200$.

Решение.

а) Разобьем нашу сумму на пары: $(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + + \ldots + (50 + 51)$. Выражение в каждой скобке равно 101, а всего таких выражений 50. Следовательно, это выражение равно $101 \cdot 50$, а значит, $101 \cdot 50 \vdots 101$, что и требовалось доказать.

б) Эта сумма включает 199 слагаемых:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 98^3 + 99^3 + 100^3 + 101^3 + 102^3 + \ldots + \\ + 197^3 + 198^3 + 199^3).$$

Сгруппируем их следующим образом:

$$(1^3 + 199^3) + (2^3 + 198^3) + (3 + 197^3) + \ldots + (99^3 + 102^3) + \\ + (99^3 + 101^3) + 100^3.$$

У нас получилось 99 пар слагаемых и еще слагаемое 100^3. Покажем, что каждое из слагаемых делится на 200. Для этого воспользуемся формулой суммы кубов:

$$1^3 + 199^3 = (1 + 199) \cdot (1^2 - 1 \cdot 199 + 199^2) = \\ = 200 \cdot (1^2 - 1 \cdot 199 + 199^2) \vdots 200;$$

$$2^3 + 198^3 = (2 + 198) \cdot (2^2 - 2 \cdot 198 + 198^2) = \\ = 200 \cdot (2^2 - 2 \cdot 198 + 198^2) \vdots 200;$$

……………………………………………..

$$99^3 + 101^3 = (99 + 101) \cdot (99^2 - 99 \cdot 101 + 101^2) = \\ = 200 \cdot (99^2 - 99 \cdot 101 + 101^2) \vdots 200.$$

Последнее слагаемое:

$$100^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 100 \cdot (2 \cdot 50) \cdot 100 = 200 \cdot (50 \cdot 100) \vdots 200.$$

Таким образом, каждая из 99 пар слагаемых и ещё одно слагаемое (100^3) делятся на 200, а значит, и вся сумма делится на 200, что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

В7. Докажите, что $(1 + 2 + 3 + \ldots + 2014) \vdots 2015$.

В8. Докажите, что $(1^3 + 2^3 + \ldots + 82^3) \vdots 83$.

Г4. Докажите, что $(1^5 + 2^5 + \ldots + 99^5) \vdots 100$.

Задача 1.11. Докажите, что если $a^2 \vdots (a - b)$, то $b^2 \vdots (a - b)$.

Решение.

1. Составим разность $a^2 - (a^2 - b^2)$. По условию задачи $a^2 \vdots (a - b)$. Покажем, что $(a^2 - b^2) \vdots (a - b)$. В самом деле:

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b) \vdots (a - b).$$

2. Если уменьшаемое a^2 делится на $(a - b)$ и вычитаемое $(a^2 - b^2)$ делится на $(a - b)$, то и разность $a^2 - (a^2 - b^2)$ делится на $(a - b)$. Но если мы упростим нашу разность, получим:

$a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 - a^2 + b^2 = b^2$. А значит, $b^2 \vdots (a - b)$, что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б9. a, b и k – целые числа: $a + b$ и ab делятся на k. Докажите, что: а) $a^2 - b^2$ делится на k; б) $a^2 + b^2$ делится на k; в) $a^3 + b^3$ делится на k^2.

В9. Докажите, что если $a^2 + ab + b^2$ делится на $a + b$, то $a^4 + b^4$ делится на $(a + b)^2$.

Г5. Вася считает, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ также делится на $a - c$. Прав ли он?

Задача 1.12. Докажите, что выражение $(\overline{abbb} - a) \vdots 37$, где a – любая цифра, кроме 0, а b – любая цифра.

Решение. Заметим, что $111 = 37 \cdot 3$.

$\overline{abbb} = a \cdot 1000 + \overline{bbb} = a \cdot 1000 + b \cdot 111$.

Например, $2333 = 2000 + 333 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 111$.

$$\overline{abbb} - a = (a \cdot 1000 + b \cdot 111) - a = a(1000 - 1) + b \cdot 111 =$$
$$= a \cdot 999 + b \cdot 111 = a \cdot 9 \cdot 111 + b \cdot 111 =$$
$$= 111 \cdot (a \cdot 9 + b) = 37 \cdot 3 \cdot (a \cdot 9 + b) \vdots 37,$$

что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б10. Докажите, что число, состоящее из четного числа одинаковых цифр, делится на 11.

В10. Докажите, что число $\underbrace{222222...222}_{3n \text{ цифр}}$ делится на 37.

Г6. Докажите, что если есть два трёхзначных числа, каждое из которых не делится на 37, но их сумма делится на 37, то шестизначное число, составленное из двух этих чисел, делится на 37.

Например, 170 не делится на 37 и 200 не делится на 37, но их сумма 170+200=370 делится на 37, тогда и число 170200$\vdots$37.

Когда сумма и разность двух чисел *не делится* на целое число

Автор: Мы выяснили, что если $a \vdots k$ и $b \vdots k$, то $(a + b) \vdots k$ и $(a - b) \vdots k$. Как Вы считаете, будет ли делиться на k сумма $a + b$ и разность $a - b$, если $a \vdots k$, а $b \not\vdots\, k$?

Читатель: По-моему, нет. Если $b \not\vdots\, k$, то дробь $\dfrac{b}{k}$ не может быть целым числом. В то же время, поскольку $a \vdots c$, $a = k \cdot c$, где c – целое число. Рассмотрим дробь $\dfrac{a+b}{k} = \dfrac{k \cdot c + b}{k} = \dfrac{k \cdot c}{k} + \dfrac{b}{k} = c + \dfrac{b}{k}$ – дробное число. Значит, $(a+b) \not\vdots\, k$. Для разности $a - b$ рассуждения аналогичны.

Автор: Верно! Приведём ещё одно доказательство того же факта.

Рассмотрим равенство $(a + b) - a = b$. По условию $a \vdots k$, а $b \not\vdots\, k$. Предположим, что $(a + b) \vdots k$, но тогда должно выполняться условие $b \vdots k$. Однако по условию $b \not\vdots\, k$. Значит, неверно, что $(a + b) \vdots k$, то есть $(a+b) \not\vdots\, k$, что и требовалось доказать.

Автор: Как Вы считаете, будет ли делиться на k сумма $(a + b)$ и разность $(a - b)$, если $a \not\vdots\, k$ и $b \not\vdots\, k$?

Читатель: Нет, конечно! Ведь если $a \vdots k$, а $b \not\vdots\, k$, то ни сумма, ни разность на k не делится. А если ещё и $a \not\vdots\, k$, то и подавно ни сумма, ни разность на k делиться не будет!

Автор: А вот тут Вы поспешили с выводами! В математике любое утверждение надо *доказывать*, а Вы положились «на здравый смысл», который в данном случае не сработал.

Рассмотрим числа $a = 6 \not\vdots\, 5$ и $b = 3 \not\vdots\, 5$. Их сумма $a + b = 6 + 3 = 9 \not\vdots\, 5$, разность $a - b = 6 - 3 = 3 \not\vdots\, 5$. Всё, как Вы сказали. Возьмём другие числа: $a = 6 \not\vdots\, 5$ и $b = 4 \not\vdots\, 5$. Тогда $a + b = 6 + 4 = 10 \,\vdots\, 5$! Как видите, конкретный пример опроверг Ваше утверждение.

