Заочный
физико-математический
лицей «Авангард»

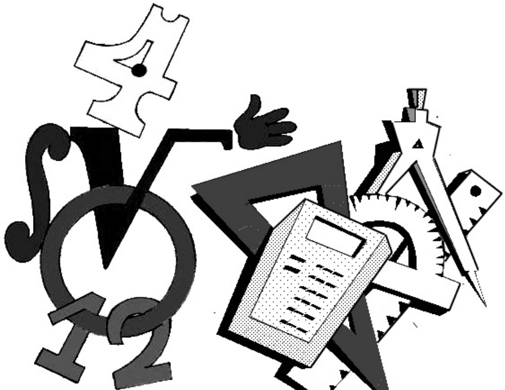
ШКОЛА-ИНТЕРНАТ
"ИНТЕЛЛЕКТУАЛ"

МАТЕМАТИКА

6

Экспериментальный учебник

Часть 2



МОСКВА 2013

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ШКОЛА-ИНТЕРНАТ
"ИНТЕЛЛЕКТУАЛ"

Заочный физико-математический лицей
«Авангард»

Е. В. Рябокобыленко, Е. Н. Филатов

МАТЕМАТИКА
6

Экспериментальный учебник

Часть **2**

Под редакцией Е.Н. Филатова

МОСКВА 2013

Рябокобыленко Е.В., Филатов Е. Н. **МАТЕМАТИКА-6**: Экспериментальный учебник. Часть 2./ Под ред. Е.Н. Филатова. – М.: АНО ЗФМЛ "Авангард", 2013. – 268 с.

Учебник предназначен для углубленного изучения математики в 6-м классе. Главная цель учебника – научить ребят самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» - краткие рекомендации к их решению и ответы.

ISBN

§ 5. ЦЕЛАЯ СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

Вспомним, что такое натуральная степень натурального числа.

Рассмотрим в качестве примера произведение: $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$. Здесь число 2 повторяется сомножителем 6 раз. Математики договорились, что такое произведение можно для удобства кратко записывать так: $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^6$ (читается: «два в шестой степени».)

В этой записи 2 называется ***основанием степени***, число 6, которое показывает, сколько раз число 2 повторяется сомножителем, называется ***показателем степени***, а само выражение 2^6 – «просто» ***степенью***. В общем виде можно записать так:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{сомножителей}} = a^n. \tag{5.1}$$

Здесь a – основание степени, n – показатель степени, a^n – «просто» степень.

Читатель: А может ли показатель степени быть равным единице?

Автор: Тут надо ***договориться***! Ведь на самом деле не вполне понятно, что значит: взять, например, число 2 сомножителем ОДИН РАЗ! Ясно, что для операции умножения нужно уж никак не меньше двух сомножителей! Но математики ***договорились***, что им будет ***удобно*** (почему – выясним в дальнейшем!), если любое число в первой степени мы будем считать равным самому этому числу:

$$a^1 = a. \tag{5.2}$$

Учтите, что формула (5.2) ниоткуда не следует! Это ***определение*** 1-й степени любого числа!

Читатель: А может ли показатель степени быть равным нулю?

Автор: Тут, на первый взгляд, все ещё непонятнее. Как это: ноль раз (то есть ни разу!) взять, например, число 2 сомножителем? Но и здесь «работает» договоренность математиков! Оказалось ***удобным*** (почему – обязательно выясним!) считать, что любое число, кроме нуля, в степени ноль равно единице:

$$a^0 = 1 \ \ (a \neq 0). \tag{5.3}$$

Читатель: А до чего же договорились математики по поводу нуля в нулевой степени?

Автор: Они пришли к выводу, что это примерно то же самое, что и 0:0, то есть ***непонятно что***! Поэтому выражение 0^0 считается ***неопределенным***. Почему? Со временем обязательно разберемся! А теперь решим задачу.

Задача 5.1. а) Запишите произведение (–3,5)·(–3,5)·(–3,5) в виде степени, укажите основание и показатель степени. б) Запишите произведение $a(-5)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot a$ в виде произведения степеней, укажите основание и показатель каждой степени. в) Представьте степень $(-y/2)^k$ в виде произведения одинаковых множителей.

Решение.

а) (–3,5)·(–3,5)·(–3,5). Данное произведение состоит из трех сомножителей, каждое из которых равно (–3,5). Значит, *основание степени* равно (–3,5), *показатель степени* равен 3, а само произведение можно записать в виде:

$$(-3{,}5)\cdot(-3{,}5)\cdot(-3{,}5)=(-3{,}5)^3.$$

б) $a\cdot(-5)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot a$. Перепишем наше произведение в виде: $a\cdot(-5)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot a = (-5)\cdot(a\cdot a)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)$. Мы видим, что у нас получилось произведение шести сомножителей, один из которых (–5) присутствует в единственном числе, сомножители a повторяются два раза, а сомножитель $\left(\frac{7}{9}\right)$ повторяется 3 раза. Значит, $(-5) = (-5)^1$; $(a\cdot a) = a^2$;

$\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{7}{9}\right)^3$. Таким образом:

у степени $(-5)^1$: (-5) – основание, а 1 – показатель;

у степени a^2: a – основание, 2 – показатель степени;

у степени $\left(\frac{7}{9}\right)^3$: $\left(\frac{7}{9}\right)$ – основание, а 3 – показатель степени, а все выражение может быть представлено в виде:

$$a\,(-5)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)\cdot a=(-5)\cdot a^2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3 .$$

в) Согласно формуле (5.1)

$$(-y/2)^k=\underbrace{\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{y}{2}\right)}_{k \text{ раз}}.$$

Ответ:

а) $(-3{,}5)^3$; б) $(-5)^1\cdot a^2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^3$; в) $\underbrace{\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{y}{2}\right)}_{k \text{ раз}}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А1. Запишите данное произведение в виде степени, укажите основание и показатель степени: а) $15\cdot15\cdot15\cdot15\cdot15$;

б) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $(-p)\cdot(-p)\cdot(-p)\cdot(-p)\cdot(-p)$;

г) $(a-b)\cdot(a-b)$; д) $(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)\cdot(-kl)$.

А2. Представьте в виде произведения одинаковых множителей: а) 5^3; б) $(-8)^4$; в) x^5; г) $(k-l-m)^2$.

Б1. Запишите данное произведение в виде степени, укажите основание и показатель степени: а) $\underbrace{6\cdot6\cdot\ldots\cdot6}_{a \text{ множителей}}$; б) $\underbrace{(-7)\cdot(-7)\cdot\ldots\cdot(-7)}_{n \text{ множителей}}$;

в) $\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{l \text{ множителей}}$; г) $\underbrace{(xy)\cdot(xy)\cdot\ldots\cdot(xy)}_{z \text{ множителей}}$; д) $\underbrace{(t+n)\cdot(t+n)\cdot\ldots\cdot(t+n)}_{p \text{ множителей}}$.

В1. Запишите данное произведение в виде произведения степеней, укажите основание и показатель каждой степени:

а) $3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7$; б) $a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$; в) $\frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{p}{q}$;

г) $t \cdot t \cdot \frac{3}{8} \cdot t \cdot (-1,21) \cdot t \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot (-1,21)$.

Прежде, чем мы приступим к решению следующей задачи, составим таблицу степеней для первых 10 натуральных чисел с показателями степени от 1 до 5.

Таблица 5.1

Основание степени	Показатель степени натуральных чисел				
	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32
3	3	9	27	81	243
4	4	16	64	256	1024
5	5	25	125	625	3125
6	6	36	216	1296	7776
7	7	49	343	2401	16807
8	8	64	512	4096	32768
9	9	81	729	6561	59049
10	10	100	1000	10000	100000

Задача 5.2. Вычислите значения степеней: а) 5^4; б) $(-1)^{100}$; в) 10^6; г) 81^0; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; е) $(-0,2)^5$; ж) $\left(1\frac{1}{4}\right)^5$.

Решение.

а) 5^4. Достаточно воспользоваться нашей таблицей 5.1: на пересечении 5-й строки и 4-го столбца стоит искомое значение степени: 625.

б) $(-1)^{100}$. Это – произведение ***четного*** числа отрицательных чисел, значит, данное произведение положительно, а по модулю оно равно 1, то есть $(-1)^{100} = 1$.

в) $10^6 = (10\cdot10\cdot10)\cdot(10\cdot10\cdot10) = 1000\cdot1000 = 1\,000\,000$. Заметим, что показатель степени n в выражении 10^n показывает количество нулей после 1 в позиционной записи данного числа (в нашем случае $n = 6$).

г) $81^0 = 1$ (по определению нулевой степени).

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot1}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{81}$.

е) $(-0{,}2)^5 = (-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)$. Мы имеем произведение нечетного числа отрицательных сомножителей, значит, наше выражение имеет знак минус. Модуль нашего выражения равен:

$$(0{,}2)^5 = (0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2)\cdot(0{,}2\cdot0{,}2) = 0{,}008\cdot0{,}04 = 0{,}00032.$$

Значит, $(-0{,}2)^5 = -0{,}00032$.

ж) $\left(1\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^5 = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5^5}{4^5}$. По таблице 5.1 находим: $5^5 = 3125$; $4^5 = 1024$. Тогда $\frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$.

Ответ: а) 625; б) 1; в) 1 000 000; г) 1; д) $\frac{1}{81}$; е) 0,00032; ж) $\frac{3125}{1024}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А3. Вычислите: а) 1^4; б) 2^3; в) 7^0; г) 0^6; д) $(-3)^2$; е) 10^4; ж) $(-1)^7$; з) $\left(\frac{5}{9}\right)^1$.

Б2. Вычислите: а) $(-0{,}9)^3$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^2$; в) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^4$.

Как определить знак степени?

Задача 5.3. Определите знак выражения: а) $\left(-\frac{2}{7}\right)^7$; б) $(-17)^{18}\cdot(-17)^{93}$; в) $3\cdot(-1)^n+2$.

Решение.

а) $\left(-\frac{2}{7}\right)^7$. У нас нечетное число (7) отрицательных сомножителей, значит, произведение имеет знак минус: $\left(-\frac{2}{7}\right)^7<0$.

б) Первый сомножитель $(-17)^{18}$ представляет собой четное число отрицательных сомножителей, значит, $(-17)^{18}>0$, а второй сомножитель $(-17)^{93}$ представляет собой нечетное число отрицательных сомножителей, значит, $(-17)^{93}<0$. Произведение положительного и отрицательного чисел есть число отрицательное, значит, $(-17)^{18}\cdot(-17)^{93}<0$.

в) $3\cdot(-1)^n+2$. Если n – число четное, то $(-1)^n$ – произведение четного числа отрицательных чисел, а значит, число положительное: $(-1)^n=1$. Тогда $3\cdot(-1)^n+2=3\cdot1+2=5>0$.

Если же n – число нечетное, то $(-1)^n$ – произведение нечетного числа отрицательных чисел, а значит, число отрицательное: $(-1)^n=-1$. Тогда $3\cdot(-1)^n+2=3\cdot(-1)+2=-3+2=$ $=-1<0$.

Ответ: а) $\left(-\frac{2}{7}\right)^7<0$; б) $(-17)^{18}\cdot(-17)^{93}<0$; в) при четных n выражение положительное, при нечетных – отрицательное.

СТОП! Решите самостоятельно.

А4. Определите знак выражения: а) $(-32)^{29}$, б) $\left(-5\frac{2}{3}\right)^{16}$.

Б3. Определите знак выражения:

а) $(-24)^2\cdot(-24)^{19}$; б) $\left(-\frac{15}{19}\right)^{13}\cdot\left(-\frac{15}{19}\right)^{103}$; в) $(-1{,}3)^6\cdot(-3)^{13}$.

В2. Определите знак выражения: а) $(-1)^k$; б) $(-1)^{k+1}$; в) $(-1)^t + 1^t$.

Как сравнить две степени?

Задача 5.4. Что больше: а) 2^5 или 2^6; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; в) $(-1)^5$ или $(-1)^4$; г) $(-2)^n$ или $(-3)^{n+1}$?

Решение. а) 2^5 или 2^6. Очевидно, что $2^5 < 2^6$, так как $2^6 = 2^5\cdot 2$, то есть 2^6 в 2 раза больше, чем 2^5.

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^6$. Заметим, что $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$. Поскольку при умножении на 1/2 величина числа уменьшается в два раза, то ясно, что $\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^6$.

в) $(-1)^5$ или $(-1)^4$. Поскольку $(-1)^5 < 0$, а $(-1)^4 > 0$, то $(-1)^4 > (-1)^5$.

г) $(-2)^n$ или $(-3)^{n+1}$. Тут все зависит от четности числа n. Рассмотрим два случая:

1. Если n – число четное, то $(n+1)$ – нечетное, и $(-2)^n > 0$, а $(-3)^{n+1} < 0$ и $(-2)^n > (-3)^{n+1}$.

2. Если n – число нечетное, то $(n+1)$ – четное, и $(-2)^n < 0$, а $(-3)^{n+1} > 0$ и $(-2)^n < (-3)^{n+1}$.

Ответ: а) $2^5 < 2^6$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^6$; в) $(-1)^4 > (-1)^5$; г) 1. Если n – число четное, то $(-2)^n > (-3)^{n+1}$. 2. Если n – число нечетное, то $(-2)^n < (-3)^{n+1}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б4. Сравните: а) $\left(-\frac{12}{13}\right)^7$ и 0; б) $(–8,7)^{10}$ и $(–8,7)^{17}$; в) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{11}$ и $-\left(\frac{4}{7}\right)^{11}$; г) $(-63)^{10}$ и $-(63)^{10}$.

