



Заочный физико-математический лицей
«Авангард»

Е. Н. ФИЛАТОВ

АЛГЕБРА

8

Экспериментальный учебник

Часть 2



МОСКВА – 2016



Заочный физико-математический лицей
«Авангард»

Е. Н. Филатов

АЛГЕБРА

8

Экспериментальный учебник

Часть 2

МОСКВА – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Квадратичная функция

§ 9. Действия с радикалами. Иррациональные числа	4
§ 10. Алгебраические выражения с радикалами	64
§ 11. Квадратные уравнения	91
§ 12. Неквадратные уравнения, сводящиеся к квадратным	123
§ 13. Задачи, которые решаются с помощью квадратных уравнений	138
§ 14. Теорема Виета	161
ПОДСКАЗКИ	196
ОТВЕТЫ	210



§ 14. Теорема Виета

Автор: Рассмотрим уравнение

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0.$$

Как Вы считаете, имеет ли это уравнение корни?

Читатель: Очевидно, что имеет: произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$x - \alpha = 0 \rightarrow x = \alpha,$$

$$x - \beta = 0 \rightarrow x = \beta.$$

Значит, наше уравнение имеет два корня: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

Автор: А теперь, уже зная, чему равны корни уравнения, выполним умножение «скобки на скобку»:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

Теперь запишем наше уравнение в таком виде:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Видно, что это – *приведённое квадратное уравнение* вида $x^2 + px + q = 0$, где $p = -(\alpha + \beta)$ и $q = \alpha\beta$. А поскольку α и β – корни нашего уравнения, то можно записать:

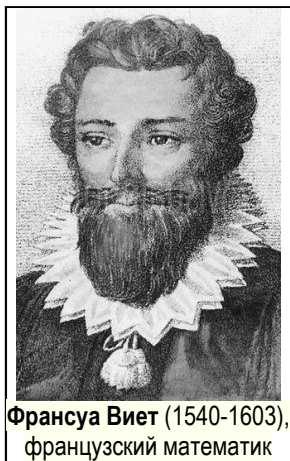
$$p = -(x_1 + x_2), \quad (14.1)$$

$$q = x_1 \cdot x_2. \quad (14.2)$$

Таким образом, мы получили, что *коэффициент p при x равен сумме корней приведённого квадратного уравнения, взятой со знаком минус, а произведение корней равно свободному члену q* . Правда, здесь необходима существенная оговорка: *если уравнение имеет корни*, ведь квадратное уравнение, как мы знаем, может не иметь корней.

Это утверждение впервые доказал французский математик Франсуа Виет, поэтому его называли *теоремой Виета*, а формулы (14.1) и (14.2) – *формулами Виета*.

Попробуем применить эту формулу на практике.



Задача 14.1. Определите сумму и произведение корней уравнения, не решая его:

а) $x^2 - 123x - 187 = 0$; б) $\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4 = 0$; в) $2x^2 - 5x + 20 = 0$.

Решение.

а) $x^2 - 123x - 187 = 0$ – это приведённое квадратное уравнение, где $p = -123$, $q = -187$. По формуле Виета

$$x_1 + x_2 = -p = -(-123) = 123, \quad x_1 x_2 = q = -187.$$

б) $\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4 = 0$. Сначала сделаем это уравнение приведённым, для этого умножим левую и правую части на 2:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + 7x - 4 \right) = 2 \cdot 0 \rightarrow x^2 + 14x - 8 = 0.$$

Здесь $p = 14$, $q = -8$, тогда $x_1 + x_2 = -p = -14$, $x_1 x_2 = q = -8$.
в) $2x^2 - 5x + 20 = 0$.

Читатель: Это уравнение легко сделать приведённым: разделим обе его части на 2 и получим: $x^2 - \frac{5}{2}x + 10 = 0$, то-

гда $p = -\frac{5}{2}$, $q = 10$, значит, $x_1 + x_2 = -p = \frac{5}{2}$, $x_1 x_2 = q = 10$.

Автор: Подождите! А Вы уверены, что данное уравнение имеет корни? Ведь мы с Вами знаем, что не всякое квадратное уравнение имеет корни!

Читатель: Действительно. Об это я как-то не подумал. Квадратное уравнение имеет корни, если его дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$. У нас $b = -5$, $a = 2$, $c = 20$, тогда $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 25 - 160 = -135 < 0$! Корней нет.

Автор: Верно. Значит, ни суммы, ни произведения корней данного уравнения просто не существует.

Читатель: Но тогда надо проверить, имеют ли корни уравнения в случаях а) и б).

Автор: В этом нет необходимости, так как в случаях а) и б) $a > 0$, а $c < 0$, поэтому произведение $4ac < 0$ и $D = b^2 -$

– $4ac > 0$. Так что корни у уравнений в случаях а) и б) точно существуют. Задача решена.

Ответ: а) 123, –187; б) –14, –8; в) не существуют.

СТОП! Решите самостоятельно.

A1. Определите, у какого из заданных квадратных уравнений сумма корней равна –6, а произведение корней равно –11:

- а) $x^2 - 6x + 11 = 0$; в) $x^2 - 11x - 6 = 0$;
б) $x^2 + 6x - 11 = 0$; г) $x^2 + 11x - 6 = 0$.

Не решая уравнения, определите, имеет ли оно корни. Для уравнений, имеющих корни, найдите их сумму и произведение.

- B1.** а) $x^2 + 2x - 5 = 0$; в) $x^2 - 19x + 1 = 0$;
б) $x^2 - 15x + 16 = 0$; г) $x^2 + 8x + 10 = 0$.
B2. а) $2x^2 + 9x - 10 = 0$; в) $19x^2 - 23x + 5 = 0$;
б) $5x^2 + 12x + 7 = 0$; г) $3x^2 + 113x - 7 = 0$.
V1. а) $x^2 - 6 = 0$; б) $2x^2 + 3x = 0$; в) $x^2 + 5x = 0$; г) $7x^2 - 1 = 0$.
V2. а) $0,2x^2 - 4x - 1 = 0$; в) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;
б) $\sqrt{3}x^2 - 12x + 7\sqrt{3} = 0$; г) $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 1 = 0$.
V3. а) $x^2 - x + 1 = 0$; б) $x^2 + x + 3 = 0$; в) $x^2 + 3x - 2 = 0$;
г) $x^2 - 3x + 2 = 0$; д) $x^2 - 2x + 1 = 0$; е) $x^2 + 4x + 4 = 0$.
-

Составляем квадратные уравнения по данным корням



Автор: Сформулируем ещё раз теорему Виета:

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то справедливы равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$.

Как Вы считаете, можно ли утверждать, что если $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$?

Иными словами, верна ли *обратная* теорема Виета?

Читатель: Вообще-то, если верна *прямая* теорема, то обратная может быть и не верна... Во всяком случае можно попытаться *доказать* обратную теорему.

Пусть выполняются равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$. Попробуем доказать, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Подставим в уравнение значения $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1x_2$ и получим $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$. Разложим левую часть на множители методом группировки:

$$\begin{aligned}x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 &= 0 \rightarrow x^2 - x_1x - (x_2x - x_1x_2) = 0 \rightarrow \\x(x - x_1) - x_2(x - x_1) &= 0 \rightarrow \\(x - x_1)(x - x_2) &= 0.\end{aligned}$$

Теперь очевидно, что $x = x_1$ и $x = x_2$ – корни уравнения, то есть теорема, обратная теореме Виета, доказана.

Автор: Верно.

Задача 14.2. Составьте квадратные уравнения по данным корням: а) 8 и 7; б) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$; в) $4 - \sqrt{3}$ и $4 + \sqrt{3}$.

Решение.

а) 8 и 7. Решим эту задачу двумя способами.

1. Если $x = 8$ и $x = 7$ – корни квадратного уравнения, то это уравнение запишется так: $(x - 8)(x - 7) = 0$. Чтобы привести наше уравнение к стандартному виду, умножаем «скобку на скобку» и получаем: $x^2 - 8x - 7x + 56 = 0 \rightarrow x^2 - 15x + 56 = 0$.

2. Воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета. Если $x_1 = 8$ и $x_2 = 7$ – корни квадратного уравнения, то

$$p = -(x_1 + x_2) = -(8 + 7) = -15, \quad q = x_1x_2 = (8 \cdot 7) = 56.$$

Тогда наше уравнение имеет вид $x^2 - 15x + 56 = 0$.

б) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$. Воспользуемся теоремой, обратной теореме

Виета. Если $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{4}$ – корни квадратного уравнения,

то $p = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$. Записываем урав-

нение: $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$. Если мы хотим избавиться от дробных коэффициентов, то умножим обе части уравнения на 8:

$$8 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right) = 8 \cdot 0 \rightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0.$$

в) $4 - \sqrt{3}$ и $4 + \sqrt{3}$. Здесь $x_1 = 4 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 4 + \sqrt{3}$, тогда

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3}) = -8,$$

$$q = x_1 x_2 = (4 - \sqrt{3}) \cdot (4 + \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13.$$

Записываем уравнение: $x^2 - 8x + 13 = 0$.

Ответ: а) $x^2 - 15x + 56 = 0$; б) $8x^2 - 2x - 1 = 0$;

в) $x^2 - 8x + 13 = 0$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Составьте квадратные уравнения, корнями которых являются данные числа.

A2. а) $x_1 = 4, x_2 = 2$;

в) $x_1 = -8, x_2 = 1$;

б) $x_1 = 3, x_2 = -5$;

г) $x_1 = -6, x_2 = -2$.

B3. а) $x_1 = 2,5, x_2 = -2$;

в) $x_1 = -2,4, x_2 = -1,5$;

б) $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -1\frac{1}{2}$;

г) $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = -1\frac{2}{3}$.

V4. а) 3 и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; в) -2 и $\frac{3}{4}$; г) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$;

д) 5 и $-\frac{1}{2}$; е) -2 и $-\frac{2}{5}$; ж) $1 - \sqrt{3}$ и $1 + \sqrt{3}$

Иррациональные корни и рациональные коэффициенты



Задача 14.3. Составьте квадратное уравнение с *рациональными* коэффициентами, если один из корней равен $4 - \sqrt{3}$.

Решение. $x_1 = 4 - \sqrt{3}$, нам надо подобрать такое число x_2 , чтобы выражения $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 x_2$ были рациональными числами. Самое простое, что приходит в голову – это $x_2 = 4 + \sqrt{3}$. В самом деле: $x_1 x_2 = (4 - \sqrt{3}) \cdot (4 + \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13$ и $-(x_1 + x_2) = -(4 - \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3}) = -8$.

Искомое уравнение $x^2 - 8x + 13 = 0$. Задача решена.

СТОП! Решите самостоятельно.

B5. Определите, может ли уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q – рациональные числа, иметь следующие корни: а) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $x_1 = \sqrt{2} + 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Г1. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число: а) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; б) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$.



Известен один корень. Как найти второй?

Задача 14.4. Известно, что x_1 – корень уравнения. Определите второй корень уравнения и число a :

а) $2x^2 + 16x + a = 0$, $x_1 = 3$; б) $3x^2 + ax - 72 = 0$, $x_1 = 8$.

Решение.

а) $2x^2 + 16x + a = 0$, $x_1 = 3$. Сначала сделаем это уравнение приведённым: $x^2 + 8x + \frac{a}{2} = 0$. Теперь воспользуемся теоремой Виета: $x_1 + x_2 = -8 \rightarrow 3 + x_2 = -8 \rightarrow x_2 = -11$. Чтобы найти a , также используем теорему Виета: $\frac{a}{2} = x_1 x_2 = 3 \cdot (-11)$, $\frac{a}{2} = -33$, $a = -66$.

б) $3x^2 + ax - 72 = 0$, $x_1 = 8$. Сначала сделаем это уравнение приведённым: $x^2 + \frac{a}{3}x - 24 = 0$. Теперь воспользуемся теоремой Виета: $x_1 x_2 = -24 \rightarrow 8 \cdot x_2 = -24 \rightarrow x_2 = -3$; $\frac{a}{3} = -(x_1 + x_2) = -(8 - 3) = -5$, $\frac{a}{3} = -5$, $a = -15$.

Ответ: а) $x_2 = -11$, $a = -66$; б) $x_2 = -3$, $a = -15$.

СТОП! Решите самостоятельно.

A3. Один из корней уравнения равен 2. Найдите второй корень уравнения не решая его: а) $x^2 + 5x = 14$; б) $x^2 - 13x = -22$;

$$\text{в)} x^2 - 2,5x + 1 = 0; \quad \text{г)} x^2 + -1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0.$$

Б4. Один из корней уравнения $x^2 + px + 54 = 0$ равен 6. Найдите другой корень и второй коэффициент.

Б5. Число $-\frac{2}{3}$ – один из корней уравнения $9x^2 + 3x + q = 0$.

Найдите другой корень и свободный член.

Б6. Уравнение $12x^2 + px + 1 = 0$ имеет одним из корней число $\frac{1}{4}$. Найдите другой корень и второй коэффициент.

Не решая уравнения, находим

$x_1^2 + x_2^2$; $x_1^3 + x_2^3$ и т.д.



Задача 14.5. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Не решая этого уравнения, выразите через p и q выражения: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; г) $(x_1 - x_2)^2$.

Решение. Мы знаем, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$. Наша задача состоит в том, чтобы представить данные выражения в виде алгебраических выражений, в которые входили бы только суммы и произведения корней.

$$\text{а)} x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

$$\text{б)} x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 3x_1 x_2] = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = (-p)[(-p)^2 - 3q] = p(3q - p^2).$$

$$\text{в)} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{(-p)}{q} = -\frac{p}{q}.$$

$$\text{г)} (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (-p)^2 - 4q = p^2 - 4q.$$

Ответ: а) $p^2 - 2q$; б) $p(3q - p^2)$; в) $-\frac{p}{q}$; г) $p^2 - 4q$.

СТОП! Решите самостоятельно.

A4. Вычислите выражение $\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$.

B6. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1, x_2 . Не решая уравнения, выразите через p и q сумму $x_1^4 + x_2^4$.

B7. Не решая уравнения $x^2 + px + q = 0$, имеющего корни x_1, x_2 , выразите через p и q выражение $(x_1 - x_2)^4$.

Задача 14.6. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2 - 4x - 1 = 0$. Не решая уравнения, найдите: а) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$; б) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

Решение. Сначала сделаем данное уравнение приведённым: $3x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Тогда $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 x_2 = -\frac{1}{3}$.

Дальше действуем так же, как в задаче 14.5.

а) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_2 + x_1)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)} = \\ &= \left(\frac{16}{9} + \frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{16}{9} + \frac{2}{3}\right) \cdot (-3) = -\frac{16}{3} - 2 = -\frac{22}{3} = -7\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $-\frac{4}{9}$; б) $-7\frac{1}{3}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

A5. Пусть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1, x_2 (т.е. $D > 0$). Выразите через коэффициенты a, b и c выражение $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Б7. Квадратное уравнение $3x^2 + 8x - 1 = 0$ имеет корни x_1, x_2 . Не решая уравнения, вычислите: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

Б8. Квадратное уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$ имеет корни x_1, x_2 . Не решая уравнения, найдите значения выражения $x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4$.

Г2. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 5x + 6 = 0$, вычислите сумму $x_1^7 x_2^2 + x_2^7 x_1^2$.

Угадываем корни



Задача 14.7. Решите уравнение $x^2 + 1999x - 2000 = 0$.

Решение.

Читатель: По-моему, можно просто воспользоваться форму-

лой $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Автор: Ну что ж, попробуйте.

Читатель: Получим:

$$x_{1,2} = \frac{-1999 \pm \sqrt{1999^2 - 4(-2000)}}{2} = \frac{-1999 \pm \sqrt{1999^2 + 8000}}{2} = \dots$$

Вообще-то выражение под корнем довольно «страшное»...
Без калькулятора здесь не обойтись.