Ещё пример: $a = 3 \not\vdots\, 2$ и $b = 1 \not\vdots\, 2$. Их сумма $a + b = 3 + 1 = 4 \,\vdots\, 2$, и разность $a - b = 3 - 1 = 2 \,\vdots\, 2$!

Читатель: Получается, что если $a \not\vdots\, k$ и $b \not\vdots\, k$, то про делимость на k выражений $(a + b)$ и $(a - b)$ вообще ничего невозможно сказать?

Автор: Именно так! Но можно утверждать, что если $(a + b) \,\vdots\, k$ или $(a - b) \,\vdots\, k$, то либо $a \,\vdots\, k$ и $b \,\vdots\, k$, либо $a \not\vdots\, k$ и $b \not\vdots\, k$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А6. Подтвердите примерами следующее свойство суммы: а) если каждое слагаемое кратно числу a, то и сумма кратна числу a; б) если только одно слагаемое суммы не кратно числу a, то сумма не кратна числу a.

Б11. Определите, какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

а) если одно слагаемое делится на 6, а другое не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

в) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то хотя бы одно из них делится на 6;

г) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то каждое слагаемое не делится на 6.

В11. Подберите примеры, подтверждающие утверждения:

а) если ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делятся на некоторое число, то разность на это число не делится;

б) если разность двух чисел делится на некоторое число, то и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на это число.

Задача 1.13. Не выполняя деления, выясните, делится ли: а) 81 + 72 на 9; б) 1110 – 900 на 10; в) 81 624 321 на 8.

***Решение*.**

а) $81 \vdots 9$ и $72 \vdots 9 \rightarrow (81 + 72) \vdots 9$.

б) $1110 \vdots 10$ и $900 \vdots 10 \rightarrow (1110 - 900) \vdots 10$.

в) $81\,624\,321 = 80\,000\,000 + 1\,600\,000 + 24000 + 320 + 1 =$
$$= 8 \cdot 10^7 + 16 \cdot 10^5 + 24 \cdot 10^3 + 32 \cdot 10 + 1.$$

Очевидно, что $8 \cdot 10^7 \vdots 8$, $16 \cdot 10^5 \vdots 8$, $24 \cdot 10^3 \vdots 8$, $32 \cdot 10 \vdots 8$, $1 \not\vdots 8$. Тогда $(8 \cdot 10^7 + 16 \cdot 10^5 + 24 \cdot 10^3 + 32 \cdot 10) \vdots 8$, а всё число можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых делится на 8, а другое – не делится на 8:
$$[(8 \cdot 10^7 + 16 \cdot 10^5 + 24 \cdot 10^3 + 32 \cdot 10) + 1] \not\vdots 8.$$

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б12. Определите, какие из следующих сумм делятся на 7:

а) 14 + 28;	г) 8 + 1;	ж) 7 + 25;
б) 56 + 700;	д) 16 + 5;	з) 39 + 35;
в) 630 + 49;	е) 50 + 41;	и) 68 + 777.

По какому признаку эти выражения распределены по трём столбцам?

В12. Используя признаки делимости суммы и разности, определите, делится ли: а) 27 + 15 на 3; б) 555 – 200 на 5; в) 71 421 283 546 на 7; г) 193 876 149 на 19.

Задача 1.14. Известно, что каждое из целых чисел a и b не делится на 7, а их сумма делится на 7. Делится ли на 7 число: а) $2a + b$; б) $a - b$?

***Решение*.**

а) $2a + b = a + (a + b)$. По условию $(a + b) \vdots 7$, $a \not\vdots 7$, значит, сумма $a + (a + b) = (2a + b) \not\vdots 7$.

б) $a - b = (a + b) - 2b$. По условию $(a + b) \vdots 7$ и $b \not\vdots 7$.

Поскольку $2 \not\vdots 7$, то и $2b \not\vdots 7$, тогда $(a - b) \not\vdots 7$.

Ответ: а) нет; б) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

А7. Укажите несколько таких натуральных значений m, чтобы сумма $28 + m$: а) делилась на 2; б) не делилась на 3; в) делилась на 7; г) не делилась на 7.

Б13. Число a делится на 9. Определите выражения, значения которых делятся на 9: а) $a + 180$; б) $999 - a$; в) $27\cdot63a$; г) $5a + 61$; д) $9a + 18$.

Признаки делимости на 2, 4, 5 и 10

Автор: Возьмём некоторое натуральное число a. Подумаем, можно ли, не выполняя деления, узнать, делится ли это число на 2, 4, 5, 10.

Читатель: По-моему, можно:

1) если последняя цифра числа делится на 2, то и всё число делится на 2 (например: 2<u>0</u>, 10<u>2</u>, 22<u>4</u>, 111<u>6</u>, 277<u>8</u> и т.д.);

2) если число, составленное из двух последних цифр данного числа, делится на 4, то и всё число делится на 4 (например: 2<u>00</u>, 11<u>04</u>, 13<u>08</u>, 26<u>44</u>);

3) если число оканчивается на 0 или 5, то оно делится на 5 (например: 119988<u>5</u>, 998<u>0</u>);

4) если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10 (например, 9<u>0</u>, 1199<u>0</u>, 10000<u>0</u>).

Автор: Вы совершенно правильно сформулировали признаки делимости на 2, 4, 5 и 10. А теперь давайте попробуем *доказать* эти признаки делимости.

Пусть дано некоторое многозначное число $A = \overline{abcdef\ldots xyz}$. Представим его в виде

$$\overline{abcdef\ldots xy}\cdot 10 + z = \overline{abcdef\ldots xy}\cdot 2\cdot 5 + z$$

Например,

$9876543 = 9876540 + 3 = 987654\cdot10 + 3 = 987654\cdot(2\cdot5)+3$

У нас получилась сумма двух слагаемых, из которых первое [$abcdf\ldots xy\cdot2\cdot5$] делится и на 2, и на 5 и на 10. Значит, чтобы сумма делилась на 2, 5 и 10 соответственно, необходимо, чтобы последняя цифра z делилась на 2, 5 и 10. Следовательно:

если $z \vdots 2$ (то есть z = 0, 2, 4, 6, 8) $\rightarrow A \vdots 2$;

если $z \vdots 5$ (то есть $z = 0$ или $z = 5$) $\rightarrow A \vdots 5$;

если $z \vdots 10$ (то есть $z = 0$) $\rightarrow A \vdots 10$.

Признаки делимости на 2, 5 и 10 мы доказали. Попробуем доказать признак делимости на 4.

Читатель: Я думаю, что в этом случае наше число $A =$ $= \overline{abcdef...xyz}$ надо представить так: $A = \overline{abcdef...x} \cdot 100 + \overline{yz}$ (например: 123456 = 1234·100 + 56). Ясно, что 100 = 4·25, тогда число

$$\overline{abcdef...x} \cdot 100 = \overline{abcdef...x} \cdot 4 \cdot 25 = 4 \cdot (\overline{abcdef...x} \cdot 25)$$

делится на 4. Значит, для того чтобы $A \vdots 4$, необходимо, чтобы $\overline{yz} \vdots 4$. Признак делимости на 4 доказан.