Б5. Сравните: а) $(–17,2)^2$ и $(–17,2)^3$; б) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^4$; в)$(–0,3)^3$ и $(–0,3)^6$; г) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$ и $\left(-\frac{1}{5}\right)^4$.

В3. Что больше: а) 2^n или 2^{n+1}; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\ddot{\imath}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\ddot{\imath}+1}$.

В4. Что больше: $(–2)^n$ или $(–2)^{n+1}$? Рассмотрите разные n.

Вычисляем арифметические выражения

Задача 5.5. Вычислите значение арифметического выражения: $\frac{14}{3^3}+(-1)^{12}\cdot 1,2^0-\frac{(0,2)^4}{(0,1)^4}\cdot\frac{1}{(-3)^3}$.

Решение.

1. Прежде всего, заметим, что $(-1)^{12}=1$, а $1,2^0=1$ (по определению нулевой степени).

2. Вычислим значение дробного выражения: $\frac{(0,2)^4}{(0,1)^4}$.

Чтобы избавиться от десятичных дробей, умножим числитель и знаменатель на 10^4, получим:

$$\frac{(0,2)^4}{(0,1)^4}=\frac{(0,2)^4\cdot 10^4}{(0,1)^4\cdot 10^4}=\frac{(0,2\cdot 10)\cdot(0,2\cdot 10)\cdot(0,2\cdot 10)\cdot(0,2\cdot 10)}{(0,1\cdot 10)\cdot(0,1\cdot 10)\cdot(0,1\cdot 10)\cdot(0,1\cdot 10)}=$$

$$=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=2^4=16.$$

3. Заметим, что $\left(-3\right)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -3^3$.

Теперь подставим полученные значения в наше арифметическое выражение и получим:

$$\frac{14}{3^3}+\left(-1\right)^{12}\cdot 1,2^0-\frac{\left(0,2\right)^4}{\left(0,1\right)^4}\cdot\frac{1}{\left(-3\right)^3}=\frac{14}{3^3}+1\cdot 1-16\cdot\frac{1}{-3^3}=$$

$$=\frac{14}{3^3}+\frac{16}{3^3}+1=\frac{30}{3^3}+1=\frac{\cancel{3}\cdot 10}{\cancel{3}\cdot 9}+1=\frac{10}{9}+1=2\frac{1}{9}.$$

Ответ: $2\frac{1}{9}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б6. Вычислите: а) $1^8\cdot(-1)^7\cdot 0^2\cdot 1^9$; б) $0^{12}+1^{42}+(-1)^{11}$; в) $-1^3+(-2)^3$; д) $(10-3)^2$.

В5. Вычислите: а) $\frac{-2^5}{(-9)^2}$; б) $3600\cdot(-0,1)^3$; в) $2\cdot 3^4 - 3\cdot 2^4$; г) $(-0,5)^2\cdot(-2)^2$; д) $14,1^0\cdot\frac{\left(0,02\right)^3}{\left(-0,01\right)^3}$.

Вычисляем значения алгебраических выражений

Напомним, что алгебраическим выражением называется определенная последовательность арифметических действий с величинами, заданными ***буквами***.

Если вместо букв подставить их значения, то ***алгебраическое*** выражение превратится в ***арифметическое*** выражение. А вычислять значения арифметических выражений мы уже научились.

Задача 5.6. Вычислите значения алгебраических выражений: а) b^3-2b^2+1 при $b=-\frac{1}{2}$; б) $\left(a^2-b^2\right)+\left(a-b\right)^2$ при $a=4; b=-2$; в) $0,3\cdot 2^n-0,5\cdot 2^{n+1}-15,6$ при $n=5$.

Решение.

а) b^3-2b^2+1 при $b=-\dfrac{1}{2}$. Подставим в наше алгебраическое выражение значение $b=-\dfrac{1}{2}$, получим:

$$b^3-2b^2+1=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1.$$

Нам остается только вычислить значение полученного арифметического выражения:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=-\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{4}+1=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+1=-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)+1=$$

$$=-\left(\frac{1}{8}+\frac{1\cdot4}{2\cdot4}\right)+1=-\left(\frac{1}{8}+\frac{4}{8}\right)+1=-\frac{5}{8}+1=-\frac{5}{8}+\frac{8}{8}=\frac{3}{8}.$$

б) $\left(a^2-b^2\right)+\left(a-b\right)^2$ при $a=4;b=-2$. Подставим значения $a=4;b=-2$ в наше алгебраическое выражение, получим:

$$\left(a^2-b^2\right)+\left(a-b\right)^2=\left(4^2-(-2)^2\right)+\left(4-(-2)\right)^2.$$

Теперь вычисляем значение полученного арифметического выражения:

$$\left(4^2-(-2)^2\right)+\left(4-(-2)\right)^2=\left(16-4\right)+(4+2)^2=12+6^2=$$

$$=12+36=48.$$

в) $0,3\cdot2^n-0,5\cdot2^{n+1}-15,6$ при $n=5$. Подставим значение $n=5$ в данное алгебраическое выражение, получим арифметическое выражение и вычислим его значение:

$$0,3\cdot2^n-0,5\cdot2^{n+1}-15,6=0,3\cdot2^5-0,5\cdot2^{5+1}-15,6=$$

$$=0,3\cdot32-0,5\cdot64-15,6=9,6-32-15,6=\left(9,6-15,6\right)-32=$$

$$=-6-32=-38.$$

Ответ: а) $\dfrac{3}{8}$; б) 48; в) –38.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б7. Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных: а) x^2, $-x^2$, $(-x)^2$ при $x = 9; -6; -\frac{1}{4}$; б) $d^4 - d^2 + d + 1$ при $d = -1; 0; 1$.

В8. Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных: а) $-a^4 + 2a^2 - 1$ при $a = -3; 0; 2; \frac{1}{3}$; б) $-2b^4 + b^3 - 0{,}5b$ при $b = -1; 0; 4; \frac{1}{2}$.

Г1. Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных: а) $-(a + b)^2 + (-a)^3 - b^4$ при: 1) $a = 7$, $b = -9$; 2) $\grave{a} = -\frac{1}{2}$, $b = -0{,}5$; б) $0{,}8 \cdot 3^{n+1} - (0{,}2 \cdot 3)^{n-1} - 2 \cdot 3^n$ при $n = 3$.

Можно ли определить ЗНАК алгебраического выражения, не вычисляя его значения?

Задача 5.7. Укажите, какие из приведенных алгебраических выражений всегда (то есть при любых значениях букв): а) положительны; б) не отрицательны; в) не положительны; г) отрицательны?

1) a^2; 2) $(x+1)^2$; 3) x^8+1; 4) $x^2+(y+1)^2$;

5) $-(a-x)^2-1$; 6) $-(a+b)^4$; 7) $-x^3-1$; 8) $(-1)^{2n}$.

Решение.

Читатель: По-моему, если любое число (положительное или отрицательное), умножить само на себя, то всегда получим положительное число. Например: $(-2)\cdot(-2) = +4 > 0$; $2 \cdot 2 = 4 > 0$. А значит, $a^2 > 0$ при любом значении a.

Автор: Это верно, если $a \neq 0$, но если $a = 0$, то и $a^2 = 0$. Поэтому мы лишь можем утверждать, что $a^2 \geq 0$ при ЛЮБОМ значении a, то есть значение выражения a^2 всегда НЕОТРИЦАТЕЛЬНО (оно либо положительно, либо равно нулю).

Читатель: Тогда и $(x+1)^2 \ge 0$, потому что при $x = -1$ выражение $(x+1)^2 = (-1+1)^2 = 0^2 = 0$, а при любых других значениях x выражение $(x+1)^2 > 0$, то есть алгебраическое выражение $(x+1)^2$ тоже всегда НЕОТРИЦАТЕЛЬНО.

Автор: Верно! Теперь заметим, что выражение $x^2+(y+1)^2$ представляет собой сумму двух НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ выражений, поэтому оно тоже должно быть неотрицательным. В самом деле, при $x=0$; $y=-1$ оно равно нулю: $x^2+(y+1)^2 = 0^2+(-1+1)^2 = 0+0=0$, а при любых других значениях x и y это выражение положительно. Значит, это выражение всегда НЕОТРИЦАТЕЛЬНО.

Читатель: А вот выражение x^8+1 всегда строго ПОЛОЖИТЕЛЬНО, потому что $x^8 \ge 0$ для любых значений x. Но даже если $x=0$, $x^8+1=0^8+1=0+1=1>0$.

Автор: Согласен. А что Вы скажете про выражение $-(a-x)^2-1$?

Читатель: Я думаю, что это выражение всегда ОТРИЦАТЕЛЬНО. Потому что $(a-x)^2 \ge 0$, а значит, $-(a-x)^2 \le 0$. То есть самое большое значение, которое может принять выражение $-(a-x)^2$, это нуль! (Если $a=x$.) Значит, $-(a-x)^2-1$ всегда меньше нуля.

Автор: Верно. А какой знак имеет выражение $-(a+b)^4$?

Читатель: Я думаю, что это выражение отрицательно, если $a+b \ne 0$, то есть $a \ne -b$. А вот если $a=-b$, то $-(a+b)^4 = -(-b+b)^4 = -0^4 = 0$. Например, если $b=1$; $a=-1$, то $-(a+b)^4 = -(-1+1)^4 = -0^4 = 0$. Значит, в общем случае можно утверждать, что выражение $-\left(a+b\right)^4$ всегда НЕПОЛОЖИТЕЛЬНО (оно либо отрицательно, либо равно нулю).

Автор: Согласен. Нам осталось разобраться еще с двумя выражениями: $-x^3-1$ и $\left(-1\right)^{2n}$.

Читатель: По-моему, выражение $\left(-1\right)^{2n}=1>0$ при любом значении n, потому что (–1) в ***четной*** степени положительно, так как произведение четного числа отрицательных чисел есть число положительное. А вот $-x^3-1$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Например, при $x=1$: $-x^3-1=-1^3-1=-1-1=-2<0$, а при $x=-2$ $-x^3-1=-(-2)^3-1=-(-8)-1=8-1=7>0$, поэтому данное выражение нельзя назвать ни отрицательным, ни положительным, ни неотрицательным, ни неположительным.

Автор: Совершенно верно!

Ответ: а) положительные выражения: x^8+1; $\left(-1\right)^{2n}$; б) неотрицательные выражения: a^2; $\left(x+1\right)^2$; $x^2+\left(y+1\right)^2$; в) неположительное выражение: $-\left(a+b\right)^4$; г) отрицательное выражение: $-\left(a-x\right)^2-1$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б8. Вместо многоточия поставьте нужный знак неравенства:

а) a^2...0; б) $-a^2$...0; в) $(x+5)^2$...0; г) $-3(x-7)^2$...0.

В7. Из данных выражений выберите те, которые при любом значении переменной a принимают положительные значения:

а) a^2; б) a^2+1; в) $3+6a^2$; г) $(\grave{a}+6)^2$; д) a^4+8; е) a^6+a^2.

Г2. Вместо многоточия поставьте знак неравенства:

а) $(-1)^{2n+1}(x^2+a^2)...0$; б) $\left(-1\right)^{2n}+2(-1)^{2n+1}+x^2+1...0$.

Как записать любое число в виде суммы степеней числа 10 с числовыми коэффициентами?

Автор: Чтобы было понятно, о чем идет речь, начнем с конкретного примера. Вычислим значение выражения: $3\cdot10^5+7\cdot10^3+8\cdot10^1+9\cdot10^0$.

Читатель: $10^0=1$; $10^1=10$; $10^3=1000$; $10^5=100\,000$, тогда

$$3\cdot10^5+7\cdot10^3+8\cdot10^1+9\cdot10^0=3\cdot100000+7\cdot1000+8\cdot10+9\cdot1=$$
$$=300\,000+7\,000+80+9=307089.$$

Автор: Верно! А теперь давайте попробуем решить обратную задачу: представим число 3 006 321 в виде суммы степеней числа 10, умноженных на однозначные множители (коэффициенты).

Читатель: Хорошо! Давайте для начала разобьем наше число на сумму «круглых» слагаемых, таких, чтобы в каждом слагаемом все цифры, кроме первой, были равны нулю:

$$3\ 006\ 321=3\ 000\ 000+6\ 000+300+20+1,$$

и вспомним, что степень 10^n записывается как единица, за которой стоят n нулей, тогда получим:

$$3\ 006\ 321=3\ 000\ 000+6\ 000+300+20+1=$$
$$=3\cdot1000\,000+6\cdot1000+3\cdot100+2\cdot10+1=$$
$$=3\cdot10^6+6\cdot10^3+3\cdot10^2+2\cdot10^1+1\cdot10^0.$$

Автор: Совершенно верно!

СТОП! Решите самостоятельно.

А5. Вычислите: а) $5\cdot10^2+4\cdot10^1+3\cdot10^0$; б) $7\cdot10^4+6\cdot10^3+4\cdot10^2+3\cdot10^1+2\cdot10^0$.

А6. Представьте числа в виде суммы степеней числа 10 с некоторыми коэффициентами: а) 3; б) 4789.

Б9. Вычислите: а) $1\cdot10^5+3\cdot10^2+8\cdot10^1+7\cdot10^0$; б) $3\cdot10^6+2\cdot10^3+1$.