Автор: А на государственных экзаменах калькуляторы строжайше запрещены! Поэтому вместо того, чтобы решать это уравнение, как говорится, «в лоб», давайте попробуем *угадать* корни.

Читатель: А как их угадать?

Автор: По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -1999$ и $x_1 x_2 = -2000$. Будем оптимистами и *предположим*, что корни уравнения – целые числа. Тогда возможны, например, такие варианты: 1) $x_1 x_2 = (-1) \cdot (2000) = -2000$; 2) $x_1 x_2 = 1 \cdot (-2000) = -2000$. Проверим, выполняется ли равенство $x_1 + x_2 = -1999$:

1) $1 + (-2000) = -1999$ – выполняется!

2) $-1 + 2000 = +1999$ – не выполняется!

Таким образом, корни данного уравнения – это $x_1 = 1$ и $x_2 = -2000$. Задача решена.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2000$.

СТОП! Решите самостоятельно.

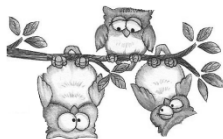
A6. Не используя формулу корней, найдите корни квадратного уравнения: а) $x^2 + 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 15x + 14 = 0$; в) $x^2 - 19x + 18 = 0$; г) $x^2 + 8x + 7 = 0$.

B8. Решите устно квадратные уравнения:

а) $x^2 + 2000x - 2001 = 0$; б) $x^2 - 2000x - 2001 = 0$;

в) $x^2 - 2001x + 2000 = 0$; г) $x^2 + 2001x + 2000 = 0$.

B9. Среди пар чисел $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$, $(11; -7)$ и $\left(1\frac{1}{3}; -1\frac{1}{4}\right)$ найдите такую пару, которая составлена из корней уравнения: а) $x^2 - 4x - 77 = 0$; б) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$; в) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; г) $12x^2 - x - 20 = 0$.



Как разложить на множители квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$

Корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ называются корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$. Тогда справедливо равенство

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (14.3)$$

Докажем это равенство. Для этого выполним умножение «скобки на скобку»:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, значит,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q.$$

Формула (14.3) доказана.

Читатель: А если надо разложить на множители квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$?

Автор: Этот случай легко связать с формулой (14.3). В самом

деле, $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Выражение в скобках

– это левая часть *приведённого квадратного уравнения*
 $x^2 + px + q = 0$, где $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$. Следовательно, по фор-

муле (14.3) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни
уравнения $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тогда

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Запомним эту формулу:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (14.4)$$

Читатель: А если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней?

Автор: Тогда квадратный трёхчлен *невозможно* представить в виде произведения двух двучленов $a(x - \alpha)(x - \beta)$, где α , β – действительные числа.

Задача 14.8. Разложите на множители квадратный трёхчлен: а) $x^2 - 12x + 36$; б) $x^2 + 7x + 12$; в) $-x^2 + 7x - 12$; г) $15x^2 - 8x + 1$; д) $-4x^2 - 3x + 85$.

Решение.

а) $x^2 - 12x + 36$. Найдём корни уравнения $x^2 - 12x + 36 = 0$. Воспользуемся теоремой Виета. Заметим, что $6 \cdot 6 = 36$ и $6 + 6 = -(-12)$, то есть данное уравнение имеет два одинаковых корня: $x_1 = x_2 = 6$. Тогда по формуле (14.3) получаем

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2.$$

Читатель: По-моему, можно было сразу заметить, что это выражение – квадрат разности: $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 = (x - 6)^2$.

Автор: Вы совершенно правы.

б) $x^2 + 7x + 12$. С помощью теоремы Виета найдём корни уравнения $x^2 + 7x + 12 = 0$. Заметим, что $(-3) \cdot (-4) = 12$ и $(-3) + (-4) = -7$. Значит, $x_1 = -3$, $x_2 = -4$, тогда по формуле (14.3) находим $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.

в) $-x^2 + 7x - 12 = (-1) \cdot (x^2 - 7x + 12)$. С помощью теоремы Виета найдём корни уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$. Заметим, что $3 \cdot 4 = 12$ и $3 + 4 = -(-7) = 7$. Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, тогда $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Отсюда

$$(-1) \cdot (x^2 - 7x + 12) = (-1)(x - 3)(x - 4) = (3 - x)(x - 4).$$

г) $15x^2 - 8x + 1$. Найдём корни уравнения $15x^2 - 8x + 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 15}}{15} = \frac{4 \pm 1}{15}, \quad x_1 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}. \quad \text{Тогда по}$$

$$\text{формуле (14.4)} \quad 15x^2 - 8x + 1 = 15 \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{5} \right).$$

В принципе на этом можно остановиться, но если мы хотим, чтобы выражение не содержало дробей, можно сделать преобразование:

$$15 \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{5} \right) = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right) \cdot 5 \cdot \left(x - \frac{1}{5} \right) = (3x - 1)(5x - 1).$$

д) $-4x^2 - 3x + 85$. Решим уравнение

$$-4x^2 - 3x + 85 = 0 \rightarrow 4x^2 + 3x - 85 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4 \cdot 85}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1369}}{8} = \frac{-3 \pm 37}{8}, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = \frac{17}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда по формуле (14.4)} \quad -4x^2 - 3x + 85 &= (-4)(x + 5) \left(x - \frac{17}{4} \right) = \\ &= (x + 5)(17 - 4x). \end{aligned}$$

Ответ: а) $(x - 6)^2$; б) $(x + 3)(x + 4)$; в) $(3 - x)(x - 4)$; г) $(3x - 1)(5x - 1)$; д) $(x + 5)(17 - 4x)$.

СТОП! Решите самостоятельно.

A7. Можно ли разложить на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 9x - 10$; б) $3m^2 - 6m + 4$; в) $\frac{1}{3}p^2 + 2p + 3$; г) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 20$?

B9. Разложите на множители: а) $-x^2 + 16x - 15$; б) $-3x^2 - 8x + 4$; в) $-x^2 + 5x - 6$.

B10. Разложите на множители: а) $3x^2 + 5x - 2$; б) $5x^2 + 2x - 3$; в) $6x^2 + 5x - 1$.

В10. Разложите на множители: а) $-3x^2 - 8x + 3$; б) $-5x^2 + 6x - 1$;
в) $-2x^2 + 9x - 4$.

**Продолжаем разлагать
на множители**



Задача 14.9. Разложите на множители:

- а) $x^4 - 3x^3 + 2x^2$; б) $x - 3\sqrt{x} + 2$; в) $x^4 - 3x^2 + 2$;
г) $(x + y)^2 - 3(x + y) + 2$; д) $x^2 - 3xy + 2y^2$.

Решение.

а) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 3x + 2)$. Дальше всё просто:
 $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ($2 \cdot 1 = 2$, $2 + 1 = -(-3)$),
тогда $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Окончательно получаем:
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x - 1)(x - 2)$.

б) $x - 3\sqrt{x} + 2$. Сделаем замену: $\sqrt{x} = y$, тогда
 $x - 3\sqrt{x} + 2 = y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2)$.

А теперь делаем обратную замену и получаем:

$$(y - 1)(y - 2) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2).$$

в) $x^4 - 3x^2 + 2$. Делаем замену: $x^2 = y$, тогда
 $x^4 - 3x^2 + 2 = y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$.

г) $(x + y)^2 - 3(x + y) + 2$. Делаем замену: $z = x + y$, тогда
 $(x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2) =$
 $= (x + y - 1)(x + y - 2)$.

д) $x^2 - 3xy + 2y^2$. Сделаем такую «хитрость»:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = y^2 \left(\frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y} + 2 \right).$$

А теперь делаем замену $\frac{x}{y} = z$ и получаем:

$$\frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y} + 2 = z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2) = \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \left(\frac{x}{y} - 2 \right).$$

Тогда

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = y^2 \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \left(\frac{x}{y} - 2 \right) = y \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \cdot y \left(\frac{x}{y} - 2 \right) = (x - y)(x - 2y).$$

Ответ: а) $x^2(x - 1)(x - 2)$; б) $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$;

в) $(x^2 - 1)(x^2 - 2)$; г) $(x + y - 1)(x + y - 2)$; д) $(x - y)(x - 2y)$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Разложите на множители.