Автор: А не могли бы Вы заодно сформулировать признак делимости на 25.

Читатель: Легко! Поскольку $\overline{abcdef...x} \cdot 4 \cdot 25 \vdots 25$, то чтобы $A \vdots 25$, необходимо, чтобы $\overline{yz} \vdots 25$, то есть число, состоящее из двух последних цифр числа A, делилось на 25.

Автор: Совершенно верно.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б14. Сформулируйте признаки делимости на 100 и на 1000.

В13. Используя тот факт, что 1000 делится на 8, сформулируйте и докажите признак делимости на 8.

В14. Придумайте и докажите признак делимости на 125.

Задача 1.15. Можно ли, используя только цифры 3 и 4, записать число: а) которое делится на 10; б) чётное; в) кратное 5; г) нечётное?

***Решение*.**

а) Число, которое делится на 10, должно оканчиваться нулем, а в нашем распоряжении только 3 и 4, значит, ничего не выйдет.

б) Можно записать чётное число 34, так как 4 ⋮ 2.

в) Число, которое делится на 5, должно оканчиваться на 5 или 0, а у нас есть только 3 и 4, значит, ничего не выйдет.

г) Можно записать нечётное число 43, так как $3 \not\vdots\, 2$, и значит, $43 \not\vdots\, 2$.

Ответ: а), г) да; б), в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

А8. Даны числа: 45 456, 454 545, 450, 40 005, 50 000 008, 556, 5 004 050. Укажите числа, которые делятся: а) на 2; б) на 5; в) на 10.

А9. Даны числа 888, 6100, 4502, 70662, 21824, 3526, 607090. Укажите числа, которые делятся на 4.

Б15. Какие числа, кратные 5, удовлетворяют неравенству:

а) $64 < x < 78$; б) $405 < x < 450$; в) $24 < y < 49$; г) $1 < y < 30$?

Б16. Можно ли, используя только цифры 2 и 5, записать число: а) чётное; б) нечётное; в) кратное 5; г) чётное и кратное 5?

Б17. Используя лишь цифры 0, 2, 5, напишите все трёхзначные числа, которые делятся: а) на 2; б) на 5. (Цифры не повторяются.)

В15. Сколько существует двузначных чисел, которые: а) делятся на 2; б) делятся на 5; в) не делятся ни на 2, ни на 5?

В16. Запишите наименьшее натуральное число, кратное 25 и имеющее при этом сумму цифр, равную 25.

Задача 1.16. Определите, делятся ли: а) 1199 + 9917 на 2; б) 9904 + 9917 на 4; в) 1734857 на 17.

Решение.

а) $1199 \not\vdots\, 2$ и $9917 \not\vdots\, 2$, поэтому их сумма может делиться на 2, а может и не делиться. Заметим, что сумма последних цифр чисел 9 + 7 = 16, значит, последняя цифра суммы 1199 + + 9917 – чётное число 6, следовательно, $(1199 + 9917) \vdots\, 2$.

б) число 9904 оканчивается на 04, 4 ⋮ 4, значит, 9904 ⋮ 4; число 9917 оканчивается на 17, $17 \not\vdots\, 4$, значит, $9917 \not\vdots\, 4$.

Следовательно, сумма $(9904 + 9917) \not\vdots\, 4$.

в) Заметим, что 34 = 17·2, а 85 = 17·5, и представим наше число в виде суммы:

$$1734857 = 1700000 + 34000 + 850 + 7 =$$
$$= 17 \cdot 100000 + 34 \cdot 1000 + 85 \cdot 10 + 7 =$$
$$= 17 \cdot 100000 + 17 \cdot (2 \cdot 1000) + 17 \cdot (5 \cdot 10) + 7 =$$
$$= 17 \cdot (100000 + 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 10) + 7.$$

Мы получили сумму двух слагаемых, одно из которых $[17 \cdot (100000 + 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 10)]$ делится на 17, а второе (7) – не делится. Значит, и сумма не делится на 17.

Ответ: а) да; б) нет; в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

А10. Как быстро узнать, делятся ли на 2:

а) суммы 37843 + 54321; 48345 + 75634; 37244 + 52480;

б) разности 87338 – 56893; 153847 – 112353; 84537 – 26237?

Б18. Найдите два значения x, при которых значение выражения:

а) $x - 25$ делится на 25; г) $5x$ делится на 7;

б) $312 + x$ делится на 4; д) $5618 + x$ делится на 10;

в) $213x$ делится на 9; е) $543 - x$ делится на 2, но не делится на 5.

В17. Представьте число в виде суммы или разности натуральных чисел так, чтобы без дополнительных вычислений определить:

1) делится ли число 131311: а) на 2; б) на 13;
2) делится ли число 181819: а) на 2; б) на 18;
3) делится ли число 14285612: а) на 2; б) на 14; в) на 7;
4) делится ли число 22066089: а) на 2; б) на 22; в) на 11.

Признаки делимости на 3 и 9

Автор: Заметим, что сформулировать признаки делимости на 3 и 9 таким же образом, как это мы сделали только что при доказательстве признаков делимости на 2, 4, 5, 10, 25, не удастся. То есть если мы представим число в виде $a \cdot 10 + b$, то доказать, что число $a \cdot 10$ делится на 3 или на 9 не удастся! Поэтому делимость на 3 и 9 последней цифры числа ничего не решит.

Ограничимся тем, что рассмотрим пятизначное число $\overline{abcde}$ и выясним, при каком условии оно будет делиться на 3 и 9:

$$\overline{abcde} = a\cdot 10000 + b\cdot 1000 + c\cdot 100 + d\cdot 10 + e =$$
$$= a(9999+1) + b(999+1) + c(99+1) + d(9+1) + e =$$
$$= a\cdot 9999 + b\cdot 999 + c\cdot 99 + d\cdot 9 + (a+b+c+d+e) =$$
$$= 9\cdot(a\cdot 1111 + b\cdot 111 + c\cdot 11 + d) + (a+b+c+d+e).$$

Мы получили сумму двух слагаемых. Очевидно, что одно слагаемое $9\cdot(a\cdot 1111+b\cdot 111+c\cdot 11+d)$ делится на 3 и на 9, а второе слагаемое $(a+b+c+d+e)$ – это сумма цифр нашего числа. Если оно делится на 3, то и все число делится на 3. Если оно делится на 9, то и все число делится на 9.

Теперь без большого труда можно обобщить наш результат на число с любым количеством цифр. При желании Вы можете сделать это самостоятельно.

Итак, запомним ***признаки делимости на 3 и 9*:**

• *если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и все число делится на 3;*

• *если сумма цифр натурального числа делится на 9, то и все число делится на 9.*

Задача 1.17. Выпишите из чисел: 1) 21 112 221; 2) 44 856; 3) 555444, 4) 757575 те, которые: а) кратны 3; б) кратны 9; в) делятся без остатка на 3 и 5; г) кратны 9 и 2.

Решение. Сначала найдем суммы цифр каждого числа:

1) 2+1+1+1+2+2+2+1 = 12; 2) 4+4+8+5+6 = 27;

3) 5+5+5+4+4+4 = 27; 4) 7+5+7+5+7+5 = 36.