Б10. Представьте числа в виде суммы степеней 10 с некоторыми коэффициентами: а) 5000273; б) 702030.

Квадрат и куб данного числа

Если какое-то число возвели во вторую степень, то говорят, что данное число «возвели в квадрат». Иными словами, выражение 3^2 можно прочитать как «три во второй степени», а можно сказать и так: «три в квадрате».

Читатель: А причем тут квадрат?

Автор: Допустим, у нас есть квадрат, сторона которого равна a = 3 см (рис. 5.1). Тогда площадь этого квадрата будет равна $3 \times 3 = 3^2 = 9$ квадратных сантиметров. Поэтому возвести число в квадрат – это значит вычислить площадь такого квадрата, сторона которого равна данному числу.

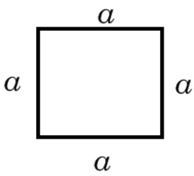


Рис. 5.1

Запомним: a^2 – читается как «а в квадрате».

Если же какое-то число возвели в третью степень, то говорят, что данное число «возвели в куб». То есть выражение 2^3 можно прочитать и как «два в третьей степени», и как «два в кубе».

Напомним, что куб можно представить себе как ящик, у которого длина, ширина и высота равны между собой (рис. 5.2). Чтобы вычислить объем куба, надо умножить его длину на ширину и на высоту. Допустим, у нас есть куб, сторона которого a = 2 см. Тогда объем этого куба будет равен:

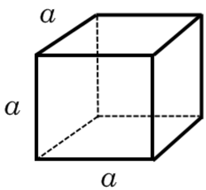


Рис. 5.2

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \text{ кубических сантиметров.}$$

СТОП! Решите самостоятельно.

А7. Возведите в квадрат следующие числа: а) 0; б) 1; в) –4; г) 1,2; д) 0,1; е) $\frac{1}{5}$.

Б11. Возведите в куб следующие числа: а) 0; б) 1; в) –3; г) 0,5; д) 10; е) $-\frac{2}{3}$.

Задача 5.8. Представьте число 64: а) в виде квадрата (то есть степени с показателем 2); б) в виде куба (то есть степени с показателем 3).

Решение.

а) Нам требуется представить число 64 в виде: $64 = a^2$. Если вы еще помните таблицу умножения, то, конечно, согласитесь, что $64 = 8 \times 8 = 8^2$. Значит, $64 = 8^2$.

б) Требуется представить число 64 в виде: $64 = b^3$. Вопрос: чему равно b? Попробуем «на роль b» четверку: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$. Подходит. Значит, $64 = 4^3$.

Ответ: а) $64 = 8^2$; б) $64 = 4^3$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А8. Представьте в виде квадрата следующие числа: а) 49; б) 1 000 000; в) 0,169.

Б12. Представьте в виде куба следующие числа: а) 27; б) –125; в) 0,001; г) –216; д) $\frac{343}{512}$.

Решаем уравнения

Задача 5.9. Представьте в виде: а) степени с ***основанием*** $\frac{1}{3}$ число $\frac{1}{243}$; б) степени с ***показателем*** 5 число –59049.

Решение.

а) По сути дела, с нас спрашивают такое число x, для которого было бы справедливо равенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{243}$, или $\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3}}_{x\ \text{ðàç}} = \frac{1}{243}$, или $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{243}$. Ясно, что если у двух равных дробей равны числители (1=1), то должны быть равными и знаменатели, то есть $3^x = 243$. Теперь воспользуемся таблицей 5.1 и выясним, в какую степень надо возвести число 3, чтобы получить 243? Находим: $3^5 = 243$, значит, $x = 5$.

б) С нас спрашивают такое число *x*, которое при возведении в 5-ю степень равно –59049. То есть нам нужно решить уравнение: $x^5 = -59049$. По таблице 5.1 находим: $9^5 = 59049$. Нетрудно догадаться, что тогда $(-9)^5 = -59049$, потому что $(-9)^5 = (-9)\cdot(-9)\cdot(-9)\cdot(-9)\cdot(-9) = -(9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9) = -9^5 = -59049$, так как произведение нечетного числа отрицательных сомножителей есть число отрицательное. Значит, $x = -9$.

Ответ: а) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$; б) $(-9)^5 = -59049$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б13. Представьте в виде: а) степени с основанием 5 число 625; б) степени с основанием 0,9 число 0,81; в) степени с основанием –2 число –32; г) степени с основанием –0,1 число –0,00001; д) степени с основанием 8 число 32768.

В8. Найдите показатель степени *p*, зная, что: а) $(-0{,}3)^p = -0{,}027$; б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{ð} = 1\frac{7}{9}$.

В9. Найдите *x*, зная, что: а) $2x^3 = 250$; б) $2x^4 = 162$.

Какой цифрой оканчивается степень?

Задача 5.10. На какую цифру оканчиваются следующие арифметические выражения: а) 10^{27}; б) 11^{27}; в) 15^{27}; г) 16^{27}?

Решение.

Автор: Конечно, можно аккуратно, не спеша вычислить все указанные арифметические выражения и посмотреть, какая цифра окажется последней в значении каждого из них. Но, согласитесь, возвести 11 в 27-ю степень – это ОЧЕНЬ трудоемкая задача. А на микрокалькуляторе ее, кстати, и не решишь – не хватит разрядов! Нельзя ли ответить на заданный вопрос, не прибегая к вычислениям?

Читатель: Что касается степени 10^{27}, то – вполне! Ведь 10 в любой натуральной степени n – это единица, за которой стоят n нулей. Значит, 10^{27} оканчивается нулем! А вот про 11^{27} я не берусь что-либо утверждать.

Автор: Давайте немного поэкспериментируем: вычислим «в столбик» 11^2; 11^3; 11^4 и посмотрим, какая цифра у этих чисел будет последней:

$$\begin{array}{r} \times\, 11 \\ \underline{11} \\ 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 11 \\ \underline{11} \\ \times\, 121 \\ \underline{11} \\ 1331 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 11 \\ \underline{11} \\ \times\, 121 \\ \underline{11} \\ \times\, 1331 \\ \underline{11} \\ 14641 \end{array}$$

Итак, $11^2=121$; $11^3=1331$; $11^4=14641$.

Мы видим, что во всех рассмотренных нами случаях степени числа 11 оканчиваются цифрой 1.

Как Вы думаете, какой цифрой оканчиваются степени: $11^5;11^6;...,11^{27}$?

Читатель: По-моему, последняя цифра у любой степени числа 11 всегда будет 1. Потому что последняя цифра произведения определяется произведением ***последних цифр*** сомножителей. А поскольку $11^2= 121$ – оканчивается на 1, то и $11^3=11^2\cdot 11$ имеет на конце цифру 1, а значит, и $11^4=11^3\cdot 11$ оканчивается единицей, и 11^5 и т.д. Следовательно, и 11^{27} оканчивается единицей!

Автор: В правы. Я лишь немного уточню Вашу мысль: последняя цифра произведения двух сомножителей равна ***последней цифре произведения последних цифр сомножителей.*** Например:

- произведение $987\cdot 789$ оканчивается цифрой **3**, потому что $7\cdot 9 = 6\mathbf{3}$;

- произведение $235 \cdot 647$ оканчивается цифрой **5**, потому что $5 \cdot 7 = 35$;
- произведение $999 \cdot 999$ оканчивается цифрой **1**, потому что $9 \cdot 9 = 81$ и т.д.

В справедливости моего утверждения легко убедиться, если рассмотреть процесс умножения «в столбик» двух многозначных чисел.

$$\begin{array}{r} \times 987 \\ 789 \\ \hline 3 \end{array}$$

Проведем, например, умножение $987 \cdot 789$. Первое, что мы делаем – это перемножаем цифры, стоящие в разряде единиц: $7 \times 9 = 63$; 3 пишем в разряд единиц произведения, а 6 идет в разряд десятков произведения.

$$\begin{array}{r} \times 987 \\ 789 \\ \hline +\,8883 \\ +\,7896 \\ 6909 \\ \hline 778743 \end{array}$$

И заметим, что больше в разряде ЕДИНИЦ произведения уже ничего не появится, так и останется та самая тройка, которую мы записали в самом начале.

Вернемся к нашей задаче. Итак, мы выяснили, что 10^{27} оканчивается нулем, а 11^{27} – единицей. А чем оканчивается 15^{25}?

Читатель: $5 \times 5 = 25$, значит, 15^2 оканчивается цифрой 5. Но тогда и $15^3 = 15^2 \cdot 5$ оканчивается цифрой 5, и вообще любая натуральная степень числа 15 оканчивается цифрой 5!

Автор: Верно! А чем оканчивается 16^{27} ?

Читатель: По-моему, здесь все аналогично: $6 \times 6 = 36$, значит, 16^2 оканчивается цифрой 6. Но тогда и $16^3 = 16^2 \cdot 16$ оканчивается цифрой 6. А значит, и любая натуральная степень 16 оканчивается цифрой 6. Следовательно, 16^{27} оканчивается шестеркой!

Автор: Все правильно!

Ответ: а) 0; б) 1; в) 5; г) 6.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б14. Какой цифрой оканчивается число: а) 11^{11}; б) 55^{66}; в) 66^{55}; г) 10^{66}?

В12. Какой цифрой оканчиваются значения арифметических выражений: а) $11^{111} + 55^{555}$; б) $66^{10} + 10^{11} + 11^{19}$; в) $12346 \cdot 9876 + 236^{10}$?

Задача 5.11. Какой цифрой оканчиваются степени: а) 14^{27}; б) 19^{28}?

Решение.

а) 14^{27}.

- $4 \times 4 = 16$, значит, 14^2 оканчивается цифрой 6;
- $6 \times 4 = 24$, значит, 14^3 оканчивается цифрой 4;
- $4 \times 4 = 16$, значит, 14^4 оканчивается цифрой 6;
- $6 \times 4 = 24$, значит, 14^5 оканчивается цифрой 4;
- $4 \times 4 = 16$, значит, 14^6 оканчивается цифрой 6;
- …

Мы видим, что «через раз» степень 14^n оканчивается цифрой 6 и «через раз» – цифрой 4.

Можем даже для наглядности составить таблицу 5.2.

Таблица 5.2

СТЕПЕНЬ	ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА
14^1	4
14^2	6
14^3	4
14^4	6
14^5	4
14^6	6
14^7	4

То есть когда показатель степени n нечетный (1, 3, 5, …), 14^n оканчивается на 4, а когда четный (2, 4, 6. …) – на 6. Спрашивается, на какую цифру оканчивается 14^{27}?

Читатель: Поскольку 27 – число нечетное, то 14^{27} окачивается цифрой 4.

Автор: Совершено верно!

б) 19^{28}.

- $9\times9=81$, значит, 19^2 оканчивается цифрой 1;
- $1\times9=9$, значит, 19^3 оканчивается цифрой 9;
- $9\times9=81$, значит, 19^4 оканчивается цифрой 1;
- $1\times9=9$, значит, 19^5 оканчивается цифрой 9;
- ….

Для наглядности составим таблицу 5.3.

Таблица 5.3

Степень	Последняя цифра
19^1	9
19^2	1
19^3	9
19^4	1
19^5	9
19^6	1
…	…

Видим, что если показатель степени нечетный, то 19^n оканчивается цифрой 9, а если четный – цифрой 1. Поскольку 28 – число четное, то 19^{28} оканчивается цифрой 1.

Ответ: а) 4; б) 1.

СТОП! Решите самостоятельно.

В11. Какой цифрой оканчиваются степени: а) 44^{44}; б) 444^{999}; в) 999^{444}; г) 99^{99}?

Г3. Определите последнюю цифру значения арифметического выражения: а) $999^{444} + 444^{999}$; б) $999^{999} + 444^{444}$; в) $111^{111} + 555^{555} + 999^{999}$?

Задача 5.12. Какой цифрой оканчиваются степени: а) 22^{227}; б) 33^{228}?

Решение.

а) 22^{227}. Будем последовательно вычислять последние цифры степеней числа 22.

1. $22^1 = 22$, значит, степень 22^1 оканчивается цифрой 2;
2. $2\times2=4$, значит, степень 22^2 оканчивается цифрой 4;
3. $4\times2=8$, значит, степень 22^3оканчивается цифрой 8;
4. $8\times2=16$, значит, степень 22^4оканчивается цифрой 6;
5. $6\times2=12$, значит, степень 22^5оканчивается цифрой 2;
6. $2\times2=4$, значит, степень 22^6оканчивается цифрой 4;
7. $4\times2=8$, значит, степень 22^7оканчивается цифрой 8;
8. $8\times2=16$, значит, степень 22^8 оканчивается цифрой 6;
9. $6\times2=12$, значит, степень 22^9оканчивается цифрой 2;

……………………………………………………………………..

Для большей наглядности составим таблицу 5.4.

Таблица 5.4

Степень	Последняя цифра
22^1	2
22^2	4
22^3	8
22^4	6
22^5	2
22^6	4
22^7	8
22^8	6
22^9	2

Заметим, что 22^1 , 22^5 и 22^9 оканчиваются цифрой 2;
22^2и 22^6оканчиваются цифрой 4;
22^3 и 22^7 оканчиваются цифрой 8;
22^4 и 22^8 оканчиваются цифрой 6.

То есть последние цифры как бы идут «четверками»: 2; 4; 8; 6, а затем повторяются.

Теперь давайте попробуем четко сформулировать, у каких степеней числа 22 последняя цифра 2.