В11. а) $x^3 + 3x^2 + 2x$; б) $x^3 - 7x^2 + 10x$; в) $x^3 - 12x^2 + 32x$;
г) $x^4 + x^3 - 6x^2$.

В11. а) $x + 6\sqrt{x} + 8$; б) $x - 7\sqrt{x} - 18$; в) $x - 12\sqrt{x} + 35$;
г) $x + 3\sqrt{x} - 40$.

В12. а) $x^4 - 13x^2 + 36$; б) $-2x^6 + 9x^3 - 4$; в) $-x^4 - 20x^2 - 64$;
г) $15x^6 - 8x^3 + 1$.

Г3. а) $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$; б) $(a - 2)^2 + 4(a - 2) - 21$.

Г4. а) $m^2 - 11mn + 28n^2$; б) $b^2 + 6bc - 55c^2$.



Сокращаем дроби

Задача 14.10. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 8x + 7}$; б) $\frac{6x^2 - 7x + 1}{7x^2 - 8x + 1}$; в) $\frac{x + 7\sqrt{x} + 6}{x + 8\sqrt{x} + 7}$.

Решение.

а) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 8x + 7}$. Разложим на множители числитель и знаме-

натель: $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$ [$1 \cdot 6 = 6$, $1 + 6 = -(-7)$],
 $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$;

$x^2 - 8x + 7 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ [$1 \cdot 7 = 7$, $1 + 7 = -(-8)$],
 $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$.

Теперь перепишем и сократим дробь:

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 8x + 7} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-6)}{\cancel{(x-1)}(x-7)} = \frac{x-6}{x-7}.$$

б) $\frac{6x^2 - 7x + 1}{7x^2 - 8x + 1}$. Разложим на множители числитель и зна-

менатель:

$$6x^2 - 7x + 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm 5}{12}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{6}.$$

Тогда

$$6x^2 - 7x + 1 = 6 \cdot (x-1) \left(x - \frac{1}{6} \right);$$

$$7x^2 - 8x + 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 7 \cdot 1}}{7} = \frac{4 \pm 3}{7}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{7}.$$

Тогда $7x^2 - 8x + 1 = 7 \cdot (x-1) \left(x - \frac{1}{7} \right)$.

Теперь перепишем и сократим дробь:

$$\frac{6x^2 - 7x + 1}{7x^2 - 8x + 1} = \frac{6\cancel{(x-1)}(x - \frac{1}{6})}{7\cancel{(x-1)}(x - \frac{1}{7})} = \frac{6(x - \frac{1}{6})}{7(x - \frac{1}{7})} = \frac{6x-1}{7x-1}.$$

в) $\frac{x+7\sqrt{x}+6}{x+8\sqrt{x}+7}$. Делаем замену $\sqrt{x} = y$, тогда

$$\frac{x+7\sqrt{x}+6}{x+8\sqrt{x}+7} = \frac{y^2+7y+6}{y^2+8y+7} = \frac{\cancel{(y+1)}(y+6)}{\cancel{(y+1)}(y+7)} = \frac{y+6}{y+7} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+7}.$$

Ответ: а) $\frac{x-6}{x-7}$; б) $\frac{6x-1}{7x-1}$; в) $\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+7}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Сократите дробь.

Б12. а) $\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x}$; б) $\frac{a^2-9}{a^2+8a+15}$.

В13. а) $\frac{6y^2+13y-5}{12y-4}$; б) $\frac{4x^2-9}{6x^2-5x-6}$;

в) $\frac{x-5\sqrt{x}-14}{x-2\sqrt{x}-8}$; г) $\frac{2x+11\sqrt{x}-6}{x+3\sqrt{x}-18}$.



Что можно сказать о корнях квадратного уравнения, не решая его?

Автор: Допустим, дано приведённое уравнение $x^2 + px + q = 0$.

Можно ли что-либо сказать о его корнях, не решая его?

Читатель: Ну, прежде всего, мы можем сказать, имеет ли уравнение корни. А если имеет, то сколько именно: один или два. Для этого надо вычислить дискриминант $D = p^2 - 4q$ (или, если уравнение неприведённое: $ax^2 + bx + c = 0$, то $D = b^2 - 4ac$). Если $D < 0$, корней нет, если $D = 0$, то корень один, если $D > 0$, то корни два.

Автор: Верно. А если уравнение имеет корни, что можно сказать о знаках корней?

Читатель: По теореме Виета $x_1x_2 = q$, значит, если $q < 0$, то корни разных знаков, если $q > 0$, то корни одного знака.

Автор: Верно. Кстати, заметим, что если $q < 0$, то $D = p^2 - 4q > 0$, то есть уравнение обязательно имеет два корня. А если корни одного знака, как узнать, положительные они или отрицательные?

Читатель: Надо воспользоваться формулой $x_1 + x_2 = -p$. Если $-p > 0$, то есть $p < 0$, – корни положительные, а если $-p < 0$, то есть $p > 0$, то корни отрицательные.

Автор: А если корни разных знаков, как узнать, какой из них больше по модулю: положительный или отрицательный?

Читатель: Если $x_1x_2 = q < 0$ и $x_1 + x_2 = -p > 0$, то по модулю больше положительный корень, а если $x_1 + x_2 = -p < 0$, то по модулю больше отрицательный корень.

Автор: Всё верно! А можем ли мы определить, являются ли корни рациональными или иррациональными числами?

Читатель: Надо вычислить $D = p^2 - 4q$. Если $\sqrt{D}$ – рациональное число, то корни рациональные числа, а если $\sqrt{D}$ – иррациональное число, то и корни иррациональные числа.

Автор: Ну что же, теоретически мы всё обосновали, остаётся применить знания на практике.

Задача 14.11. Определите, имеет ли уравнение корни:

а) $2x^2 + 8x + 51 = 0$; б) $2x^2 + 8x + 3 = 0$;

в) $x^2 + 3x - 10 = 0$; г) $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Если уравнение имеет корни, то ответьте на следующие вопросы: 1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?

а) $2x^2 + 8x + 51 = 0$. Находим

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 51 = -344 < 0.$$

Уравнение не имеет корней.

б) $2x^2 + 8x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + \frac{3}{2} = 0$.

1) $D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 64 - 24 = 40 > 0$. Уравнение имеет два различных корня;

2) $\sqrt{D} = \sqrt{40}$ – число иррациональное, значит, оба корня – иррациональные числа;

3) $q = \frac{3}{2} > 0$, следовательно, корни одного знака; $p = 4 > 0$ – оба корня отрицательные.

в) $x^2 + 3x - 10 = 0$.

1) $q = -10 < 0$, следовательно, $D > 0$, значит, уравнение имеет два различных корня; поскольку $x_1 x_2 < 0$, корни разных знаков;

2) $D = 3^2 + 4 \cdot 10 = 49$, $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$ – рациональное число, следовательно, оба корня – рациональные числа;

3) $x_1 + x_2 = -3 < 0$, значит, больший по модулю корень – отрицательный.

г) $x^2 + 18x + 81 = 0$.

1) $D = 18^2 + 4 \cdot 81 = 324 - 324 = 0$, следовательно, уравнение имеет два одинаковых корня;

2) $q = 81 > 0$, значит, корни одного знака;

3) $x_1 + x_2 = -18 < 0$, значит, оба корня отрицательные.

Ответ: а) корней нет; б) два различных отрицательных иррациональных корня; в) два рациональных корня разных знаков, больший по модулю корень – отрицательный; г) два одинаковых рациональных отрицательных корня.

СТОП! Решите самостоятельно.

А8. Не вычисляя по формуле корни квадратного уравнения, определите знаки корней уравнения:

а) $x^2 - 17x + 4 = 0$; б) $x^2 + 20x + 5 = 0$; в) $x^2 + 30x - 1 = 0$;

г) $x^2 - 25x - 2 = 0$; д) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; е) $2x^2 + 9x + 3 = 0$;

ж) $5x^2 + 10x - 4 = 0$; з) $\frac{1}{6}x^2 - 11x - 8 = 0$.