Теперь можно ответить на вопросы задачи:

а) кратны 3 (то есть делятся на 3) все четыре числа, так как $12 \vdots 3$, $27 \vdots 3$, $36 \vdots 3$;

б) кратны 9 второе, третье и четвёртое число, так как $27 \vdots 9$; $36 \vdots 9$, а $12 \not\vdots\, 9$;

в) делится без остатка на 3 и 5 только четвёртое число, так как его сумма цифр $27 \vdots 3$ и оно заканчивается на 5;

г) кратны 9 и 2 второе и третье числа, так как их сумма цифр делится на 9 и последние цифры (6 и 4) чётные.

Ответ: а) все; б) второе, третье и четвёртое; в) четвёртое; г) второе и третье.

СТОП! Решите самостоятельно.

А11. Любое ли число, которое оканчивается цифрой 3, делится на 3?

Б19. Даны числа: 1) 75432; 2) 2772825; 3) 402075. Какие из них делятся на 3? Какие из них делятся на 9?

Б20. Даны числа: 1) 18181836; 2) 26271; 3) 5000415; 4) 111111; 5) 10301220; 6) 65730. Укажите те числа, которые кратны: а) 3; б) 9; в) и 3, и 5; г) и 4, и 9.

В18. Даны числа: 1) 215738; 2) 3289775; 3) 21112221; 4) 44856; 5) 554544; 6) 775575; 7) 835743. Укажите те числа, которые: а) кратны 3, б) кратны 9; в) делятся без остатка на 5 и 3; г) кратны 9 и 2.

Задача 1.18. В числе 5040703 вместо нулей поставьте такие одинаковые цифры, чтобы полученное число было кратно 9.

Решение. В числе 5040703 сумма цифр равна 5 + 4 + 7 + 3 = = 21, $21 \not\vdots\, 9$. Ближайшее число, которое делится на 9 – это 27, так как 27 – 21 = 6, то вместо трёх нулей мы можем поставить три одинаковые цифры, которые в сумме дают 6: 2 + 2 + 2 = 6. Таким образом, получили число 5242723.

Единственный ли это ответ?

Рассмотрим следующее ближайшее число, делящееся на 9, – это 36. 36 – 21 = 15, 15 = 5 + 5 + 5. Значит, есть ещё ответ $5545753 \,\vdots\, 9$. Следующее ближайшее число, делящееся на 9, – это 45. 45 – 21 = 24, 24 = 8 + 8 + 8. Значит, есть ещё ответ $5848783 \,\vdots\, 9$.

Ответ: 5242723, 5545753, 5848783.

СТОП! Решите самостоятельно.

А12. Напишите четырёхзначное число, которое делилось бы и на 9, и на 4.

Б21. В записи*723, 5*36, 111* вместо звёздочек поставьте такие цифры, чтобы получившиеся числа делились на 9.

Б22. Определите, какую цифру надо приписать к числу 10 слева и справа, чтобы получилось четырёхзначное число, делящееся: а) на 9; б) на 3.

В19. Укажите трёхзначное число: а) первая цифра которого 2 и оно делится на 9 и на 5, но не делится на 2; б) первая цифра которого 6 и оно делится на 2, на 5 и на 9.

Делимость на 11

Сначала заметим, что на 11 делятся все двузначные числа, состоящие из одинаковых цифр: 22, 33, 44, …, 99. В общем виде их можно записать как $\overline{aa} = 11 \cdot a$, например: 33 = 11·3.

На 11 также делятся все числа, состоящие из чётного количества одинаковых цифр: 3333, 555555, 99999999 и т.д. В общем виде их можно записать так: $\underbrace{\overline{aaa...a}}_{2n\text{ цифр}}$.

Ещё на 11 делятся числа вида 1001, 100001, 10000001 и т.д., то есть числа вида $\underbrace{\overline{100...01}}_{2n\text{ цифр}} = 10^{2n} + 1$. Деление на 11 чисел: 111001 и 100001 можно просто проверить:

(1001 : 11 = 91, 100001 : 11 = 9091),

а общий случай попробуйте доказать самостоятельно (подсказка: 1001 + 9999 = 11000; 100001 + 999999 = 1100000 и т.д.).

Теперь выясним, при каком условии шестизначное число $\overline{abcdef}$ делится на 11. (Мы здесь ограничимся частным случаем для краткости вычислений, но при желании Вы можете обобщить наши выводы на числа с любым количеством цифр, зная, что $(10^{2n} + 1) \vdots 11$.) Итак,

$$\overline{abcdef} = a \cdot 100000 + b \cdot 10000 + c \cdot 1000 + d \cdot 100 + e \cdot 10 + f =$$
$$= a(100001 - 1) + b \cdot (999 + 1) + c \cdot (1001 - 1) + d \cdot (99 + 1) +$$
$$+ e \cdot (11 - 1) + f =$$

$$= (a \cdot 100001 + b \cdot 9999 + c \cdot 1001 + d \cdot 99 + e \cdot 11) +$$
$$+(-a + b - c + d - e + f).$$

Поскольку 100001 $\vdots$ 11, 9999 $\vdots$ 11, 1001 $\vdots$ 11, 99 $\vdots$ 11, 11 $\vdots$ 11, то и всё выражение $(a \cdot 100001 + b \cdot 9999 + c \cdot 1001 + d \cdot 99 + e \cdot 11)$ делится на 11. Следовательно, чтобы все наше число $\overline{abcdef}$ делилось на 11, необходимо, чтобы на 11 делилось и выражение $(-a + b - c + d - e + f)$.

Выражение $-a + b - c + d - e + f$ называется *знакопеременной суммой цифр*, так как перед цифрами *a*, *c* и *e* стоит знак минус, а перед цифрами *b*, *d* и *f* – знак плюс: $\overset{-+-+-+}{\overline{abcdef}}$. Таким образом, ***признак делимости на 11*** звучит так:

Число делится на 11, если его знакопеременная сумма цифр делится на 11.

Задача 1.18. Определите, делится ли на 11 число: а) 363; б) 9394; в) 808181.

Решение. В каждом случае составляем знакопеременную сумму цифр и проверяем, делится ли она на 11:

а) $\overset{+-+}{\overline{363}} \rightarrow 3 - 6 + 3 = 0 \vdots 11 \rightarrow 363 \vdots 11;$

б) $\overset{-+-+}{\overline{9394}} \rightarrow -9 + 3 - 9 + 4 = -11 \vdots 11 \rightarrow 9394 \vdots 11;$

в) $\overset{-+-+-+}{\overline{808181}} \rightarrow -8 + 0 - 8 + 1 - 8 + 1 = -22 \vdots 11 \rightarrow 808181 \vdots 11.$

Ответ: все числа делятся на 11.

СТОП! Решите самостоятельно.

А13. Не выполняя деления, назовите числа, делящиеся на 11: 246 915 658, 371 846 205, 865 914 324 015.

Б23. В числе 4758967* напишите последнюю цифру, такую, чтобы число делилось на 11.

В20. Пусть $\overline{ab}$ – двузначное число, в котором сумма цифр $a + b < 10$. Докажите, что число $\overline{acb}$, где $c = a + b$, кратно 11.