Читатель: Во-первых, у 22^1, 22^5 и 22^9, затем, наверное, у $22^{9+4} = 22^{13}$, потом у $22^{13+4} = 22^{17}$ и т.д.

Автор: Можно сказать, что двойка является последней цифрой у степеней с показателем степени $1+4n$, где $n = 0;1;2;3...$

Читатель: Тогда 4 является последней цифрой у степеней с показателем $2+4n$; 8 – у степеней с показателем $3+4n$; 6 – у степеней с показателем $4+4n$.

Автор: Верно! А теперь давайте ответим на вопрос задачи: какой же цифрой оканчивается число 22^{227}?

Читатель: Для этого надо выяснить, какой из четырех формул: $1+4n$; $2+4n$; $3+4n$ или $4+4n$ можно представить число 227.

Автор: Это сделать очень просто: достаточно *разделить 227 на 4 с остатком*. Если в остатке будет 1, значит $227 = 1 + 4n$; если в остатке будет 2, значит, $227=2+4n$; если в остатке будет 3, значит, $227=3+4n$, а если 227 разделится на 4 без остатка, значит, $227=4+4n$.

$$\begin{array}{r|l} 227 & 4 \\ \hline \underline{20} & 56 \\ 27 & \\ \underline{24} & \\ 3 & \end{array}$$

Делим уголком и получаем 227 : 4 = 56 (3 ост.), то есть $227 = 4\cdot 56 + 3$ или $227 = 3+4n$, где $n = 56$.

Следовательно, 22^{227} оканчивается цифрой 8.

б) 33^{228}.

Читатель: Я думаю, надо сразу составить таблицу 5.5 для последних цифр числа 33^n:

1. $3\times3=9 \rightarrow 33^2$ оканчивается цифрой 9;
2. $9\times3=27 \rightarrow 33^3$ оканчивается цифрой 7;
3. $7\times3=21 \rightarrow 33^4$ оканчивается цифрой 1;
4. $1\times3=3 \rightarrow 33^5$ оканчивается цифрой 3;
5. $3\times3=9 \rightarrow 33^6$ оканчивается цифрой 9;
6. …………

По-моему можно сразу записать «закон последней цифры» и для 33^n, и для степени любого числа, которое окачивается цифрой 3 (таблица 5.6).

Таблица 5.5

Степень	Последняя цифра
33^1	3
33^2	9
33^3	7
33^4	1
33^5	3
33^6	9
33^7	7
33^8	1
33^9	3

Таблица 5.6

Формула для показателя степени	Последняя цифра числа 33^n
$1 + 4n$	3
$2 + 4n$	9
$3 + 4n$	7
$4 + 4n$	1

Автор: Верно! Так какой же цифрой оканчивается число 33^{228} ?

Читатель: Разделим 228 на 4, получим 228:4 = 57 (0 ост.).

Автор: Это случай $228 = 4 + 4n$, то есть $224 = 4·57 = 4·(56+1) = =4 + 56·4$.

Читатель: Тогда 33^{228} оканчивается цифрой 1!

Автор: Совершенно верно!

Ответ: а) 8; б) 1.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б15. Какой цифрой оканчиваются числа: а) 222^{222}; б) 222^{333}; в) 333^{222}; г) 333^{333}?

В12. Какой цифрой оканчиваются числа: а) $22^{22}+33^{33}+ 44^{44}$; б) $55^{55}+66^{66}+33^{77}$?

Г4. Какой цифрой оканчиваются числа: а) 777^{77}; б) 77^{228} ?

Как умножить степень на степень?

Читатель: Допустим, надо выполнить умножение: $2^5 \cdot 2^6$. Что получится в результате?

Автор: Вспомним, что $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{5}$; $2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{6}$. Значит, произведение $2^5 \cdot 2^6$ можно записать в следующем виде:

$$2^5 \cdot 2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{6} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{5+6=11} = 2^{11}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении двух степеней с одинаковыми основаниями их показатели складываются: $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$. В общем виде это правило можно записать так:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \qquad (5.4)$$

Задача 5.13. Представьте произведение в виде степени: а) $0,5^3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^7$; б) 216·(–64); в) $3^{n+1} \cdot 27 \cdot 81$.

Решение.

а) $0,5^3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^7$. Воспользуемся формулой (5.4) и получим: $0,5^3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^7 = 0,5^{3+2+7} = 0,5^{12}$.

б) 216·(–64). Посмотрим таблицу 5.1 и выясним, степенями каких чисел являются числа 216 и 64. Видим, что $216 = 6^3$, а $64 = 4^3$. Тогда можем записать:

$$216\cdot(-64) = 6^3\cdot(-4^3) = 6\cdot6\cdot6\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) =$$
$$= 6\cdot(-4)\cdot6\cdot(-4)\cdot6\cdot(-4) = (-24)\cdot(-24)\cdot(-24) = (-24)^3.$$

Итак, мы получили: $216\cdot(-64) = (-24)^3$.

в) $3^{n+1} \cdot 27 \cdot 81$. По таблице 5.1 находим, что $27 = 3^3; 81 = 3^4$, тогда

$$3^{n+1} \cdot 27 \cdot 81 = 3^{n+1} \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{n+1+3+4} = 3^{n+8}.$$

Ответ: а) $0,5^{12}$; б) $(-24)^3$; в) 3^{n+8}.

СТОП! Решите самостоятельно.

А9. Представьте произведение в виде степени: а) $a^3\cdot a^7$; б) $5^7\cdot5$; в) $11^2\cdot11^2\cdot11^2$; г) $(-v^5)\cdot(-v^7)\cdot(-v)$; д) $(ax)^5\cdot(ax)^7\cdot ax$; е) $(a-b)^5\cdot(a-b)^3$.

Б16. Представьте произведение в виде степени: а) $5^8\cdot25$, б) $6^{15}\cdot36$; в) $0,4^5\cdot0,16$.

В13. Представьте произведение в виде степени: а) $2^{n+4}\cdot64$; б) $8\cdot2^{n+1}$.

Угадай число (начинаем решать уравнения)

Задача 5.14. Найдите значения неизвестного числа x:
а) $16^5 \cdot 16^{x+1} = 16^8$; б) $2^x = 2^{2x-2}$; в) $16^5 \cdot x = 16^8$.

Решение. а) $16^5 \cdot 16^{x+1} = 16^8$. Воспользуемся правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями (формула (5.4)), получим: $16^5 \cdot 16^{x+1} = 16^{5+x+1} = 16^{x+6}$, тогда наше уравнение примет вид: $16^{x+6} = 16^8$. Если две степени с одинаковыми основаниями равны, то и показатели этих степеней должны быть равны: $x + 6 = 8 \to x = 8 - 6 \to x = 2$.

Проверим. Левая часть: $16^5 \cdot 16^{x+1} = 16^5 \cdot 16^{2+1} = 16^{5+2+1} = 16^8$; правая часть: 16^8. Все верно.

б) $2^x = 2^{2x-2}$. Пример аналогичен предыдущему: слева и справа от знака равенства стоят степени с одинаковым основанием 2. Ясно, что равенство степеней возможно только при равенстве показателей степени. Значит, $x = 2x - 2$.

Вычтем из обеих частей уравнения $2x$, получим:

$$x = 2x - 2 \to x - 2x = 2x - 2 - 2x \to x - 2x = -2 \to -x = -2.$$

Умножим обе части последнего равенства на (–1) и получим:

$$-x = -2 \to (-1)\cdot(-x) = (-1)\cdot(-2) \to x = 2.$$

Проверим. Левая часть: $2^x = 2^2 = 4$; правая часть: $2^{2x-2} = 2^{2\cdot 2-2} = 2^2 = 4$. Все верно.

в) $16^5 \cdot x = 16^8$. Будем искать решение в виде $x = 16^y$, где y – неизвестное число. Получим:

$$16^5 \cdot 16^y = 16^8 \to 16^{5+y} = 16^8 \to 5 + y = 8 \to y = 3.$$

Тогда $x = 16^y = 16^3$. Проверим. Левая часть: $16^5 \cdot 16^3 = 16^{5+3} = 16^8$; правая часть: 16^8. Все верно.

Ответ: а) $x = 2$; б) $x = 2$; в) $x = 16^3$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б17. Решите уравнение: а) $x\cdot 6^3 = 6^7$; б) $12^2\cdot x = 12^{11}$; в) $x\cdot 5^7 = 5^{13}$; г) $14^6\cdot x = 14^{14}$.

В14. Решите уравнение: а) $3^x = 3^{2x-5}$; б) $3^{x+8} = 27\cdot 3^{2x+4}$.

В15. Подберите показатель m так, чтобы данное равенство было верно при любом значении переменной a: а) $2{,}6a^9\cdot 2a^m = 5{,}2a^{17}$; б) $2{,}6a^{m+1}\cdot 3a^8 = 7{,}8a^{12}$; в) $a^{m+5} = 9a^{3m-3}$.

Как представить число в виде ***произведения степеней простых множителей*?**

Автор: Прежде всего, давайте вспомним, какие числа называются ***простыми.***

Читатель: По-моему, это числа, которые делятся без остатка только на 1 и самих себя. Например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т.д.

Автор: Верно. А если число можно разделить без остатка на какое-нибудь число, не равное единице и самому данному числу, то такое число называется ***составным***. Например, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 и т.д. Замечу также, что число 1 не считается ни простым, ни составным (так уж договорились математики).

Теперь рассмотрим такой вопрос: как нам представить какое-либо число, например 2880, в виде произведения ***простых*** множителей?

Читатель: Я бы для начала представил это число в виде: $2880 = 288 \cdot 10$. Потом заметим, что $288 = 144 \cdot 2$, а $144 = 12 \cdot 12$. А дальше просто: $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$. А теперь соберем все сомножители вместе:

$$2880 = 288 \cdot 10 = 144 \cdot 2 \cdot 10 = (12 \cdot 12) \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5) =$$
$$= (3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5).$$

Дальше подсчитаем, сколько раз встречается каждый простой сомножитель в нашем произведении: 2–6 раз; 3–2 раза, 5–1 раз. Тогда окончательный результат будет такой:

$$2880 = (3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Автор: Все верно! Итак, мы получили: $2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Напомним, что есть и другой «стопроцентный» способ разложения любого числа на простые множители. Покажем его на конкретном примере.

Возьмем число 360. Найдем самое маленькое простое число, которое является делителем числа 360. Очевидно, что это число 2.

Делим 360 на 2 и частное (180) записываем под делимым (360):

$$\begin{array}{r||l} 360 & 2 \\ 180 & \end{array}$$

Число 180 тоже делится на 2, выполняем деление и записываем частное (90):

$$\begin{array}{r||l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & \end{array}$$

Далее делим на 2 число 90:

$$\begin{array}{r||l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & \end{array}$$

Число 45 на 2 не делится. Наименьшее простое число, на которое делится 45 – это 3. Выполняем деление 45:3=15:

$$\begin{array}{r||l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & \end{array}$$

Теперь делим 15 на 3, получаем 15:3=5 и записываем:

$$\begin{array}{r||l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & \end{array}$$

Ну а 5 – это уже простое число, оно, кроме 1, делится только на 5. Делим 5 на 5 и получаем:

$$\begin{array}{r||l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Все простые множители записаны нами справа от вертикальной черты. Соберем их вместе и получим:

$$360 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5.$$

СТОП! Решите самостоятельно.

А10. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: а) 24; б) 56; в) 72.

Б18. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: а) 100; б) 288.

В16. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: 64800.

Как разделить степень на степень?

Автор: Как Вы считаете, что получится, если разделить 17^5 на 17^3? То есть чему равно значение арифметического выражения: $17^5:17^3$?

Читатель: Я бы записал это выражение в виде обыкновенной дроби: $17^5:17^3=\dfrac{17^5}{17^3}=\dfrac{17\cdot17\cdot17\cdot17\cdot17}{17\cdot17\cdot17}$. Ясно, что три множителя в числителе можно сократить с тремя множителями в знаменателе: $\dfrac{\cancel{17}\cdot\cancel{17}\cdot\cancel{17}\cdot17\cdot17}{\cancel{17}\cdot\cancel{17}\cdot\cancel{17}}=\dfrac{17\cdot17}{1}=17^2$.

Автор: Верно! Значит, $17^5:17^3 = 17^2$. То есть получилось так, что мы из показателя степени делимого (5) вычли показатель степени делителя (3) и получили показатель степени частного: $5 - 3 = 2$. То есть фактически мы установили правило деления степени на степень (при условии, что основания степеней равны):

$$a^m - a^n = a^{m-n}. \qquad (5.5)$$

Задача 5.15. а) Вычислите значение арифметического выражения $\dfrac{5^{11}\cdot 125}{5^{12}}$; б) упростите алгебраическое выражение $\dfrac{x^k\cdot x^7}{x^{k-1}}$.

Решение.

а) $\dfrac{5^{11}\cdot 125}{5^{12}}$. Прежде всего, заметим, что $125 = 5^3$, тогда наше выражение примет вид: $\dfrac{5^{11}\cdot 125}{5^{12}} = \dfrac{5^{11}\cdot 5^3}{5^{12}}$. Теперь выполним умножение в числителе с помощью формулы (5.4), получим:

$$\frac{5^{11}\cdot 5^3}{5^{12}} = \frac{5^{11+3}}{5^{12}} = \frac{5^{14}}{5^{12}}.$$

Нам остается только разделить степень на степень с помощью формулы (5.5), получим:

$$\frac{5^{14}}{5^{12}} = 5^{14-12} = 5^2 = 25.$$

б) $\dfrac{x^k\cdot x^7}{x^{k-1}}$. Будем действовать как в пункте а: сначала выполним умножение степеней в числителе, а затем разделим числитель на знаменатель и получим ответ:

$$\frac{x^k\cdot x^7}{x^{k-1}} = \frac{x^{k+7}}{x^{k-1}} = x^{(k+7)-(k-1)} = x^{\cancel{k}+7-\cancel{k}+1} = x^{7+1} = x^8.$$

Ответ: а) 25; б) x^8.