В13. Может ли квадратное уравнение $x^2 + bx - 8 = 0$: а) не иметь корней; б) иметь равные корни; в) иметь два различных корня разных знаков; г) иметь два различных корня одного и того же знака?

В14. Определите, имеет ли уравнение корни:

а) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; б) $3y^2 - 8y + 2 = 0$;

в) $5x^2 - 3x + 1 = 0$; г) $-6z^2 + 11z - 3 = 0$.

Если уравнение имеет корни, то ответьте на следующие вопросы:

1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?

В15. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. При каком условии корни этого уравнения: а) оба положительны; б) оба отрицательны; в) разных знаков?



Известна сумма корней...

Задача 14.12. Дано уравнение $x^2 - (2p^2 - p - 6)x + (8p - 1) = 0$. Известно, что сумма его корней равна -5 . Найдите значение параметра p .

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$. В данном случае $x_1 + x_2 = 2p^2 - p - 6 = -5$. Остается решить квадратное уравнение и убедиться, что при полученных значениях p корни существуют:

$$2p^2 - p - 6 = -5 \rightarrow 2p^2 - p - 1 = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}, \quad p = 1, \quad p_2 = -\frac{1}{2}.$$

1. Пусть $p = 1$, тогда $x^2 - (2 \cdot 1^2 - 1 - 6)x + (8 \cdot 1 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 7 = 0$, отсюда $D = 25 - 4 \cdot 7 = -3 < 0$ – корней нет.

2. Пусть $p = -\frac{1}{2}$, тогда

$$x^2 - \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \right) - 6 \right) x + \left(8 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 \right) = 0 \rightarrow x^2 + 5x - 5 = 0,$$

$q = -5 < 0$, значит $D > 0$. Следовательно, при $p = -\frac{1}{2}$ сумма корней уравнения $x^2 - (2p^2 - p - 6)x + (8p - 1) = 0$ действительно равна -5 .

Ответ: $p = -\frac{1}{2}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б14. При каком значении n корни уравнения $x^2 + (2n - 7)x - 3 = 0$ являются противоположными числами?

В16. Дано уравнение $x^2 + (p^2 - 3p - 11)x + 6p = 0$. Известно, что сумма его корней равна 1. Найдите значение параметра p и корни уравнения.

Г5. При каких условиях сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна их произведению?

Известно произведение корней

Задача 14.13. Какая зависимость существует между коэффициентами квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если известно, что его корни – взаимно обратные числа?



Решение. По условию $x_1 = \frac{1}{x_2}$ или $x_1 x_2 = 1$. Сделаем дан-

ное уравнение приведённым:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тогда $x_1x_2 = 1 = \frac{c}{a} \rightarrow a = c$. Но этого недостаточно! Ведь корни ещё должны существовать, а для этого необходимо, чтобы $D = b^2 - 4ac = b^2 - 4a \cdot a = b^2 - 4a^2 \geq 0$ или $b^2 \geq 4a^2$.

Ответ: $a = c$ и $b^2 \geq 4a^2$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б15. При каком значении n корни уравнения $x^2 - 100x + 3n - 2 = 0$ являются взаимно обратными числами?

В17. При каких значениях параметра p произведение корней уравнения $x^2 + 3x + (p^2 - 7p + 12) = 0$ равно нулю?



Известна разность корней

Задача 14.14. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 4x + q = 0$ равна 20. Найдите q .

Решение. По условию задачи $x_1 - x_2 = 20$, а по теореме Виета $x_1 + x_2 = 4$. Получаем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 20, \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow 2x_1 = 24 \rightarrow x_1 = 12 \rightarrow$$

$$12 + x_2 = 4 \rightarrow x_2 = 4 - 12 = -8.$$

Итак, $x_1 = 12$, $x_2 = (-8)$. По теореме Виета

$$q = x_1x_2 = 12 \cdot (-8) = -96.$$

Ответ: $q = -96$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В18. Один из корней квадратного уравнения $24x^2 - 10x + q = 0$ на $\frac{1}{12}$ больше другого. Найдите q .

Г6. При каком значении c один из корней уравнения $4x^2 - 20x + c = 0$ на 2 меньше другого?

Известно отношение корней: $\frac{x_2}{x_1} = k$



Задача 14.15. При каких значениях коэффициента p отношение корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равно 4?

Решение. По условию задачи $\frac{x_2}{x_1} = 4$ или $x_2 = 4x_1$. По тео-

реме Виета $x_1 x_2 = x_1 \cdot 4x_1 = 1 \rightarrow 4x_1^2 = 1 \rightarrow x_1^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{2}$,
 $x_2 = 4x_1 = 4 \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm 2$. То есть возможны два варианта:

$$1) x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2; \quad 2) x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -2;$$

тогда $p = -(x_1 + x_2)$:

$$1) p = -\left(\frac{1}{2} + 2\right) = -2,5; \quad 2) p = -\left(-\frac{1}{2} - 2\right) = 2,5.$$

Ответ: $p = -2,5, p = 2,5$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В19. Один из корней уравнения $2x^2 - 14x + p = 0$ больше другого в 2,5 раза. Найдите значение параметра p и корни уравнения.

Г7. При каких значениях k корни уравнения $x^2 - (2k + 1)x + k^2 = 0$ относятся как 1 : 4?

Задача 14.16. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2$ вдвое больше другого? Найдите эти корни.

Решение. Запишем формулы Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2a - 1), \\ x_1 x_2 = a^2 + 2 \end{cases}$ и

учтём, что $x_1 = 2x_2$. Подставим это соотношение в формулы Виета и получим

$$\begin{cases} 2x_2 + x_2 = -(2a - 1), \\ 2x_2 x_2 = a^2 + 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x_2 = 1 - 2a, \\ 2x_2^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x_2 = \frac{1-2a}{3}$ и подставляем

во второе:

$$2 \cdot \left(\frac{1-2a}{3} \right)^2 = a^2 + 2 \text{ или } 2 \cdot \frac{1-4a+4a^2}{9} = a^2 + 2 \rightarrow$$

$$2 - 8a + 8a^2 = 9a^2 + 18 \rightarrow 9a^2 - 8a^2 + 8a + 18 - 2 = 0 \rightarrow$$
$$a^2 + 8a + 16 = 0 \rightarrow (a + 4)^2 = 0,$$

$$\text{откуда } a = -4. \text{ Теперь находим } x_2 = \frac{1-2a}{3} = \frac{1-2 \cdot (-4)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{и } x_1 = 2x_2 = 6.$$

Итак, при $a = -4$ корни этого уравнения $x_1 = 6$ и $x_2 = 3$ (то есть один корень вдвое больше другого).

Ответ: $x_1 = 6$ и $x_2 = 3$ при $a = -4$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Г8. При каких значениях a один из корней уравнения $2x^2 + (3a - 1)x + (a^2 - 4a + 4) = 0$ вдвое больше другого?

Г9. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + (k^2 - 1) = 0$ втрое меньше другого?



Один корень равен квадрату другого...

Задача 14.17. При каких значениях a один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ равен квадрату другого корня?

Решение. По условию задачи $x_2 = x_1^2$. По теореме Виета

$$1) \ x_1 x_2 = \frac{4a^3}{4} \rightarrow x_1 x_1^2 = a^3 \rightarrow x_1^3 = a^3 \rightarrow x_1 = a \rightarrow x_2 = x_1^2 = a^2;$$

$$2) \ x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \rightarrow a + a^2 = \frac{15}{4} \rightarrow a^2 + a - \frac{15}{4} = 0 \rightarrow$$

$$4a^2 + 4a - 15 = 0. \quad a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{4} = \frac{-2 \pm 8}{4}, \quad a = -2,5,$$

$$a_2 = 1,5.$$

Ответ: при $a = -2,5$ и при $a = 1,5$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Г10. При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ равен квадрату другого?

Г11. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 = x_2$?

Сумма квадратов корней $x_1^2 + x_2^2 = \dots$



Задача 14.18. Найдите такое значение q , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + q = 0$ равна 13.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + x + q = 0$.