Разложение на простые множители

Как мы уже знаем, все натуральные числа делятся на простые и составные. Простые числа делятся только на единицу и самих себя, а составные имеют и другие делители. Так, 7 – простое число (7 делится без остатка только на 1 и 7), 6 – составное число, которое делится на 1, 2, 3 и 6.

Всякое составное число можно представить в виде произведения простых сомножителей (разложить на простые множители). Например: $6 = 2\cdot3$, $8 = 2\cdot2\cdot2$, $26 = 2\cdot13$, $30 = 2\cdot3\cdot5$ и т.д.

Можно доказать (мы этого пока делать не будем), что всякое число можно разложить на простые множители *единственным образом*. То есть если $a = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ – некоторые простые числа, то невозможно представить a в виде произведения $a = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$, где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ – некоторые другие простые числа.

Задача 1.19. Разложите на простые множители числа: а) 24; б) 36; в) 169; г) 1155.

***Решение*.**

а) Разложим на множители число 24 с помощью деления. Делимые записываем слева от вертикальной черты, а делители – справа:

1) $24 : 2 = 12$,
2) $12 : 2 = 6$,
3) $6 : 2 = 3$,
4) $3 : 3 = 1$.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Теперь осталось только записать результат:

$$24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3.$$

б) Аналогично разлагаем на множители число 36.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \end{array}$$

Записываем результат:

$$36 = 2\cdot2\cdot3\cdot3.$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

в) 169 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11. Зато 169 : 13 = 13.

Записываем результат:

$$169 = 13\cdot13.$$

$$\begin{array}{r|l} 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

г) Делить 1155 удобно начинать с 11 (так как 1155 ⋮ 11).

Записываем результат:

$$1155 = 11\cdot5\cdot3\cdot7.$$

$$\begin{array}{r|l} 1155 & 11 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ответ: а) 24 = 2·2·2·3; б) 36 = 2·2·3·3; в) 169 = 13·13;
г) 1155 = 11·5·3·7.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б24. Разложите на простые множители: а) 22; б) 124; в) 160; г) 324; д) 999.

Взаимно простые числа

Числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют ни одного простого общего множителя.

Например: 4 = 2·2, 9 = 3·3 – общих простых множителей нет, значит, 4 и 9 – взаимно простые числа, хотя каждое из них составное. У чисел 8 = 2·2·2 и 15 = 3·5 общих простых множителей тоже нет, значит, 8 и 15 – взаимно простые. А вот 38 и 2002 не являются взаимно простыми, так как 38 = ***2***·19, 2002 = ***2***·7·11·13, то есть они имеют один общий простой множитель 2.

Задача 1.20. Определите, какие из представленных чисел являются взаимно простыми: а) 2 и 3; б) 2 и 4; в) 22 и 77; г) 111 и 33; д) 22 и 21; е) 121 и 111.

Решение.

а) 2 и 3 – простые числа, а два любых простых числа, не равных друг другу, обязательно являются *взаимно простыми*, так как у них не может быть общих множителей, кроме единицы.

б) 2 и 4. Число 2 – простое, $2 = \underline{2}\cdot 1$, а $4 = \underline{2}\cdot 2$. Есть общий простой множитель 2, значит, числа 2 и 4 **не** взаимно простые.

в) $22 = 2\cdot\underline{11}$, $77 = 7\cdot\underline{11}$. Есть общий простой множитель 11, значит, числа 22 и 77 **не** взаимно простые.

г) $111 = \underline{3}\cdot 37$, $33 = \underline{3}\cdot 11$. Есть общий простой множитель 3, значит, числа 111 и 33 **не** взаимно простые.

д) $22 = 2\cdot 11$, $21 = 3\cdot 7$. Нет общих простых множителей, значит, числа 22 и 21 взаимно простые.

е) $121 = 11\cdot 11$, $111 = 3\cdot 37$. Нет общих множителей, значит, числа 121 и 111 взаимно простые.

Ответ: взаимно простые числа 2 и 3, 22 и 21, 121 и 111.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б25. Определите, какие из чисел являются взаимно простыми: а) 21 и 31; б) 31 и 62; в) 111 и 37; г) 19 и 23; д) 225 и 105; е) 64 и 81.

Признак делимости на составное число

Если составное число a можно представить в виде произведения двух *взаимно простых* чисел b и c: $a = b\cdot c$, то для того чтобы число A делилось на число a, необходимо, чтобы $A \vdots b$ и $A \vdots c$.

Например, составное число 12 представимо в виде произведения двух взаимно простых чисел: $12 = 4\cdot 3$. Следовательно, для того, чтобы число 144 делилось на 12, необходимо, чтобы $144 \vdots 3$ и $144 \vdots 4$.

Приведём доказательство признака делимости на составное число.

Даны числа: A, b и c, такие, что: $A \vdots b$ и $A \vdots c$, где b и c – *взаимно простые* числа. Докажем, что $A \vdots a$, где $a = b \cdot c$.

Пусть $b = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ – простые множители, $c = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n$, где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – простые множители. А так как b и c взаимно простые числа, то среди чисел $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ нет ни одного числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Тогда

$$b \cdot c = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_n.$$

По условию $A \vdots b$ и $A \vdots c$, следовательно:

$$\frac{A}{b} = \frac{A}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n} = \text{целое число},$$

$$\frac{A}{c} = \frac{A}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n} = \text{целое число}.$$

Таким образом, в разложении числа a на простые множители должны присутствовать все простые множители чисел b и c, то есть

$$A = k \cdot (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n) \cdot (\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n) = k \cdot (b \cdot c) \rightarrow A \vdots (bc) \rightarrow A \vdots a.$$

Приведём пример. Число $a = 90$ можно представить в виде произведения двух взаимно простых множителей $b = 9$ и $c =$ $= 10$, тогда $a = bc = 9 \cdot 10 = 90$. Покажем, что число $A = 270$ делится на $a = 90$.

$A \vdots b$ $(270 \vdots 9)$; $A \vdots c$ $(270 \vdots 10)$, значит, $A \vdots (bc)$, т.е. $270 \vdots 90$. Действительно, $270 : 90 = 3$.

А вот другой пример: $24 = 6 \cdot 4$, числа 6 и 4 не являются взаимно простыми, $12 \vdots 6$ и $12 \vdots 4$, но $12 \not\vdots (6 \cdot 4)$, то есть, вообще говоря, из того, что число A делится на b и на c не следует, что оно делится на произведение этих чисел (bc).

Читатель: А если $A \vdots b$, но $A \not\vdots c$, можно ли утверждать, что $A \not\vdots (bc)$?

Автор: Можно. Если $A \not\vdots c$, значит, в разложении c на множители есть хотя бы один простой множитель, на который A не делится, то есть дробь $\dfrac{A}{b \cdot c}$ не может быть целым числом.

Задача 1.21. Сформулируйте признак делимости на 36.

Решение. 36 = 9·4; 9 и 4 – взаимно простые числа. Для того чтобы $A \vdots 36$, необходимо, чтобы $A \vdots 9$ и $A \vdots 4$. Теперь сформулируем признак делимости на 36: чтобы число A делилось на 36, необходимо, чтобы сумма его цифр делилась на 9 и число, составленное из двух последних цифр делилось на 4.

СТОП! Решите самостоятельно.

В21. Сформулируйте признаки делимости: а) на 6; б) на 12; в) на 15; г) на 99.