СТОП! Решите самостоятельно.

А11. Упростите и вычислите: а) $8^7{:}8^5$; б) $(-5)^9{:}(-5)^6$; в) $\left(-2\dfrac{1}{7}\right)^6 : \left(-2\dfrac{1}{7}\right)^4$; г) $\dfrac{2{,}54^{11}}{2{,}54^{10}}$.

Б19. Упростите выражение: а) $\dfrac{b^{13}b^{14}}{b^{22}}$; б) $\dfrac{\tilde{n}^{28}\tilde{n}^{22}}{\tilde{n}^{30}}$.

В17. Упростите и вычислите: а) $\dfrac{5^{10}\cdot 25}{5^{12}}$; б) $\dfrac{81\cdot(-3)^{10}}{(-3)^{13}\cdot(-3)}$.

Г5. Упростите выражение $\dfrac{(-x)^7\cdot(-x)^k}{(-x)^{k+1}\cdot(-x)^3} : \dfrac{(-x)(-x)^2\cdot(-x)^3\cdot(-x)^t}{(-x)^{t+5}}$.

Как возвести степень в степень?

Читатель: А что получится, если мы возведем степень (например, 2^5) в степень (например, в 6-ю)? То есть чему будет равно выражение $(2^5)^6$?

Автор: Возвести число 2^5 в 6-ю степень – значит выполнить умножение:

$$(2^5)^6 = \underbrace{2^5\cdot 2^5\cdot\ldots\cdot 2^5}_{\text{6 ì í î æèòåëåé}} = \underbrace{\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots 2}_{5}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{5}\cdot\ldots\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{5}}_{6}.$$

Ясно, что множитель 2 повторяется в этом произведении $5\times 6 = 30$ раз. Значит, $(2^5)^6 = 2^{5\cdot 6} = 2^{30}$. То есть при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются.

В общем случае справедлива формула:

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}. \qquad (5.6)$$

Задача 5.16. Упростите алгебраическое выражение $\dfrac{(y\cdot y^6)^3}{(y^2)^2}$.

Решение. Будем действовать последовательно: сначала выполним умножение двух степеней в скобках в числителе, затем произведем возведение степени в степень в числителе и знаменателе, а потом разделим числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{(y\cdot y^6)^3}{(y^2)^2}=\frac{(y^{1+6})^3}{(y^2)^2}=\frac{(y^7)^3}{(y^2)^2}=\frac{y^{7\cdot 3}}{y^{2\cdot 2}}=\frac{y^{21}}{y^4}=y^{21-4}=y^{17}.$$

Ответ: y^{17}.

СТОП! Решите самостоятельно.

А12. Выполните возведение в степень: а) $(a^4)^5$; б) $(x^3)^3$; в) $(b^2)^7$; г) $(y^6)^4$.

Б20. Выполните возведение в степень: а) $(x^3)^n$; б) $(-a^4)^{2n}$.

В18. Упростите выражение: а) $(a^3)^6\cdot a^4$; б) $(k^6)^7:k^8$; в) $(b^6)^5\cdot(b^5)^4$; г) $\frac{(x^3)^4\cdot x^7}{x^{15}}$; д) $(t^6)^3$.

Задача 5.17. Вычислите значение арифметического выражения: а) $\left((-0,2)^2\right)^3$; б) $\frac{3^7\cdot 27}{(3^4)^3}$; в) $\left(-2^2\right)^3$; г) $\left(-2^3\right)^2$.

Решение.

а) $\left((-0,2)^2\right)^3$. Воспользуемся формулой возведения степени в степень, получим:

$$\left((-0,2)^2\right)^3=\left(-0,2\right)^{2\cdot 3}=\left(-0,2\right)^6=0,2^6=0,2^3\cdot 0,2^3=$$
$$=0,008\cdot 0,008=0,000064.$$

Мы учли, что произведение четного числа отрицательных сомножителей – число положительное.

б) $\frac{3^7\cdot 27}{(3^4)^3}$. Заметим, что $27=3^3$, получим:

$$\frac{3^7\cdot 27}{(3^4)^3}=\frac{3^7\cdot 3^3}{3^{4\cdot 3}}=\frac{3^{10}}{3^{12}}=\frac{3^{10}}{3^{10}\cdot 3^2}=\frac{\cancel{3^{10}}}{\cancel{3^{10}}\cdot 9}=\frac{1}{9}.$$

в) $(-2^2)^3$.

Читатель: Это совсем просто: $\left(-2^2\right)^3=\left(-2\right)^{2\cdot 3}=\left(-2\right)^6=+64$.

Автор: Не совсем так, по-видимому. На самом деле, Вы вычислили значение выражения $\left((-2)^2\right)^3$.

Но у нас другое выражение: $\left(-2^2\right)^3$. Разница в том, что мы здесь сначала возводим 2 в квадрат, получаем 4, потом ставим перед четверкой знак минус, а потом возводим (–4) в третью степень и получаем ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ число:

$$\left(-4\right)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=-64.$$

г) $\left(-2^3\right)^2$.

Читатель: Если рассуждать по аналогии с предыдущим примером, то, наверное, мы здесь сначала возводим 2 в куб, получаем 8, ставим перед восьмеркой знак минус, а потом уже (–8) возводим в квадрат и получаем $\left(-8\right)\cdot\left(-8\right)=+64$.

Автор: Совершенно верно.

Ответ: а) $0,000064$; б) $\frac{1}{9}$; в) –64; г) 64.

СТОП! Решите самостоятельно.

А13. Выполните возведение в степень: а) $(6^{10})^4$; б) $\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^5\right)^3$; в) $((-0,32)^2)^9$.

Б21. Вычислите: а) $\dfrac{2^6\cdot(2^3)^5}{2^{18}}$; б) $\dfrac{(1,7^4)^4}{1,7^{10}\cdot1,7^5}$; в) $\dfrac{(3^5)^2}{3^3\cdot9}$.

Задача 5.18. Представьте: а) степень 9^{30} в виде степени с основанием 3; б) степень 3^{30} в виде степени с основанием 27; в) выражение $\left(-5\right)\cdot25^{18}$ в виде степени.

Решение.

а) 9^{30}. Заметим, что $9=3^2$, тогда $9^{30}=(3^2)^{30}=3^{2\cdot30}=3^{60}$.

б) 3^{30}. Заметим, что $27 = 3^3$, а $3^{30}=3^{3\cdot10}=(3^3)^{10}=27^{10}$.

в) $(-5)\cdot 25^{18}$. Заметим, что $25=(-5)^2$, тогда получим:

$$(-5)\cdot 25^{18}=(-5)\cdot\left((-5)^2\right)^{18}=(-5)\cdot(-5)^{2\cdot 18}=(-5)\cdot(-5)^{36}=$$

$$=(-5)^{1+36}=(-5)^{37}.$$

Ответ: а) 3^{60}; б) 27^{10}; в) $(-5)^{37}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А14. Представьте 2^{20} в виде степени с основанием: а) 2^2; б) 2^4; в) 2^5; г) 2^{10}.

Б22. Запишите 2^{60} в виде степени с основанием а) 4; б) 8.

В19. Представьте, если возможно, выражение в виде степени с основанием –3: а) 9^6; б) 27^5; в) $-27\cdot 27^4$.

Сравниваем степени

Сравниваем степени целых чисел

Автор: Как Вы считаете, что больше 3^4 или 3^5?

Читатель: Конечно, $3^5>3^4$, потому что $3^5=3^4\cdot 3$.

Автор: Верно! А что больше a^m или a^n, если a – целое положительное число, и $m>n$?

Читатель: Я думаю, что если основания равны, то больше та степень, показатель которой больше, то есть $a^m>a^n$ потому, что чем больше одинаковых сомножителей, тем больше произведение! Исключение здесь только одно: $a=1$. В этом случае $a^m=a^n$.

Автор: Согласен. Значит, мы можем утверждать, что для любого целого числа $a>1$ справедливо неравенство:

$$a^m>a^n,\ \text{если}\ m>n. \qquad (5.6)$$

А теперь скажите, что больше 3^{10} или 4^{10}?

Читатель: По-моему, очевидно, что $3^{10}<4^{10}$, потому что 3^{10} – это произведение десяти троек, а 4^{10} – это произведение десяти четверок. Поскольку $3<4$, то и $3^{10}<4^{10}$.

Автор: Совершенно верно, в общем случае можно утверждать, что для любых натуральных a, b и любого натурального $n > 1$ справедливо неравенство:

$$a^n > b^n \text{ при условии } a > b. \qquad (5.7)$$

Задача 5.19. Что больше: а) 2^7 или 8^3; б) 10^{20} или 20^{10}?

Решение.

а) 2^7 или 8^3. Представим 8^3 в виде: $8^3 = (2^3)^3 = 2^{3\cdot 3} = 2^9$. Согласно формуле (5.6) $2^7 < 2^9 = 8^3$.

б) 10^{20} или 20^{10}. Представим 10^{20} в виде: $10^{20} = 10^{2\cdot 10} = (10^2)^{10} = 100^{10}$. Согласно формуле (5.7) $10^{20} = 100^{10} > 20^{10}$.

Ответ: а) $2^7 < 8^3$; б) $10^{20} > 20^{10}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А15. Сравните степени: а) 16^3 и 2^{16}; б) 25^2 и 125^1; в) 2^5 и 8^2; г) 3^6 и 9^2; д) 10^{10} и 100^6.

Б23. Сравните: а) $(3^5)^6$ и 7^{15}; б) 17^{17} и $16^{16} \cdot 2^4$.

В20. Сравните: а) 25^7 и 5^{11}; б) 100^{200} и 200^{100}; в) 8^{15} и 32^9; г) 27^{129} и 81^{96}; д) 2^{44} и 4^{22}.

Сравниваем степени дробных чисел

Автор: Пусть у нас есть некоторое число $a > 0$ (целое или дробное) и некоторая ***правильная положительная*** дробь $\frac{m}{n}$ $\left(\frac{m}{n} < 1\right)$. Как вы считаете, что больше a или $a \cdot \frac{m}{n}$?

Читатель: Я думаю, что $a > a \cdot \frac{m}{n}$.

Автор: А почему?

Читатель: Когда мы умножаем число a на дробь $\frac{m}{n}$, мы как бы «режем пирог» величиной a на n кусочков и берем m таких кусочков. Если $\frac{m}{n}$ – правильная дробь, то $m < n$, то есть мы берем меньше, чем целый пирог. Поэтому

$$a > a \cdot \frac{m}{n} \quad \text{при} \quad m < n. \qquad (5.8)$$

Автор: Совершенно верно! А если дробь $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь, т.е. если $m > n$?

Читатель: Тогда мы берем больше, чем целый пирог, значит,

$$a > a \cdot \frac{m}{n} \quad \text{при} \quad m > n. \qquad (5.9)$$

Автор: А теперь скажите, что больше $\left(\frac{m}{n}\right)^k$ или $\left(\frac{m}{n}\right)^l$, если $k > l$.

Читатель: По-моему, тут надо разобрать три случая. Первый, самый простой, это когда $m = n$, а дробь $\frac{m}{n} = 1$. Очевидно, что в этом случае:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k = \left(\frac{m}{n}\right)^l \quad \text{при } m = n. \qquad (5.10)$$

Второй случай, когда $m < n$, $\frac{m}{n} < 1$. Учитывая, что $k > l$, $\left(\frac{m}{n}\right)^k$ можно представить в виде $\left(\frac{m}{n}\right)^k = \left(\frac{m}{n}\right)^l \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{k-l}$. То есть мы умножаем число $\left(\frac{m}{n}\right)^l$ на правильную дробь $\left(\frac{m}{n}\right)^{k-l} < 1$. Тогда согласно формуле (5.8) мы должны получить число, меньшее, чем умножаемое число, значит,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k < \left(\frac{m}{n}\right)^l \quad \text{при} \quad k > l \text{ и } m < n. \qquad (5.11)$$

Третий случай, когда $m > n$, $\frac{m}{n} > 1$.

Опять представим выражение $\left(\frac{m}{n}\right)^k$ в виде $\left(\frac{m}{n}\right)^k = \left(\frac{m}{n}\right)^l \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{k-l}$ и заметим, что теперь мы умножаем число $\left(\frac{m}{n}\right)^l$ на неправильную дробь $\left(\frac{m}{n}\right)^{k-l} > 1$, а значит, по формуле (5.9) должны получить число, большее, чем умножаемое:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k > \left(\frac{m}{n}\right)^l \text{ при } \quad k > l \quad \text{и} \quad m > n. \qquad (5.12)$$

Автор: Верно! А как Вы считаете, что больше $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ или $\left(\frac{c}{d}\right)^n$, если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$?