По условию задачи $x_1^2 + x_2^2 = 13$, с другой стороны, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-1)^2 - 2q = 1 - 2q$. Отсюда получаем уравнение $13 = 1 - 2q \rightarrow 2q = -12 \rightarrow q = -6$.

Ответ: $q = -6$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В20. Составьте квадратное уравнение, если известны произведение его корней и сумма их квадратов:

а) $x_1x_2 = 12$, $x_1^2 + x_2^2 = 40$; а) $x_1x_2 = -3$, $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

В21. Корни квадратного уравнения $x^2 - 4rx + 7r^2 = 0$ таковы, что $x_1^2 + x_2^2 = 2$. Найдите r .

Г12. Сумма квадратов корней уравнения $12x^2 - 17x + c = 0$ равна $1\frac{1}{144}$. Найдите свободный член уравнения.

Составляем уравнение по некоторым известным соотношениям между корнями



Задача 14.19. В уравнении $x^2 - 2x + c = 0$ определите то значение c , при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2 - 4x_1 = 47$.

Решение. По условию задачи $7x_2 - 4x_1 = 47$, по теореме Виета $x_1 + x_2 = 2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x_2 - 4x_1 = 47, & (1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (2) \end{cases} \rightarrow + \begin{cases} 7x_2 - 4x_1 = 47, \\ 4x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\hline 7x_2 + 4x_2 = 55 \rightarrow 11x_2 = 55 \rightarrow x_2 = 5.$$

Из уравнения (2) находим $x_1 = 2 - x_2 = 2 - 5 = -3$. Отсюда $c = x_1 x_2 = (-3) \cdot 5 = -15$.

Ответ: $c = -15$.

СТОП! Решите самостоятельно.

V22. Найдите коэффициент q в уравнении $x^2 - 2x + q = 0$, если корни уравнения x_1 и x_2 связаны соотношением $2x_1 + x_2 = 3$.

Задача 14.20. Найдите коэффициент p в уравнении $x^2 + px + 42 = 0$, если квадрат разности его корней равен 1.

Решение. По условию $(x_1 - x_2)^2 = 1$. Преобразуем это уравнение:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1 \rightarrow (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 4x_1x_2 = 1 \rightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1.$$

Подставим в получившееся уравнение значения $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = 42$ и получим:

$$(-p)^2 - 4 \cdot 42 = 1 \rightarrow p^2 = 1 + 4 \cdot 42 \rightarrow p^2 = 169 \rightarrow p = \pm 13.$$

Ответ: $p = -13$ и $p = 13$.

СТОП! Решите самостоятельно.

V23. Разность квадратов корней приведённого квадратного уравнения равна 24. Второй коэффициент этого уравнения равен 2. Найдите свободный член уравнения.



Целые коэффициенты и целые корни

Докажем следующее утверждение: если корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q – целые числа, рациональны, то оба его корня – целые числа.

Пусть x_1 – первый корень уравнения. Предположим, что он – несократимая дробь $x_1 = \frac{m}{n}$ ($n \neq 1$). Подставим это значение в исходное уравнение и получим верное равенство: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + p\left(\frac{m}{n}\right) + q = 0$. Умножим обе части этого уравнения на n и получим: $\frac{m^2}{n} + pm + qn = 0 \rightarrow \frac{m^2}{n} = -pm - qn$. Справа стоит целое число (так как p, m, n и q – целые), а слева – дробное (так как $n \neq 1$, а дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая).

Мы пришли к противоречию! Значит, неверно, что $n \neq 1$, то есть $n = 1$ и x_1 – целое число. Но по теореме Виета $x_2 + x_1 = -p \rightarrow x_2 = -p - x_1$. Поскольку p и x_1 – целые, то и x_2 – целое число. Утверждение доказано!

Задача 14.21. Найдите все целые положительные значения q , при которых уравнение $x^2 + 5x + q = 0$ имеет целые корни. Найдите несколько целых отрицательных значений q , при которых уравнение имеет целые корни. Можно ли перечислить все такие значения?

Решение.

1. По условию задачи $q > 0$, значит, корни имеют одинаковые знаки, а $x_1 + x_2 = -p = -5 < 0$, значит, оба корня отрицательные. Поскольку корни целые, то возможны следующие варианты: 1) $-1 - 4 = -5$; 2) $-2 - 3 = -5$... и всё! Тогда: а) $q = (-1) \cdot (-4) = 4$; б) $q = (-2) \cdot (-3) = 6$.

2. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $q < 0$. Корни имеют разные знаки, и можно подобрать бесконечно много вариантов, при которых $x_1 + x_2 = -5$, например:

$$\text{а) } -6 + 1 = -5 \rightarrow q = (-6) \cdot 1 = -6;$$

$$\text{б) } -7 + 2 = -5 \rightarrow q = (-7) \cdot 2 = -14;$$

$$\text{в) } -8 + 3 = -5 \rightarrow q = (-8) \cdot 3 = -24 \text{ и т.д.}$$

Ответ: 1) $q = 4, q = 6$; 2) например: $-6, -14, -24$ и т.д.

СТОП! Решите самостоятельно.

В24. Найдите все целые значения p , при которых данное уравнение имеет целые корни: а) $x^2 + px + 15 = 0$; б) $x^2 + px - 15 = 0$; в) $x^2 + px + 12 = 0$; г) $x^2 + px - 12 = 0$.

Г13. Коэффициенты p и q квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ нечётны. Докажите, что он не может иметь целых корней.



По данному уравнению составляем второе

Задача 14.22. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Составьте квадратное уравнение, корни которого на две единицы больше, т.е. равны $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$.

Решение. Пусть искомое уравнение имеет вид $y^2 + p_1y + q_1 = 0$ и его корни равны $y_1 = x_1 + 2$ и $y_2 = x_2 + 2$.

По теореме Виета получим:

$$1) p = -(x_1 + x_2), \text{ тогда } p_1 = -(y_1 + y_2) = -(x_1 + 2 + x_2 + 2) = -(x_1 + x_2) - 4 = p - 4.$$

$$2) q = x_1x_2, \text{ тогда } q_1 = y_1y_2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = q - 2p + 4.$$

Осталось записать уравнение.

$$\text{Ответ: } y^2 + (p - 4)y + (q - 2p + 4) = 0.$$

СТОП! Решите самостоятельно.

В25. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Г14. Составьте уравнение, корни которого:

а) на 2 меньше корней уравнения $x^2 - 187x + 148 = 0$;

а) на 3 больше корней уравнения $x^2 + 191x - 1250 = 0$.

Задача 14.23. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Составьте квадратное уравнение, корни которого: а) x_1^2 и x_2^2 ;
б) $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

Решение. По теореме Виета $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1x_2$.

а) Пусть уравнение $y^2 + p_1y + q_1 = 0$ имеет корни $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_2^2$. Тогда

$$p_1 = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = \\ = -[(-p)^2 - 2q] = 2q - p^2, \quad q_1 = y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2 = q^2.$$

Составляем новое уравнение: $y^2 + (2q - p^2)y + q^2 = 0$.

б) Пусть уравнение $z^2 + p_1z + q_1 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{x_1}{x_2}$ и

$$z_2 = \frac{x_2}{x_1}. \text{ Тогда } q_1 = z_1z_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1;$$

$$p_1 = -(z_1 + z_2) = -\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = \\ = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = -\left(\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}\right) = -\frac{(-p)^2 - 2q}{q} = \frac{2q - p^2}{q}.$$

Составляем новое уравнение: $z^2 + \frac{2q - p^2}{q}z + 1 = 0$ или

$$qz^2 + (2q - p^2)z + q = 0.$$

Ответ: а) $y + (2q - p^2)y + q^2 = 0$; б) $qz^2 + (2q - p^2)z + q = 0$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В26. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Г15. Составьте квадратное уравнение, имеющее корни x_1^{-3} и x_2^{-3} , где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 8x + 2 = 0$.



Домашнее задание

Задачи очень лёгкие

А9. Не решая уравнения, укажите, имеет ли оно корни и чему равны произведение и сумма его корней:

а) $x^2 - 14x + 40 = 0$; б) $x^2 + 16x + 15 = 0$; в) $x^2 - 2x - 1 = 0$;

г) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; д) $4x^2 + 16x + 15 = 0$; е) $3x^2 + 11x - 4 = 0$.