Задача 1.22. Определите, делятся ли на 99 числа: а) 121968; б) 1106424; в) $\underbrace{11...1}_{27\text{ раз}}$.

Решение. 99 = 11·9, 11 и 9 – взаимно простые числа, значит, нам требуется проверить, делится ли каждое из приведённых чисел и на 9, и на 11.

а) $\overset{-+-+-+}{121968}$, знакопеременная сумма цифр числа 121968 равна:

$$-1+2-1+9-6+8 = 11 \vdots 11 \rightarrow 121968 \vdots 11;$$

сумма цифр числа 121968 равна:

$$1+2+1+9+6+8 = 27 \vdots 9 \rightarrow 121968 \vdots 9.$$

Значит, $121968 \vdots 99$.

б) $\overset{-+-+-+}{106424}$, знакопеременная сумма цифр

$$-1+0-6+4-2+4 = -1 \not\vdots\, 11 \rightarrow 106424 \not\vdots\, 11,$$

значит, делимость на 9 можно даже не проверять,

Итак, $106424 \not\vdots\, 99$.

в) $\underbrace{11...1}_{27 \text{ раз}}$. Составим знакопеременную сумму: $\overset{+-}{\underset{27\,26}{11}}...\overset{-+}{\underset{2\,1}{11}}$,

цифры, стоящие на нечётных местах, берём со знаком плюс, а на нечётных – со знаком минус. Тогда

$$\underbrace{1+1+...+1}_{14 \text{ единиц}}-\underbrace{1-1-...-1}_{13 \text{ единиц}}=1\not\vdots\,11.$$

Значит, $\underbrace{11...1}_{27 \text{ раз}}\not\vdots\,11$.

Ответ: только 121968⋮99.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б26. Определите, какие числа делятся на нацело на 15: а) 3572; б) 81375; в) 158457; г) 237538; д) 67932; е) 2487960.

В22. Определите, делится ли число $\underbrace{44...4}_{30 \text{ раз}}$: а) на 4; б) на 3; в) на 9; г) на 6; д) на 66.

Г7. Определите, какие из данных чисел: 1) 5645112; 2) 963210; 3) 685425; 4) 6786000 делятся: а) на 6; б) на 12; в) на 15; г) на 36.

Задача 1.23. Число 15*a* делится 6. Верно ли, что число *a* делится на 6?

Решение. Попробуем подобрать такое число *a*, что 15*a* ⋮ 6, но $a \not\vdots\, 6$. Возьмем *a* = 2 получим:15*a* = 15·2 = 30 ⋮ 6, но $a = 2 \not\vdots\, 6$. Значит, утверждение:

«Если число 15a делится на 6, то число a делится на 6», вообще говоря, неверно.

Попробуем разобраться, почему? 15 = 5·3. Чтобы 15*a* делилось на 6, достаточно, чтобы в разложении числа *a* на простые множители была бы хотя бы одна двойка: *a* = 2·*k*, тогда 15*a* = 5·3·2·*k* = 6·5·*k* ⋮ 6. А для того чтобы число *a* делилось на 6, оно должно иметь вид a = 6·k=2·3· k, т.е. в его разложении на простые множители должна быть хотя бы одна двойка и ОДНА ТРОЙКА! Поэтому если взять любое четное число *a* , НЕ ДЕЛЯЩЕЕСЯ на 3, например 4, 14, 100 и т.д. , то 15*a* будет делиться 6, но число *a* делиться на 6 не будет.

Ответ: нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

А14. Верно ли, что если натуральное число делится: а) на 4 и на 5, то оно делится на 20; б) на 6 и на 8, то оно делится на 48?

Б27. Определите, верны ли утверждения:

а) если число делится на 3 и 8, то оно делится на 24;

б) если число делится на 4 и 9, то оно делится на 36;

в) если число делится на 4 и 6, то оно делится на 24;

г) если число делится на 15 и 8, то оно делится на 120.

Б28. Определите, верны ли утверждения:

а) если число оканчивается цифрой 6, то оно делится на 6;

б) если число делится на 6, то оно оканчивается цифрой 6.

Может ли:

в) нечётное число делиться на чётное число;

г) чётное число делиться на нечётное?

В23. Придумайте примеры, которые опровергают утверждения:

а) если произведение двух натуральных чисел делится на некоторое число, то хотя бы одно из них делится на это число;

б) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на некоторое число, то и их произведение не делится на это число.

В24. Определите, верно ли утверждение: если произведение нескольких сомножителей делится на 6, то хотя бы один из сомножителей делится на 6.

Задача 1.24. При каких n число $\underbrace{1717...17}_{2n \text{ цифр}}$ делится на 33?

Решение. $33 = 3\cdot 11$, значит, наше число должно делиться на 3 и 11. Начнём с деления на 11. На нечётных местах стоят семёрки, на чётных – единицы. Находим знакопеременную сумму цифр числа:

$$\underbrace{7+7+...+7}_{n \text{ раз}}-\underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ раз}}=7n-n=6n\,.$$

Число $6n$ должно делиться на 11: $6n \,⋮\, 11$.

Теперь найдём сумму цифр нашего числа:

$$\underbrace{7+7+...+7}_{n \text{ раз}}+\underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ раз}}=7n+n=8n\,.$$

Число $8n$ должно делиться на 3: $8n \vdots 3$.

Подберем такое число n, чтобы одновременно выполнялись два равенства: $\begin{cases} 6n = 11k; \\ 8n = 3l. \end{cases}$

Возьмём $n = 33 = 3\cdot 11$, тогда $(6\cdot 33) = 11\cdot(6\cdot 3) \vdots 11$ и $(8\cdot 33) = 3\cdot(8\cdot 11) \vdots 3$. Значит, $n = 33$ удовлетворяет условию задачи. Но можно взять и другое число, кратное 33, например, $33\cdot 2$; $33\cdot 3$, и т.д., то есть $33k$, где $k = 1, 2, 3\ldots$

Ответ: $n = 33k$, где $k = 1, 2, 3\ldots$

СТОП! Решите самостоятельно.

В25. Найдите наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 33.

Г8. Найдите наименьшее число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

Г9. Определите, сколько цифр в числе 11…11, если оно делится без остатка на 999 999 999.

Д1. При каких n число $M = \underbrace{1313...13}_{2n \text{ цифр}}$ делится на 63?

Деление с остатком

Если число a можно записать в виде $a = b\cdot k + r$, где $r < b$, то говорят, что a делится на b с остатком r; k – называется *неполным частным.*

Например: $23 = 5\cdot 4 + 3$, где 23 – делимое, 5 – делитель, 4 неполное частное, 3 – остаток.

Записывается деление с остатком так: $23 : 5 = 4$ (ост. 3).

Заметим, что при делении на 2 остаток может быть равен только 1, так как в этом случае $a = 2k + r$, а $r < 2$. Значит, при делении на 2 возможны только два случая: либо число делится на 2 без остатка, и в этом случае $a = 2k$, либо в остатке получается 1, и $a = 2k + 1$.

Выражение $a = 2k$, где $k = 0, 1, 2\ldots$, ещё называется *формулой чётного числа*, а $a = 2k + 1$, где $k = 0, 1, 2\ldots$, называется *формулой нечётного числа*.