Читатель: Я думаю, что при умножении большего числа на большее, должно получиться большее число, чем при умножении меньшего числа на меньшее, поэтому

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n > \left(\frac{c}{d}\right)^n \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}. \qquad (5.13)$$

Или можно так сказать: когда мы умножаем дробь $\frac{a}{b}$ на саму себя, мы как бы берем бо́льшую часть от большего пирога, а когда мы умножаем дробь $\frac{c}{d}$ на саму себя, мы берем меньшую часть от меньшего пирога.

Автор: Совершенно верно!

Задача 5.20. Сравните: а) $0,2^{10}$ и $0,04^6$; б) $\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$ и $\left(\frac{243}{32}\right)^2$; в) $0,1^{10}$ и $0,2^{20}$; г) $(-0,2)^{10}$ и $(-0,2)^9$.

Решение.

а) $0,2^{10}$ и $0,04^6$. Попробуем привести второе число $0,04^6$ к основанию 0,2. Заметим, что $0,2^2=0,2\cdot 0,2=0,04$, тогда $0,04^6=\left(0,2^2\right)^6=0,2^{2\cdot 6}=0,2^{12}$.

А теперь сравним: $0,2^{10}$ и $0,2^{12}$. Что больше?

Читатель: Мы же только что выяснили, что $\left(\dfrac{m}{n}\right)^k<\left(\dfrac{m}{n}\right)^l$ при *k* > *l* и *m* < *n* (формула (5.11)). Здесь у нас как раз этот случай. Мы сравниваем $\left(\dfrac{2}{10}\right)^{12}$ и $\left(\dfrac{2}{10}\right)^{10}$. Так как 12 > 10 и 2 < 10, то $\left(\dfrac{2}{10}\right)^{12}<\left(\dfrac{2}{10}\right)^{10}$, то есть $0,2^{10}>0,2^{12}$, а значит, $0,2^{10}>0,04^6$.

Автор: Верно!

б) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{10}$ и $\left(\dfrac{243}{32}\right)^2$. Заметим, что 243 = 3^5; 32 = 2^5. Тогда

$$\left(\frac{243}{32}\right)^2=\left(\frac{3^5}{2^5}\right)^2=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^{5\cdot 2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$

Теперь сравним: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{10}$ и $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$.

Читатель: Здесь случай сравнения двух разных дробей, возведенных в одинаковую степень. Поскольку у нас $\dfrac{4}{3}<\dfrac{3}{2}$ $\left(\dfrac{4}{3}=1\dfrac{1}{3},\text{ а }\dfrac{3}{2}=1\dfrac{1}{2}\right)$, то по формуле (5.13) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{10}<\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$.

А значит, $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{10}<\left(\dfrac{243}{32}\right)^2$.

в) $0,1^{10}$ и $0,2^{20}$. Представим число $0,2^{20}$ в виде:

$$0,2^{20} = \left(0,2\right)^{2\cdot 10} = \left(0,2^2\right)^{10} = 0,04^{10}.$$

Теперь сравним $0,1^{10}$ и $0,04^{10}$. Поскольку $0,1 > 0,04$, то согласно формуле (5.13) $0,1^{10} > 0,04^{10}$, значит, $0,1^{10} > 0,2^{20}$.

г) $(-0,2)^{10}$ и $(-0,2)^9$. Здесь нам достаточно заметить, что $(-0,2)^{10} > 0,$ так как произведение четного числа отрицательных сомножителей есть число положительное, а $(-0,2)^9 < 0$, потому что произведение нечетного числа отрицательных сомножителей есть число отрицательное.

Значит, $(-0,2)^{10} > (-0,2)^9$.

Ответ: а) $0,2^{10} > 0,04^6$; б) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{10} < \left(\dfrac{243}{32}\right)^2$; в) $0,1^{10} > 0,2^{20}$; г) $(-0,2)^{10} > (-0,2)^9$.

СТОП! Решите самостоятельно.

В21. Сравните: а) $0,3^{10}$ и $0,09^4$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$ è $\left(\dfrac{1}{32}\right)^2$; в) $0,2^{10}$ и $0,4^{20}$; г) $(-0,2)^8$ и $(-0,2)^6$; д) $(-0,2)^7$ и $(-0,2)^9$; е) $(-0,2)^{16}$ и $(-0,2)^3$.

Решаем уравнения

Задача 5.21. Решите уравнения: а) $(2^x)^{10} = 2^{40}$; б) $x^{10} = 2^{40}$; в) $9^{x+2} = 3^x \cdot 27^x$; г) $k^m = (2^2)^4$.

Решение.

а) $(2^x)^{10} = 2^{40} \to 2^{x\cdot 10} = 2^{40} \to x\cdot 10 = 40 \to x = 4$.

б) $x^{10} = 2^{40} \to x^{10} = 2^{4\cdot 10} \to x^{10} = (2^4)^{10} \to x = 2^4 = 16$.

в) $9^{x+2} = 3^x \cdot 27^x \to (3^2)^{x+2} = 3^x \cdot (3^3)^x \to 3^{2(x+2)} = 3^x \cdot 3^{3x} \to$

$$3^{2(x+2)} = 3^{x+3x} \to 2\left(x+2\right) = x + 3x \to 2x + 4 = 4x \to$$

$$2x - 2x + 4 = 4x - 2x \to 4 = 2x \to x = 2.$$

г) $k^m = (2^2)^4$.

Читатель: По-моему здесь все просто: $k = 2^2 = 4;\ m = 4$.

Автор: Это верно, но это не единственное решение, потому что возможен еще и такой вариант:

$$k^m = (2^2)^4 \to k^m = 2^8 \to k = 2;\ m = 8.$$

Читатель: Но тогда возможен и еще один вариант:

$$k^m = (2^2)^4 \to k^m = (2^4)^2 \to k^m = 16^2 \to k = 16; m = 2.$$

Автор: Верно! То есть уравнение $k^m = (2^2)^4$ имеет три решения!

Ответ: а) $x = 4$; б) $x = 16$; в) $x = 2$; г) $k = 4$, $m = 4$; $k = 2$, $m = 8$; $k = 16$, $m = 2$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А16. Замените * таким выражением, чтобы выполнялось равенство: а) $(*)^5 = x^{40}$; б) $(x*)^7 = x^{21}$.

Б24. Решите уравнения: а) $3^{x-1} = 3^{2x-2}$; б) $12^{0,2x+1} = 12^{x-0,8} \cdot 12$.

В22. Решите уравнение $\dfrac{(z^8)^4 \cdot (z^5)^9}{(z^{15})^4 \cdot (z^4)^4} = 5$.

Г6. Укажите все пары натуральных значений k и m, при которых верно равенство: а) $k^m = (2^2)^2$; б) $k^m = (4^2)^2$.

Вычисляем рационально

Прежде чем приступить к решению следующей серии задач, вспомним следующие равенства:

$$(ab)^n = a^n b^n, \tag{5.14}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{5.15}$$

Напомним, почему эти равенства справедливы:

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n} = a^n \cdot b^n.$$

Аналогично:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots a}^{n}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Задача 5.22. Вычислите рационально: а) $(3\cdot10)^5$; б) $0{,}2^5\cdot5^5$; в) $0{,}2^6\cdot5^4$; г) $\frac{16^3\cdot3^3}{48^2}$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot1{,}5^8$.

Решение.

а) $(3\cdot10)^5$. Воспользуемся формулой (5.14) и получим: $(3\cdot10)^5 = 3^5\cdot10^5$. По таблице 5.1 находим: $3^5 = 243$, $10^5 = 100000$. Получаем: $3^5\cdot10^5 = 243\cdot100\,000 = 24\,300\,000$.

б) $0{,}2^5\cdot5^5$. Воспользуемся формулой (5.14) и получим: $0{,}2^5\cdot5^5 = (0{,}2\cdot5)^5 = 1^5 = 1$.

в) $0{,}2^6\cdot5^4$. Воспользуемся формулой (5.14) и получим: $0{,}2^6\cdot5^4 = 0{,}2^2\cdot(0{,}2^4\cdot5^4) = 0{,}2^2\cdot(0{,}2\cdot5)^4 = 0{,}04\cdot1^4 = 0{,}04$.

г) $\frac{16^3\cdot3^3}{48^2}$. Заметим, что $16\cdot3 = 48$, и воспользуемся формулой (5.14), получим: $\frac{16^3\cdot3^3}{48^2} = \frac{(16\cdot3)^3}{48^2} = \frac{48^3}{48^2} = 48^{3-2} = 48$.

д) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot1{,}5^8$. Представим 1,5 в виде обыкновенной дроби: $1{,}5 = \frac{3}{2}$, получим: $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot1{,}5^8 = \left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^8$. Далее воспользуемся формулой (5.15) и получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^8 = \left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^7\cdot\frac{3}{2} = 1^7\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: а) 2 430 000; б) 1; в) 0,04; г) 48; д) 1,5.

СТОП! Решите самостоятельно.

А17. Вычислите рационально: а) $(2\cdot10)^3$; б) $2^4\cdot5^4$; в) $(3\cdot100)^4$; г) $4^3:2^3$.

Б25. Вычислите рационально: а) $8^5 \cdot 0{,}125^5$; б) $5^4 \cdot 0{,}4^4$; в) $(5 \cdot 7 \cdot 20)^2$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{10}$.

В23. Вычислите рационально: а) $2^4 \cdot 5^5$; б) $0{,}25^3 \cdot 4^4$.

В24. Вычислите рационально: а) $\frac{15^3 \cdot 3^3}{45^4}$; б) $\frac{10^{12}}{2^8 \cdot 5^8}$; в) $\frac{5^{16} \cdot 3^{16}}{15^{14}}$.

Упрощаем алгебраические выражения

Задача 5.23. Упростите алгебраические выражения:

а) $\left(\frac{1}{2}x\right)^4 \cdot \left(x^2 \frac{y^4}{2}\right)^2$; б) $\left(-0{,}1 \cdot a^6 b^{n-1}\right)^4 \cdot \left(10b^2\right)^6$.

Решение.

а) $\left(\frac{1}{2}x\right)^4 \cdot \left(x^2 \frac{y^4}{2}\right)^2$. Воспользуемся формулами (5.14) и (5.15) и преобразуем выражения, стоящие в скобках, получим:

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 = \frac{1^4}{2^4} \cdot x^4 = \frac{x^4}{16};$$

$$\left(x^2 \frac{y^4}{2}\right)^2 = \left(x^2\right)^2 \cdot \left(\frac{y^4}{2}\right)^2 = x^4 \cdot \frac{\left(y^4\right)^2}{2^2} = \frac{x^4 \cdot y^8}{4}.$$

Подставим полученные выражения в исходное выражение и получим окончательный результат:

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^4 \cdot \left(x^2 \frac{y^4}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{16} \cdot \frac{x^4 \cdot y^8}{4} = \frac{x^{4+4} \cdot y^8}{16 \cdot 4} = \frac{x^8 \cdot y^8}{64}.$$

б) $(-0{,}1 \cdot a^6 b^{n-1})^4 \cdot (10b^2)^6$. Для каждого выражения в скобках применим формулу (5.14), получим:

$$(-0{,}1 \cdot a^6 b^{n-1})^4 = (-0{,}1)^4 \cdot (a^6)^4 \cdot (b^{n-1})^4 = 0{,}0001 \cdot a^{24} \cdot b^{4(n-1)}.$$

$$(10b^2)^6 = 10^6 \cdot (b^2)^6 = 10^6 \cdot b^{12}.$$

Подставим полученные выражения в исходное выражение и получим окончательный результат:

$$\left(-0,1\cdot a^6b^{n-1}\right)^4\cdot\left(10b^2\right)^6=0,0001\cdot a^{24}\cdot b^{4(n-1)}\cdot 10^6\cdot b^{12}=$$

$$=(0,0001\cdot 10^6)\cdot a^{24}\cdot\left(b^{4(n-1)}\cdot b^{12}\right)=100\cdot a^{24}\cdot b^{4n-4+12}=100a^{24}\cdot b^{4n+8}.$$

Ответ: а) $\dfrac{x^8\cdot y^8}{64}$; б) $100a^{24}\cdot b^{4n+8}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б26. Выполните возведение в степень: а) $(3q^2r^7)^5$; б) $(6a^5xu^3)^3$; в) $(-1,2k^3t)^2$; г) $(-0,1ab^4c^7)^3$.

В25. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{7}xy\right)^4\cdot(-49cxy)^2\cdot(-2cy)^6$.

Как представить алгебраическое выражение в виде степени?

Задача 5.24. Представьте в виде степени алгебраическое выражение: а) $144a^{16}b^{14}c^8$; б) $\dfrac{0,064t^9}{a^{27}}$.

Решение.

а) $144a^{16}b^{14}c^8$. Прежде всего, заметим, что $144=12\cdot 12=12^2$, то есть $144a^{16}b^{14}c^8=12^2a^{16}b^{14}c^8$.

Попробуем представить наше выражение в виде алгебраического выражения, возведенного в квадрат. Для этого заметим, что $a^{16}=a^{8\cdot 2}=(a^8)^2$; $b^{14}=b^{7\cdot 2}=(b^7)^2$; $c^8=c^{4\cdot 2}=(c^4)^2$.