A10. Составьте приведённое квадратное уравнение, если известны сумма L и произведение K его корней:

а) $L = 3, K = -28$; б) $L = -3, K = -18$; в) $L = -3,5, K = 2,5$;

г) $L = \frac{5}{6}, K = \frac{1}{6}$; д) $L = 0, K = -9$; е) $L = 4, K = 4$.

A11. Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения, если известен первый:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0, x_1 = 2$; б) $x^2 + 8x + 15 = 0, x_1 = -3$;

в) $x^2 + 3x - 18 = 0, x_1 = 3$; г) $x^2 - 6x - 7 = 0, x_1 = 7$.

A12. Определите, можно ли разложить на линейные множители квадратный трёхчлен: а) $x^2 - 12x - 4$; б) $3x^2 + 8x + 10$;
в) $2x^2 + 3x + 1$; г) $x^2 - 5x + 8$.

Задачи лёгкие

B16. Укажите сумму и произведение корней квадратного уравнения (если они существуют):

а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; б) $3x^2 + x + 4 = 0$; в) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$;

г) $1,4x^2 - 3x + \frac{5}{7} = 0$; д) $0,1x^2 - 8x + 4,2 = 0$; е) $3x^2 + 1,1x - 0,4 = 0$.

B17. Составьте двумя способами приведённое квадратное уравнение, если известны его корни: а) 1 и 5; б) -2 и 3; в) 4 и 6;
г) -3 и -6; д) 0,5 и 4; е) 1,2 и -5; ж) 1 и -1; з) 5 и 5.

B18. Определите второй корень и коэффициент p , если:

а) один из корней уравнения $x^2 + px - 20 = 0$ равен -5;

б) один из корней уравнения $3x^2 + px + 5 = 0$ равен -2.

B19. Определите второй корень и коэффициент q , если:

а) один из корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равен -10;

б) один из корней уравнения $2x^2 + 3x + q = 0$ равен 3.

B20. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + 9x - 17 = 0$. Не решая уравнения, вычислите: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

B21. Не решая уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найдите $x_1^{-2} + x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

B22. Решите квадратное уравнение подбором корней:

а) $y^2 + 9y + 20 = 0$; б) $x^2 - 11x + 24 = 0$; в) $t^2 - 9t + 8 = 0$;

- г) $z^2 + 12z + 20 = 0$; д) $x^2 + 13x + 30 = 0$; е) $y^2 - 17y + 30 = 0$;
 ж) $t^2 + 12t + 32 = 0$; з) $u^2 - 15u + 50 = 0$.

Б23. Решите квадратное уравнение подбором корней:

- а) $x^2 + 3x - 4 = 0$; б) $x^2 - 12x + 11 = 0$;
 в) $x^2 - 9x - 10 = 0$; г) $x^2 + 8x - 9 = 0$.

Б24. Решите квадратное уравнение подбором корней:

- а) $x^2 + 9x + 20 = 0$; б) $x^2 - 15x + 36 = 0$;
 в) $x^2 + 5x - 14 = 0$; г) $x^2 - 7x - 30 = 0$.

Б25. Покажите, что квадратные трёхчлены а) $x^2 + 2x - 3$;
 б) $2x^2 + 4x - 6$; в) $-5x^2 - 10x + 15$ имеют одни и те же корни. Разложите эти трёхчлены на множители.

Б26. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $m^2 + 3m - 18$; б) $b^2 + 9b + 8$; в) $y^2 - y - 6$; г) $d^2 + 11d + 18$;
 д) $a^2 + a - 6$; е) $c^2 - 7c + 6$; ж) $n^2 - 4n - 60$; з) $x^2 - 23x + 60$.

Б27. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $21 + 10n + n^2$; б) $14 - 9k + k^2$; в) $42 - 13b + b^2$; г) $48 - 14c + c^2$.

Б28. Сократите дробь:

- а) $\frac{y^2 - 7y + 12}{2y^2 - 3y}$; б) $\frac{b^2 - 25}{b^2 - 8b + 15}$; в) $\frac{m - 3m - 8}{m^2 + 4m + 4}$; г) $\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 5n + 4}$.

Б29. Не решая уравнений, определите знаки его корней:

- а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^2 + 7x + 12 = 0$;
 в) $x^2 + 5x - 14 = 0$; г) $x^2 - 5x - 14 = 0$;
 д) $x^2 + 1,27x - 1,46 = 0$; е) $x^2 - \frac{3}{5}x - 0,5 = 0$;
 ж) $x^2 - 56x + 768 = 0$; з) $x^2 - 20x - 684 = 0$;
 и) $x^2 = -377x - 31242$; к) $x^2 + 272x = 49104$.

Б30. Докажите, что уравнение:

- а) $5x^2 = 8x + 284$ не может иметь корни одного знака;
 б) $17x^2 = 7x - 354$ не может иметь корни разных знаков.

Б31. Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни одинаковых знаков, и определите знаки корней:

- а) $x^2 + 3x + 2 = 0$; в) $x^2 - 5x + 4 = 0$; д) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
 б) $x^2 - 3x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x + 4 = 0$; е) $x^2 + 8x + 7 = 0$.

Б32. При каких значениях параметра p сумма корней квадратного уравнения $x^2 + (p^2 + 4p - 5)x - p = 0$ равна нулю?

Б33. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $2px^2 + 5x + p + 1 = 0$ являются взаимно обратными числами. Найдите эти корни.

Задачи средней трудности

В27. По теореме Виета найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения (если они существуют):

- а) $x^2 + 9x - 10 = 0$; б) $m^2 - 1,1m - 0,6 = 0$; в) $t^2 + 42,5t + 100 = 0$;
г) $-x^2 + 5x + 24 = 0$; д) $40m^2 + 38m - 15 = 0$; е) $54y^2 + 69y + 20 = 0$.

В28. Составьте квадратное уравнение, если известны его корни:

- а) 2 и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$ и 5; в) $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$; г) 0 и 5; д) $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$; е) $2 - \sqrt{5}$ и $2 + \sqrt{5}$.

В29. Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь своими корнями: а) 5 и $2 + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$; в) $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.

В30. Найдите коэффициенты квадратного трёхчлена $x^2 + px + q = 0$, если известно, что p и q – целые числа и $1 + \sqrt{2}$ – корень данного трёхчлена.

В31. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Найдите:

- а) b и c , если $a = 2, x_1 = 3, x_2 = -0,5$;
б) a и c , если $b = -1, x_1 = 3, x_2 = -4$;
в) a и b , если $c = 4, x_1 = -2, x_2 = -0,25$;
г) a и c , если $b = 6, x_1 = 3, x_2 = -4$.

В32. Найдите a , при котором один из корней квадратного уравнения $2x^2 + ax + 3a = 0$ равен 3.

В33. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найдите $x_1^3 + x_2^3$, не вычисляя этих корней.

В34. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найдите $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

В35. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $6x^2 + x - 2 = 0$. Не решая уравнения, вычислите: а) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$; б) $(x_1^2 + x_2^2)^2$.

В36. Выразите через коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

- а) квадрат суммы его корней;

- б) квадрат разности его корней;
 в) сумму квадратов его корней;
 г) сумму кубов его корней.

В37. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 - 5x - 4 = 0$. Найдите:
 а) $x_1^4 x_2 + x_1 x_2^4$; б) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

В38. Не используя формулу корней, найдите корни квадратного уравнения:

- а) $x^2 - 88x + 780 = 0$; б) $x^2 - 26x + 120 = 0$;
 в) $x^2 - 26x + 105 = 0$; г) $x^2 + 35x - 114 = 0$.

В39. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $-2x^2 + 5x + 18$; б) $15y^2 + y - 6$; в) $-12m^2 + 5m + 3$;
 г) $3x^2 + 0,9x - 2,1$; д) $5k^2 + 8k + 3,2$; е) $3p^2 - 0,27$.