При делении на 3 остаток может быть либо 1, либо 2. Это значит, что любое натуральное число либо делится без остатка на 3 ($a = 3k$), либо делится с остатком 1 ($a = 3k + 1$), либо делится с остатком 2 ($a = 3k + 2$).

В общем случае при делении числа a на число b можно утверждать, что число a можно представить одной из следующих формул:

$$a = b\cdot k \ \ (a \vdots b);$$

$$a = b\cdot k + 1 \text{ (в остатке 1);}$$

$$a = b\cdot k + 2 \text{ (в остатке 2);}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a = b\cdot k + (b - 1) \text{ (в остатке } b - 1\text{).}$$

Задача 1.25. Запишите формулу числа: а) кратного 17; б) дающего при делении на 11 остатки 1; 2; 7.

***Решение*.**

а) Если число a делится на 17, то $a = 17k$, где $k = 0, 1, 2\ldots$

б) Если число a делится на 11 с остатком 1, то $a = 11k + 1$; аналогично: если остаток 2, то $a = 11k + 2$; если остаток 7, то $a = 11k + 7$.

Ответ: а) $a = 17k$; б) $a = 11k + 1$; $a = 11k + 2$; $a = 11k + 7$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А15. Определите, формулами каких чисел являются равенства: а) $a = 7n$; б) $a = 4n$; в) $a = 8n$; г) $a = 17n$.

А16. Запишите формулы чисел, делящихся: а) на 3; б) на 5; в) на 13.

Б29. Два натуральных числа отличаются друг от друга на 1. Можно ли утверждать, что их произведение кратно 2?

Б30. 1) Запишите формулу числа, которое при делении на 5 даёт в остатке: а) 1; б) 2.

2) Каким натуральным числом может оказаться остаток от деления на 5?

Домашнее задание

Задачи очень легкие

А17. Подберите по два значения x и y, чтобы выражение $2x + 3y$ делилось: а) на 7; б) на 13; в) на 100.

А18. Верно ли утверждение: если каждое слагаемое не кратно числу a, то и вся сумма не кратна числу a?

А19. Укажите несколько таких натуральных значений n, чтобы разность $130 - n$: а) делилась на 2; б) не делилась на 2; в) делилась на 13; г) не делилась на 13.

А20. Назовите три числа, которые: а) делятся на 2; б) делятся на 5; в) делятся и на 2, и на 5; г) не делятся ни на 2, ни на 5.

А21. Назовите: а) два чётных числа, кратных 5; б) два нечётных числа, кратных 5; в) два чётных числа, которые не делятся на 5; г) два нечётных числа, которые не делятся на 5.

А22. Любое ли число, делящееся на 5, делится на 10?

А23. Всегда ли запись числа, делящегося на 5, оканчивается цифрой 5?

А24. Какой цифрой оканчивается запись числа, делящегося на 5, если оно: а) чётно; б) нечётно.

Задачи лёгкие

Б31. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 8?

Б32. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 9?

Б33. Разделите рационально на 6 произведения: а) $15 \cdot 18$; б) $94 \cdot 30$; в) $25 \cdot 31$; г) $24 \cdot 5 \cdot 17$; д) $98 \cdot 75 \cdot 34$; е) $64 \cdot 68 \cdot 65$.

Б34. Докажите, что: а) $(94 \cdot 18) \vdots 3$; б) $(13 \cdot 45 \cdot 8) \vdots 3$; в) $(40 \cdot 70) \vdots 5$; г) $(43 \cdot 89 \cdot 15) \vdots 5$; д) $(34 \cdot 27) \vdots 17$; е) $(63 \cdot 28) \vdots 7$.

Б35. Докажите, что значение выражения: а) $16^5 + 16^4$ делится на 17; б) $38^9 - 38^8$ делится на 37; в) $7^{16} + 7^{14}$ делится на 50.

Б36. a, b, k – натуральные числа; $(a - b) \vdots k$. Докажите, что: а) $(a^2 - b^2) \vdots k$; б) $(a^3 - b^3) \vdots k$; в) $(a^4 - b^4) \vdots k$.

Б37. Верны ли утверждения:

а) если сумма натуральных чисел делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число;

б) если одно из двух слагаемых делится на некоторое число, а другое нет, то и вся сумма не делится на это число;

в) если вычитаемое делится на некоторое число, а уменьшаемое – нет, то разность не делится на это число.

Б38. Какие цифры можно поставить вместо звёздочки, чтобы получить число, кратное 5: а) 378*; б) 25*5; в) 4*13?

Б39. В числах: а) 7035*; б) 17209*5; в) 1111*0; г) 73245** замените звёздочки на цифры так, чтобы получились числа, кратные 25.

Б40. Докажите, не выполняя вычислений, что:

а) 23045 + 7980 делится на 5;

б) 16820 – 92700 делится на 10;

в) 57992·4833 делится на 2.

Б41. В числах: а) 45*6; б) 67239*; в) 5203**; г) 904702** замените звёздочки на цифры так, чтобы получились числа, кратные 4.

Б42. Даны числа: а) 23075; б) 56700; в) 123123; г) 62835; д) 303033340, е) 695025; ж) 12318 укажите те, которые делятся: 1) на 2; 2) на 3; 3) на 4; 4) на 5; 5) на 9; 6) на 10; 7) на 25.

Б43. 1) Запишите с помощью цифр 0, 4, 5, 3 два четырёхзначных числа, которые делятся: а) на 2; б) на 5; в) на 4; г) на 10.

2) Можно ли записать этими же цифрами число, которое делится: а) на 3; б) на 9? (Цифры не повторяются)

Б44. Поставьте вместо звёздочек цифры так, чтобы число 30*0*03 делилось на 11.

Б45. Разложите на простые множители: а) 14; б) 15; в) 28; г) 120; д) 144; е) 225; ж) 2002.

Б46. Определите, какие пары чисел являются взаимно простыми: а) 24 и 102; б) 1001 и 86; в) 114 и 169; г) 225 и 81; д) 1000 и 1001.

Б47. Число 5A делится на 3. Верно ли, что A делится на 3?

Б48. Число A – чётно. Верно ли, что 3A делится на 6?

Б49. Даны числа: а) 241*; б) 1734*; в) 43*5. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы числа делились без остатка на 15?

Б50. Восстановите цифру b в числе 1bb2, которое делится на 8. Не производя деления, установите, делится ли полученное число на 12.

Б51. Напишите общую формулу числа: а) чётного; б) кратного 5; в) нечётного; г) кратного 7; д) кратного 2 и 3.

Задачи средней трудности

В26. В каком случае два натуральных числа a и b таковы, что a делится на b и b делится на a?

В27. Являются ли натуральными числами значения выражений:
а) $(3\cdot5\cdot7) : (3\cdot7)$; в) $(7\cdot19^3\cdot29^5\cdot31) : (19^2\cdot29^4\cdot31)$;
б) $(5\cdot11\cdot13\cdot23) : (11\cdot23\cdot7)$; г) $(37^2\cdot41^3\cdot43) : (37\cdot41^2\cdot43^3)$.

В28. Выполните деление: а) $(45a + 60b) : 5$; б) $(99x - 81y) : 9$;
в) $(117m + 91) : 13$; г) $(152k - 95) : 19$.