Тогда наше выражение примет вид:

$$144a^{16}b^{14}c^8=12^2a^{16}b^{14}c^8=12^2\cdot(a^8)^2\cdot(b^7)^2\cdot(c^4)^2=(12a^8b^7c^4)^2.$$

б) $\dfrac{0,064t^9}{a^{27}}$. Заметим, что 0,064 = $0,4^3$ ($0,4\cdot 0,4$ = 0,16; $0,16\cdot 0,4$ = 0,064). Попробуем представить наше выражение в виде алгебраического выражения, возведенного в куб. Для этого заметим, что: $t^9 = t^{3\cdot 3} = \left(t^3\right)^3$; $a^{27} = a^{9\cdot 3} = \left(a^9\right)^3$. Тогда наше выражение примет вид:

$$\frac{0,064t^9}{a^{27}} = \frac{\left(0,4\right)^3 \cdot \left(t^3\right)^3}{\left(a^9\right)^3} = \left(\frac{0,4t^3}{a^9}\right)^3.$$

Ответ: а) $\left(12a^8b^7c^4\right)^2$; б) $\left(\dfrac{0,4t^3}{a^9}\right)^3$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А18. Представьте в виде степени некоторого выражения: а) a^7y^7; б) $(-a)^3b^3$; в) x^8y^{12}; г) $x^2y^4z^{24}$.

Б27. Представьте в виде степени некоторого выражения: а) $\dfrac{4m^2}{b^2}$; б) $\dfrac{100k^4}{b^2}$.

Угадай сомножитель!

Задача 5.25. Замените: а) буквы k и l числами так, чтобы получилось верное равенство: $\left(x^k y^2\right)^8 = \left(x^6 y^l\right)^4$; б) букву P алгебраическим выражением так, чтобы получилось верное равенство: $-x^2yP = \dfrac{3}{8}x^8y^8$.

Решение.

а) $\left(x^k y^2\right)^8 = \left(x^6 y^l\right)^4$. Начнем с того, что воспользуемся формулой (5.14) и упростим выражение:

$$\left(x^k y^2\right)^8 = \left(x^6 y^l\right)^4 \to x^{8k} y^{16} = x^{24} y^{4l}.$$

Дальше будем исходить из того, что показатели степеней с одинаковыми основаниями должны быть равны.

Получим: $8k = 24$; $16 = 4l$, отсюда $k = 3; l = 4$.

б) $-x^2yP=\frac{3}{8}x^8y^8$. Ясно, что поскольку никаких других букв, кроме x и y, в правой части равенства нет, то P должно представлять собой произведение степеней с основаниями x и y с числовым коэффициентом.

Будем искать P в виде $P=ax^ny^m$, где a, m, n – некоторые пока неизвестные числа. Подставим это выражение в исходное равенство, получим:

$$-x^2yax^ny^m=\frac{3}{8}x^8y^8\to(-a)\cdot\left(x^2\cdot x^n\right)\cdot\left(y\cdot y^m\right)=\frac{3}{8}x^8y^8\to$$

$$\to(-a)\cdot\left(x^{n+2}\right)\cdot\left(y^{m+1}\right)=\frac{3}{8}x^8y^8.$$

Ясно, что для того, чтобы выполнялось равенство, коэффициент ($-a$) должен быть равен коэффициенту $\frac{3}{8}$:

$$-a=\frac{3}{8}\to a=-\frac{3}{8}.$$

Показатели степеней с одинаковыми основаниями в левой и правой частях равенства должны быть равны:

$$n+2=8\to n=6; m+1=8\to m=7.$$

Теперь осталось только записать наше искомое выражение P:

$$P=ax^ny^m=-\frac{3}{8}x^6y^7.$$

Проверим: $-x^2yP=-x^2y\cdot\left(-\frac{3}{8}x^6y^7\right)=\frac{3}{8}x^{2+6}y^{1+7}=\frac{3}{8}x^8y^8.$ Все верно!

Ответ: а) $k=3; l=4$; б) $P=-\frac{3}{8}x^6y^7$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б28. Замените показатели m и n числами так, чтобы получилось равенство, верное при всех значениях переменных a и b: а) $(a^mb^4)^6=$ $=(a^9b^n)^2$; б) $(a^{12}b^n)^6=(a^mb^3)^4$.

В26. Представьте выражение $15x^3y^9$ в виде произведения двух сомножителей, один из которых равен: а) $3x^3$; б) $-5xy$; в) $15x^2$; г) $-3xy^2$.

Степень с отрицательным показателем

Математики договорились, что для любого числа $a \neq 0$ и любого натурального числа n справедливо равенство:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \qquad (5.16)$$

Эта формула является определением ***отрицательной степени*** числа.

Например: $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 1 : \frac{1}{2^4} = 1 \cdot \frac{2^4}{1} = 2^4 = 16;$$

$$(0,1)^{-3} = \frac{1}{0,1^3} = \frac{1}{0,001} = 1 : 0,001 = 1000.$$

Читатель: А откуда взялось такое странное определение? Ведь положительная степень показывает, сколько раз мы повторили сомножителем данное число, то есть

$$5^2 = 5 \cdot 5;\ 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \text{ и т.д.}$$

И как это вообще можно понять: ***отрицательное число раз*** умножить число само на себя?

Автор: Смысл этого определения легко понять, если вспомнить правило деления степени на степень: $a^m : a^n = a^{m-n}$. Например, $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$.

Теперь представим себе, что мы захотели, чтобы правило $a^m{:}a^n = a^{m-n}$ было справедливо не только для случая, когда $m > n$, но и для случая, когда $m < n$. Тогда получим:

$$2^3 : 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2}.$$

Но с другой стороны, $2^3 : 2^5 = \dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{\cancel{2^3}}{\cancel{2^3} \cdot 2^2} = \dfrac{1}{2^2}$. То есть получается, что $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$.

Теперь, я надеюсь, Вам понятно, что формула, которая является определением отрицательной степени: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ появилась на свет из-за ***нашего желания***, чтобы формула деления степени на степень: $a^m : a^n = a^{m-n}$ выполнялась для любых натуральных чисел m и n. Кстати из той же самой формулы $a^m : a^n = a^{m-n}$ становится понятно, почему мы дали такое «странное» определение нулевой степени: «Любое число, кроме нуля, в нулевой степени равно единице: $a^0 = 1$». В самом деле, число в нулевой степени можно представить так: $a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = \dfrac{\cancel{a^n}}{\cancel{a^n}} = 1$.

Заметим, что приведенные нами рассуждения неверны, если $a = 0$, потому что, как мы с Вами уже знаем, выражение $\dfrac{0}{0}$ может быть равным чему угодно, поэтому оно считается ***неопределенным***, то есть не имеющим смысла.

Задача 5.26. а) Запишите в виде степени с целым основанием выражение $\left(\dfrac{1}{13}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{13}\right)^3$; б) вычислите значение выражения $4^{-3} \cdot \left(12^0\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \left(1\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$; в) расставьте степени в порядке возрастания: $(-0{,}1)^{-1}; (-10)^{-2}; (-10)^{-3}; (-0{,}2)^{-2}$.

Решение.

а) $\left(\frac{1}{13}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^3=\left(\frac{1}{13}\right)^{2+3}=\left(\frac{1}{13}\right)^5=\frac{1}{13^5}=13^{-5}.$

б) $4^{-3}\cdot\left(12^0\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}.$

$4^{-3}=\frac{1}{4^3};\qquad \left(12^0\right)^3=1^{\cdot 3}=1;$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}=1:\frac{1}{4}=1\cdot\frac{4}{1}=4;$

$\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1:\frac{3^2}{2^2}=1\cdot\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}.$

Теперь наше выражение можно записать в виде:

$4^{-3}\cdot\left(12^0\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{4^3}\cdot1\cdot4\cdot\frac{4}{9}=\frac{4\cdot4}{4^3\cdot9}=\frac{1}{4\cdot9}=\frac{1}{36}.$

в) $(-0,1)^{-1};(-10)^{-2};(-10)^{-3};(-0,2)^{-2}$. Прежде чем расставлять, вычислим значение каждой степени:

$(-0,1)^{-1}=\frac{1}{(-0,1)}=-\frac{1}{0,1}=-\frac{1\cdot10}{0,1\cdot10}=-\frac{10}{1}=-10;$

$(-10)^{-2}=\frac{1}{(-10)^2}=\frac{1}{100};$

$(-10)^{-3}=\frac{1}{(-10)^3}=\frac{1}{-1000}=-\frac{1}{1000};$

$(-0,2)^{-2}=\frac{1}{(-0,2)^2}=\frac{1}{0,04}=\frac{1\cdot100}{0,04\cdot100}=\frac{100}{4}=25.$

Теперь расставим полученные числа в порядке возрастания: $-10;\ -\dfrac{1}{1000};\ \dfrac{1}{100};\ 25.$ Осталось только заменить значения наших степеней их первоначальными выражениями:

$$(-0{,}1)^{-1};(-10)^{-3};(-10)^{-2};(-0{,}2)^{-2}.$$

Ответ: а) 13^{-5}; б) $\dfrac{1}{36}$; в) $(-0{,}1)^{-1};(-10)^{-3};(-10)^{-2};(-0{,}2)^{-2}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А19. Запишите в виде степени с целым показателем и целым основанием: а) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$; б) 0; в) $\dfrac{1}{16^3}$; г) $\left(\dfrac{1}{17}\right)^4\cdot\left(\dfrac{1}{17}\right)^7$.

Б29. Вычислите: а) 5^0; б) 10^{-1}; в) $(-1{,}2)^0$; г) 2^{-3}; д) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$; е) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$; ж) $(-2)^{-2}$; з) $\left(-\dfrac{7}{10}\right)^{-1}$.

Б30. Сравните: а) 5^0 и $(-5)^0$; б) $(-1{,}2)^3$ и $(-1{,}2)^0$; в) 2^{-3} и 0; г) $(-2)^{-2}$ и 0; д) $(-2)^3$ и 0; е) $(-2)^4$ и 0.

Б31. Расположите в порядке возрастания: 2^{-3}; -2^2; $(-2)^2$; $(-2)^2$; -2^{-2}.

В27. Вычислите: а) $3^5 + 4^4 + 8^0$; б) $3^0\cdot2^5 - 15^2$; в) $4^2\cdot2^{-3}$; г) $3^{-2} - 9^{-1}$; д) $(3 - 3^{-1})^{-2}$.

Упрощаем алгебраические выражения с отрицательными степенями

Давайте сначала выясним: справедливы ли формулы, которые мы использовали при расчетах выражений, содержащих степени с ***натуральными*** показателями для вычисления выражений, содержащих степени с ***отрицательными целыми*** показателями.

Мы знаем следующие формулы:

- для умножения степеней: $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$;

- для деления степеней: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- для возведения степени в степень: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Вопрос состоит в том, можно ли использовать эти формулы, если в качестве *m* и *n* брать не только натуральные, но и целые отрицательные числа, а также ноль?

Будем разбираться по порядку. Сначала проверим формулу умножения степеней.

Пусть оба показателя степени отрицательные: $m = -3$, $n = -5$, тогда:

$$a^m \cdot a^n = a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^{5+3}} = \frac{1}{a^8} = a^{-8} = a^{(-3)+(-5)} = a^{m+n}.$$

Как видите, для отрицательных показателей степени наша формула справедлива!

Читатель: А если, например, $m > 0; n < 0$?

Автор: Хорошо! Давайте рассмотрим и такой вариант. Пусть $m = 5; n = -3$. Тогда

$$a^m \cdot a^n = a^5 \cdot a^{-3} = a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^{5+(-3)} = a^{m+n}.$$

Как видите, и в этом случае наша формула «работает».

Читатель: А если, наоборот, $m < 0; n > 0$?

Автор: Давайте рассмотрим и такой вариант. Пусть $m = -5; n = 3$, получим:

$$a^m \cdot a^n = a^{-5} \cdot a^3 = \frac{1}{a^5} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{(-5)+3} = a^{m+n}.$$

Опять все получается правильно!

Теперь давайте проверим формулу для деления степеней: $a^m : a^n = a^{m-n}$. Рассмотрим сначала случай $m < 0$; $n < 0$. Пусть $m = -3; n = -5$, получим:

$$a^m : a^n = a^{-5} : a^{-3} = \frac{1}{a^5} : \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{a^3}{1} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a^3}}{a^2 \cdot \cancel{a^3}} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^{5-3}} =$$

$$= a^{-(5-3)} = a^{(-5)-(-3)} = a^{m-n}.$$

Пусть теперь $m=5; n=-3$, получим:

$$a^m : a^n = a^5 : a^{-3} = a^5 : \frac{1}{a^3} = a^5 \cdot \frac{a^3}{1} = a^{5+3} = a^{5-(-3)} = a^{m-n}.$$

Опять все сходится!

Ну и, наконец, рассмотрим случай $m=-5; n=3$, получим:

$$a^m : a^n = a^{-5} : a^3 = \frac{1}{a^5} : a^3 = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^8} = a^{-8} = a^{(-5)-3} = a^{m-n}$$

И в этом случае все в порядке!

Читатель: А если m или n равно нулю?

Автор: Ну, пусть, например, $m \neq 0$, а $n=0$, тогда формула $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ будет иметь вид:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n},$$

А формула $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет иметь вид:

$$a^m : a^n = a^m : a^0 = a^m : 1 = a^m = a^{m-0} = a^{m-n}.$$

Опять все сходится!

Итак, мы с Вами «экспериментально» доказали, что формулы $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $a^m : a^n = a^{m-n}$ справедливы для любых целых значений m и n.

Конечно, наши доказательства не вполне строгие: ведь мы просто приводили конкретные примеры, подтверждающие правильность наших формул, но зато мы немного потренировались в вычислениях с отрицательными степенями! А строгие доказательства (в общем виде) Вы при желании сможете сделать самостоятельно.