В40. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $2x^2 + 3x + 1$; б) $3y^2 + 7y - 6$; в) $-4z^2 + 11z + 3$;
 г) $3a^2 + 7a + 2$; д) $3 - 11m + 6m^2$; е) $5b^2 - 7b + 2$;
 ж) $2 + 9n + 7n^2$; з) $2 + 3x - 5x^2$.

В41. Разложите на множители выражения:

- а) $7x + 23\sqrt{x} + 16$; б) $3x - 10\sqrt{x} + 3$;
 в) $9x + 4\sqrt{x} - 5$; г) $2x^3 - 5x\sqrt{x} + 2$.

В42. Представьте в виде произведения многочленов первой степени:

- а) $12x^3 - 22x^2 - 20x$; б) $80my^2 - 12my - 8m$;
 в) $30x^3 + 5x^2 - 60x$; г) $20km^2 - 92km - 40k$.

В43. Сократите дробь:

- а) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 3x}$; б) $\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 4}$; в) $\frac{5x^2 + x - 4}{x^2 + x}$; г) $\frac{x + 1}{4x^2 + x - 3}$.

В44. Сократите дробь:

- а) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 7x - 30}$; б) $\frac{6x^2 + 7x - 3}{2 - x - 15x^2}$; в) $\frac{6x^2 - 19x + 13}{2x^2 + 7x - 9}$; г) $\frac{21x^2 + x - 2}{2 + 5x - 3x^2}$.

В45. Докажите, что ни при каком значении b корни уравнения:

- а) $x^2 + bx - 3 = 0$ не могут иметь одинаковых знаков;
 б) $2x^2 + bx + 5 = 0$ не могут иметь разных знаков.

В46. Определите, в каком уравнений корни имеют разные знаки, а также какой из корней (положительный или отрицательный) больше по модулю:

- а) $4x^2 - 11x - 3 = 0$; б) $-8z^2 - 2z + 3 = 0$;
 в) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$; г) $2x^2 - 10x - 5 = 0$.

B47. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $2px^2 + (p^2 - 9)x - 5p + 2 = 0$ являются противоположными числами. Найдите эти числа.

B48. Дано уравнение $x^2 - (p + 1)x + (2p^2 - 9p - 12) = 0$. Известно, что произведение его корней равно -21 . Найдите значения параметра p .

B49. Разность корней уравнения $2x^2 - 15x + p = 0$ равна $2,5$. Найдите значение параметра p и корни уравнения.

B50. При каком значении p отношение корней квадратного уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4 ?

B51. Найдите значение b , при котором один из корней уравнения $2x^2 - bx + 3 = 0$ в 6 раз больше другого.

B52. Сумма квадратов корней квадратного уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна $1,75$. Найдите числовое значение a .

B53. Решите уравнение $x^2 + px + 35 = 0$ при условии, что сумма квадратов корней равна 74 .

B54. В уравнении $2x^2 - 11x + m = 0$ найдите m , если $2\alpha - \beta = 2$, где α и β – корни уравнения.

B55. Докажите, что если уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{Z}$, имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

B56. Найдите все целые значения p , при которых данное уравнение имеет целые корни: а) $x^2 + px + 10 = 0$; б) $x^2 + px - 8 = 0$; в) $x^2 + px + 3 = 0$; г) $x^2 + px - 32 = 0$.

B57. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

B58. Числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 2000x + 1999 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого $-x_1$ и $-x_2$.

B59. Составьте квадратное уравнение, корни которого:

а) равны соответственно сумме и произведению корней уравнения $3x^2 + 2x - 15 = 0$;

б) меньше корней уравнения $2x^2 - 13x + 3 = 0$ в 2 раза.

B60. Составьте квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, если x_1

и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

B61. Составьте квадратное уравнение с корнями $(a + b)^2$ и $(a - b)^2$, если a и b – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

В62. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_2 и x_2 . Запишите уравнение, корни которого равны: а) mx_1 и mx_2 ; б) $\frac{m}{x_1}$ и $\frac{m}{x_2}$.

Задачи трудные

Г16. Определите коэффициенты квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ так, чтобы его корни были равны p и q .

Г17. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известен один из его корней $x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Г18. При каком значении k у уравнения $kx^2 + 12x - 3 = 0$ есть корень, равный $\frac{1}{5}$?

Г19. При каких значениях n один из корней квадратного уравнения $x^2 - 8x + 4n^2 - 1 = 0$ равен 0?

Г20. Какая зависимость существует между коэффициентами p и q уравнения $x^2 + px + q = 0$, если один из его корней равен -1 ?

Г21. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Не решая уравнения, выразите через a , b и c следующие суммы: а) $x_1^4 + x_2^4$; б) $x_1^6 + x_2^6$.

Г22. Буквами α и β обозначены корни уравнения $15x^2 - 4x - 2 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения: а) $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$; б) $(\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta$; в) $2(\alpha - \beta)^2 + 5$; г) $\frac{1}{3}(\alpha - \beta)^2 - \alpha\beta$.

Г23. Решите уравнение:

а) $1999x^2 - 2001x + 2 = 0$; б) $(x - 3)(x - 4)(x - 7)(x - 8) = 12$.

Г24. Разложите на множители:

а) $3x^3 - 9x^2 + 6x$; в) $x^3 - 9x^2 + 18x - ax^2 - 9ax - 18a$;
б) $y^3 + 4y^2 - 32y$; г) $2y^3 + my^2 + 6y^2 + 3my - 20y - 10m$.

Г25. Разложите на множители:

а) $(a + b)^2 - 5(a + b) - 84$; в) $(3 - y)^2 - 2(3 - y) - 35$;
б) $(m + n)^2 + 3(m + n) + 2$; г) $(1 - x)^2 - 6(1 - x) + 8$.

Г26. Разложите на множители:

а) $a^3 - 16ab - 3b^2$; в) $n^2 + 14an + 24a^2$;
б) $x^2 + 21xy + 20y^2$; г) $a^2 - 9ac - 36c^2$.

Г27. Сократите дробь:

а) $\frac{15mx^2 - 22mx + 8m}{60x^2 - 38x - 8}$; б) $\frac{18ay^2 + 39ay - 15a}{24ay^2 + 42ay - 45a}$.

Г28. В каких случаях сумма и произведение корней приведённого квадратного уравнения являются противоположными числами?

Г29. Найдите условие, при котором разность корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна m .

Г30. При каком значении λ корни уравнения $(2\lambda - 1)x^2 + (5\lambda + 1)x + (3\lambda + 1) = 0$ относятся как $3 : 2$?

Г31. Не решая уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$, найдите, при каком значении a один из корней в 2 раза больше другого.

Г32. При каком значении t один из корней уравнения $x^2 - 12x + t = 0$ является квадратом другого корня?

Г33. Дано уравнение $x^2 + (3p - 5)x + (3p^2 - 11p - 6) = 0$. Известно, что сумма квадратов его корней равна 65. Найдите значение параметра p и корни уравнения.

Г34. При каких a сумма корней уравнения $x^2 - 2ax + (2a - 1) = 0$ равна сумме квадратов корней?

Г35. Какому условию удовлетворяют коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$, если $\alpha = \frac{\beta + 2}{2\beta - 1}$, где α и β – корни уравнения.

Г36. Найдите условие, при котором разность квадратов корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $\frac{c^2}{a^2}$.

Г37. Найдите коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$ при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

Г38. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Составьте новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

Г39. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найдите p и q , если известно, что $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ являются корнями уравнения $x^2 - p^2x + pq = 0$.

Г40. При каком значении n один из корней уравнения $x^2 - 7x + 2n = 0$ в 2 раза больше одного из корней уравнения $x^2 - 5x + n = 0$?

Г41. Обозначим через α и β корни уравнения $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Не решая данного уравнения, составьте новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны $\frac{\alpha}{\beta-1}$ и $\frac{\beta}{\alpha-1}$.

Задачи очень трудные

Д1. Найдите соотношение между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если один корень вдвое больше другого.

Д2. Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Составьте новое квадратное уравнение, корнями которого являются сумма квадратов и сумма кубов корней данного уравнения.