В29. Докажите, что значение выражения:
а) $7^{10} - 7^9 - 7^8$ делится на 41;
б) $5^8 + 5^7 + 5^6$ делится на 31;
в) $12^{13} - 12^{12} + 12^{11}$ делится на 7 и на 19;
г) $11^9 - 11^8 + 11^7$ делится на 3 и на 37.

В30. Докажите, что значение выражения:
а) $27^4 - 9^5 + 3^9$ делится на 25; б) $16^4 + 8^5 - 4^3$ делится на 11;
в) $25^2 - 5^2 - 125$ делится на 95; г) $2^5 + 4^5 + 8^2$ делится на 28.

В31. Докажите, что значение выражения:
а) $81^7 - 27^9 - 3^{25}$ кратно 45; б) $10^{12} + 10^{11} + 10^{10}$ кратно 555;
в) $3^{20} + 3^{18} - 3^{16}$ кратно 267.

В32. Докажите, что значение выражения:
а) $(16^3 - 8^3)(4^3 + 2^3)$ делится на 63;
б) $(125^2 + 25^2)(25^2 - 1)$ делится на 39.

В33. Докажите, что значение выражения:
а) $25^9 + 5^{17}$ делится на 30; б) $27^{10} - 9^{14}$ делится на 24.

В34. Докажите, что значение выражения:
а) $327^3 + 173^3$ делится на 500; б) $731^3 - 631^3$ делится на 100.

В35. Делится ли значение выражения:
а) $38^3 + 37^3$ на 75; б) $99^3 - 74^3$ на 25?

В36. Докажите, что $(18^3 - 9^3) \vdots 7$.

В37. Докажите, что $(1^7 + 2^7 + \ldots + 83^7) \vdots 84$.

В38. Верны ли утверждения:
а) если каждое слагаемое делится на 4, то сумма делится на 2;
б) если каждое слагаемое делится на 2, то сумма делится на 4.

В39. Верны ли утверждения:

а) если натуральное число m делится на число n, то m можно представить в виде разности натуральных чисел, каждое из которых делится на n;

б) если натуральное число m кратно числу n, то m можно представить в виде суммы натуральных чисел, каждое из которых делится на n?

В40. Определите: 1) значения каких выражений делятся на 11:

а) 110 – 22;	г) 85 – 19;	ж) 2233 – 87;
б) 7788 – 44;	д) 690 – 58;	з) 121 – 100;
в) 5555 – 132;	е) 980 – 120;	и) 500 – 462;

2) по какому признаку эти выражения распределены по трём столбцам.

В41. Про целые числа a, b и c известно, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делятся на c. Следует ли отсюда, что каждое из чисел a и b делится на c?

В42. Автомат печатает на полоске бумаги цифры «4» по одной. Удастся ли остановить его так, чтобы было напечатано число, кратное 8?

В43. Не производя действий и пользуясь признаками делимости, установите, какие из данных произведений будут делиться нацело и на 2, и на 3, и на 5 и на 9:

а) 6·23·75; 55·32·27; 64·128·32; 12·46·301;

б) 37·121·19; 123·207·41; 43·50·11; 129·121·621.

В44. Укажите какое-нибудь четырёхзначное число:

а) первая цифра которого 7, и оно делится на 3 и на 5, но не делится ни на 2, ни на 9;

б) первая цифра которого 5, и оно делится на 3 и на 2, но не делится ни на 5, ни на 9.

В45. Напишите три числа только с помощью:

а) цифры 1, которые делятся на 3;

б) цифры 6, которые делятся на 9.

В46. Делятся ли числа 5742, 4356, 8712 и 1584 на 99? Найдите закономерность в записи этих чисел. Проверьте вывод на других примерах.

В47. Даны выражения: а) 5658 + 1032; б) 1325·91; в) 6975 + 3125; г) 3585·5372; д) 1560·324. Укажите выражение, значение которого: 1) является чётным числом; 2) кратно 25; 3) делится на 9; 4) делится на 4 и на 9; 5) делится на 10 и на 9; 6) делится на 5 и на 3.

В48. Число A не делится на 3. Может ли делиться на 3 число $2A$?

В49. Определите, верно ли, что: а) если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$; б) если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

В50. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

В51. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

В52. Замените звёздочки цифрами так, чтобы число 72*3* делилось без остатка на 45.

В53. Замените звёздочки цифрами так, чтобы число 2*4* делилось: а) на 15; б) на 36.

В54. В числе $\overline{b7483b}$ замените b цифрой так, чтобы полученное число делилось на 6. Рассмотрите все возможные случаи.

В55. Не выполняя деления, найдите остаток от деления числа:

1) 181819 на число: а) 2; б) 18;
2) 131311 на число: а) 2; б) 13;
3) 22066089 на число: а) 2; б) 22; в) 11;
4) 14285612 на число: а) 2; б) 14; в) 7.

Задачи трудные

Г10. Докажите, что: а) $(12^3 + 13^3) \vdots 157$; б) $(31^3 - 19^3) \vdots 1911$; в) $(66^3 + 34^3) \vdots 100$; г) $(54^3 - 24^3) \vdots 1080$.

Г11. Докажите, что: а) $17^{12} - 49^6$ кратно 10; б) $121^6 - 2^{13}$ кратно 9.

Г12. Докажите, что $(3003^{100} - 2002^{100}) \vdots 7, 11, 13$.

Г13. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?

Г14. Из трёх различных цифр, отличных от нуля, составили всевозможные двузначные числа так, чтобы цифры в записи числа не повторялись. Докажите, что сумма всех полученных чисел делится на 22 независимо от исходного выбора цифр.

Г15. Не выполняя действий, определите, делится ли:

а) $18^2 - 7^2$ на 11; б) $53^3 + 67^3 + 2^3$ на 60.

Г16. Сформулируйте и докажите признак делимости на 2^k, где $k = 1, 2, 3\ldots$

Г17. Сформулируйте и докажите признак делимости на 5^k, где $k = 1, 2, 3\ldots$

Г18. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нём все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось $\overline{АБ} \cdot \overline{ВГ} = \overline{ДДЕЕ}$. Докажите, что он где-то ошибся.

Г19. Докажите, что четырёхзначное число, у которого цифра тысяч равна цифре сотен, а цифра десятков – цифре единиц, делится на 11.

Задачи очень трудные

Д2. Докажите, что число, состоящее из чётного числа цифр, первая и последняя из которых 1, а остальные – нули, делится на 11.

Д3. Докажите, что, кроме доказанного признака делимости на 4, есть и другой признак: число делится на 4 тогда и только тогда, когда сумма цифры единиц и удвоенной цифры десятков делится на 4.

Д4. Вася нашёл число 100! = 1·2·3·…·99·100, затем сложил в этом числе все цифры. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?

Д5. В числе переставили цифры и получили число, в три раза большее исходного. Докажите, что полученное число делится на 27.

Д6. Доказать, что число $\underbrace{11...1}_{81}$ делится на 81.

Д7. Найдите наименьшее число, в десятичной записи которого встречаются только единицы, делящееся на $\underbrace{33...33}_{k \text{ раз}}$.

Д8. Докажите, что 232323 ⋮ 7.

Д9. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.