Теперь давайте докажем формулу $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Потребуется рассмотреть три случая:

1) $m > 0;\ n > 0;$
2) $m < 0; n > 0;$
3) $m < 0; n < 0.$

Для наглядности опять проведем наши доказательства на конкретных примерах.

1. Пусть $m=5; n=-3$, тогда:

$$\left(a^m\right)^n=\left(a^5\right)^{-3}=\frac{1}{\left(a^5\right)^3}=\frac{1}{a^{15}}=a^{-15}=a^{5\cdot(-3)}=a^{m\cdot n}.$$

2. Пусть $m=-5; n=3$, тогда получим:

$$\left(a^m\right)^n=\left(a^{-5}\right)^3=\left(\frac{1}{a^5}\right)^3=\frac{1}{a^{15}}=a^{-15}=a^{(-5)\cdot 3}=a^{m\cdot n}$$

3. Пусть $m=-5; n=-3$,получим:

$$\left(a^m\right)^n=\left(a^{-5}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{a^5}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{\frac{1}{a^5}}\right)^3=\left(1:\frac{1}{a^5}\right)^3=\left(1\cdot a^5\right)^3=\left(a^5\right)^3=$$

$$=a^{15}=a^{(-5)\cdot(-3)}=a^{m\cdot n}.$$

Как видите, и в этом случае формула $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ справедлива!

Читатель: А если m или n равно нулю?

Автор: Пусть, например, $m=0$, а $n\neq 0$, тогда

$$(a^m)^n=(a^0)^n=1^n=1=a^0=a^{0\cdot n}=a^{m\cdot n}.$$

Если же $m\neq 0;\ n=0$, то все еще проще:

$$(a^m)^n=(a^{\grave{o}})^0=1=a^0=a^{m\cdot 0}=a^{m\cdot n}.$$

Теперь приступаем к задачам на упрощение алгебраических выражений.

Задача 5.27. а) Представьте в виде степени с основанием t выражение $\frac{(t^{-2})^3}{t^{-3}\cdot t^2}$; б) упростите выражение $\frac{b^{12}b^{-11}:(b^3)^{-5}}{(b^{-5})^{-4}b^4:(b^3)^8}$; в) найдите значение выражения $\frac{(x^{-2})^{-5}}{x^{17}x^{-6}}$ при $x=-\frac{3}{4}$.

Решение.

а) $\frac{(t^{-2})^3}{t^{-3}\cdot t^2}$. Воспользуемся формулами $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ и $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$. Получим:

$$(t^{-2})^3 = t^{(-2)\cdot 3} = t^{-6}; \quad t^{-3}\cdot t^2 = t^{-3+2} = t^{-1}.$$

Теперь наше выражение можно переписать в виде

$$\frac{(t^{-2})^3}{t^{-3}\cdot t^2} = \frac{t^{-6}}{t^{-1}} = t^{-6} : t^{-1}.$$

Воспользуемся формулой $a^m : a^n = a^{m-n}$, получим:

$$t^{-6} : t^{-1} = t^{-6-(-1)} = t^{-6+1} = t^{-5}.$$

Итак, $\dfrac{(t^{-2})^3}{t^{-3}\cdot t^2} = t^{-5}$.

б) $\dfrac{b^{12}b^{-11} : (b^3)^{-5}}{(b^{-5})^{-4}b^4 : (b^3)^8}$. Сначала воспользуемся формулой $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ и выполним операции возведения степени в степень:

$$(b^3)^{-5} = b^{3\cdot(-5)} = b^{-15}; \ (b^{-5})^{-4} = b^{(-5)\cdot(-4)} = b^{20};$$

$$(b^3)^8 = b^{3\cdot 8} = b^{24}.$$

Теперь наше выражение станет немного проще:

$$\frac{b^{12}b^{-11} : (b^3)^{-5}}{(b^{-5})^{-4}b^4 : (b^3)^8} = \frac{b^{12}b^{-11} : b^{-15}}{b^{20}b^4 : b^{24}}.$$

Воспользуемся формулой $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и выполним умножение:

$$\frac{b^{12}b^{-11} : b^{-15}}{b^{20}b^4 : b^{24}} = \frac{b^{12+(-11)} : b^{-15}}{b^{20+4} : b^{24}} = \frac{b^1 : b^{-15}}{b^{24} : b^{24}}.$$

Воспользуемся формулой $a^m : a^n = a^{m-n}$ и выполним деление:

$$\frac{b^1 : b^{-15}}{b^{24} : b^{24}} = \frac{b^{1-(-15)}}{b^{24-24}} = \frac{b^{1+15}}{b^0} = b^{16}.$$

Итак, мы получили:

$$\frac{b^{12}b^{-11} : (b^3)^{-5}}{(b^{-5})^{-4}b^4 : (b^3)^8} = b^{16}.$$

в) $\dfrac{(x^{-2})^{-5}}{x^{17}x^{-6}}$. Чтобы найти значение этого выражения при $x=-\dfrac{3}{4}$, сначала с помощью формул $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$; $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ и $a^m:a^n=a^{m-n}$ упростим наше выражение:

$$\frac{(x^{-2})^{-5}}{x^{17}x^{-6}}=\frac{x^{(-2)\cdot(-5)}}{x^{17+(-6)}}=\frac{x^{10}}{x^{11}}=x^{10-11}=x^{-1}=\frac{1}{x}.$$

Теперь подставим в наше выражение значение $x=-\dfrac{3}{4}$, получим:

$$\frac{1}{x}=1:\left(-\frac{3}{4}\right)=1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}.$$

Ответ: а) t^{-5}; б) b^{16}; в) $-\dfrac{4}{3}$.

СТОП! Решите самостоятельно.

А20. Представьте в виде степени с основанием a:

а) $a^{-3}a^{-3}$; б) $\dfrac{a^5}{a^7}$; в) $(a^{-7})^3$; г) $a^{-5}a^0a^3$; д) $\dfrac{a^{-3}}{a^{-5}}$; е) $(a^{-7})^{-9}$.

Б32. Упростите:

а) $(a^2a^{-5})^3$; б) $c^{-9}:(c^{-5}c^2)$; в) $\dfrac{(a-b)^{10}(a-b)^{-1}}{(a-b)^{11}}$; г) $\dfrac{a^2a^5:a^{-6}}{a^7a^{-8}:a^{14}}$.

В28. Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^k$; б) $1\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-k}$; в) $\dfrac{k^{-9}k^{-5}}{k^{-13}}$; если $k=-1$; -2.

И снова уравнения

Задача 5.28. Решите уравнения: а) $3^x=\dfrac{1}{81}$; б) $3^{x-10}=\dfrac{1}{81^x}$.

Решение. а) $3^x=\dfrac{1}{81}$. Заметим, что $81=3^4$ (см. таблицу 5.1), тогда наше уравнение можно представить так:

$$3^x = \frac{1}{81} \to 3^x = \frac{1}{3^4} \to 3^x = 3^{-4} \to x = -4 .$$

Проверим. Правая часть: $3^x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; левая часть: $\frac{1}{81}$. Все верно!

б) $3^{x-10} = \frac{1}{81^x} \to 3^{x-10} = \frac{1}{(3^4)^x} \to 3^{x-10} = \frac{1}{3^{4x}} \to 3^{x-10} = 3^{-4x} \to$ $x-10 = -4x$. Нам осталось решить это простое линейное уравнение.

Прибавим $4x$ к обеим частям уравнения $x-10=-4x$, получим:

$$x-10+4x = -4x+4x \to 5x-10 = 0 .$$

Теперь прибавим 10 к обеим частям уравнения, получим:

$$5x-10=0 \to 5x-10+10 = 0+10 \to 5x = 10 .$$

Из последнего уравнения легко найти значение x, для этого надо разделить обе части уравнения на 5:

$$5x = 10 \to 5x : 5 = 10 : 5 \to x = 2 .$$

Ответ: а) $x=-4$; б) $x = 2$.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б33. Решите уравнение: а) $2^x = \frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$.

В29. Решите уравнение: а) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x+\frac{2}{7}} = 1$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x+2} = 64$.

Стандартный вид числа

Вспомним, что степени с основанием 10 с натуральными показателями имеют следующий вид:

$10^1 = 10$;

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$;

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$;

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ и т.д.

$$10^{ï} = 1\underbrace{0 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{ï ñîìíîæèòåëåé}} = 1\underbrace{000\ldots000}_{\text{ï íóëåé}}.$$

Итак, 10^n – это число, которое записывается в виде единицы, за которой стоят n нулей. Это обстоятельство позволяет кратко записывать большие числа. Например:

$$1\,000\,000\,000 = 10^9;$$

$$100\,000\,000\,000=10^{11}.$$

Вспомним, что умножить десятичную дробь на 10^n – это все равно, что n раз подряд умножить ее на 10, ведь $10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n \text{ сомножителей}}$. А так как при каждом умножении на 10 запятая переносится на одну позицию вправо, то при умножении на 10^n запятая переносится на n позиций вправо.

Пример 1. $2{,}346 \cdot 10^2 = 234{,}6$.

Здесь мы просто перенесли запятую на две позиции вправо.

Пример 2. $0{,}00123 \cdot 10^4 = 00012{,}3 = 12{,}3$.

В этом примере после переноса запятой на четыре позиции вправо остались нули в разрядах сотен, тысяч и десятков тысяч. Эти нули, конечно, никак не влияют на величину числа, поэтому в окончательном ответе мы их просто убираем.

Пример 3. $2{,}34 \cdot 10^3 = 2{,}3400 \cdot 10^3 = 2340{,}0 = 2340$.

Сначала мы добавили два нуля в разрядах тысячных и десятитысячных, потом перенесли запятую на три позиции вправо, а в конце убрали уже ненужный нам ноль в разряде десятых.

Заметим, что при достаточном опыте дописывать и убирать нули можно в уме.

Пример 4. $465 \cdot 10^3 = 465\,000$.

В данном случае на 10^3 умножается целое число 465. А при умножении целого числа на 10^n к нему приписывается справа n нулей. В этом примере $n = 3$, поэтому мы приписали три нуля.

Вспомним, что разделить десятичную дробь на 10^n – это все равно, что n раз подряд разделить ее на 10. Поскольку при делении на 10 запятая переносится на одну позицию влево, то при делении на 10^n запятая переносится на n позиций влево.

Пример 5. $2346{,}7 : 10^2 = 23{,}467$.

Мы просто перенесли запятую на две позиции влево.

Пример 6.

$0{,}0123 : 10^3 = 0000{,}0123 : 10^3 = 0{,}0000123$.

Здесь мы сначала дописали нули в разрядах десятков, сотен и тысяч. Ясно, что от этого величина делимого не изменилась. А затем мы перенесли запятую на три позиции влево.

Пример 7. $465 : 10^4 = 00465{,}0 : 10^4 = 0{,}04650 = 0{,}0465$.

В этом примере мы сначала добавили дробную часть в виде нуля десятых и дописали нули в разрядах тысяч и десятков тысяч, потом перенесли запятую на 4 позиции влево, а в окончательном ответе мы отбросили последний нуль за ненадобностью.

Пример 8. $236\,000 : 10^2 = 2360$.

При делении на 10^nцелого числа, оканчивающегося нулями, достаточно просто отбросить n нулей справа. В нашем случае $n = 2$, поэтому мы отбросили два нуля.

Как кратко записать число, в котором много нулей?

Допустим, есть число 5 700 000 000. Возникает вопрос: нельзя ли это число записать как-нибудь покороче, используя 10^n? Сделаем такую «хитрость»: разделим и умножим наше число на 10^9 и получим:

$$5\,700\,000\,000 = \frac{5\,700\,000\,000}{10^9} \cdot 10^9 = \frac{5\,700\,000\,000{,}0}{10^9} \cdot 10^9 =$$

$$= 5{,}700\,000\,000\,0 \cdot 10^9 = 5{,}7 \cdot 10^9.$$

Согласитесь, запись $5{,}7 \cdot 10^9$ занимает значительно меньше места, чем 5 700 000 000!

Задача 5.29. Запишите число 836 000 000 кратко с помощью 10^n так, чтобы перед запятой стояла одна цифра.

Решение. Требуется, чтобы запятая стояла за первой цифрой, то есть за 8. Значит, запятую, которую сейчас можно считать стоящей за последним нулем (836 000 000 = = 836 000 000,0), надо перенести на восемь позиций влево. А такой перенос – это не что иное, как *деление на* 10^8. Следовательно, чтобы наше число не изменилось, его необходимо умножить на 10^8:

$$836\,000\,000{,}0 = 8{,}36\,000\,000\,0 \cdot 10^8 = 8{,}36 \cdot 10^8.$$

СТОП! Решите самостоятельно.

Б34. Представьте данные числа с помощью 10^n так, чтобы перед запятой стояла одна цифра:

а) 628 000; б) 4592 000; в) 579 001 000.

Краткая запись десятичных дробей с большим числом нулей после запятой

Напомним, что если $a \neq 0$ и n – натуральное число, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Например: $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = 0{,}1$; $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0{,}01$; $10^{-9} = \dfrac{1}{10^9} = 0{,}000\,000\,001$ и т.д.

В общем случае справедливо:

$$10^{-\text{ï}} = \frac{1}{10^{\text{ï}}} = 0,\underbrace{000...001}_{\text{ï öèôð}}.$$

Отсюда следует практический вывод: *очень малые числа, содержащие большое число нулей после запятой, можно кратко записать с помощью* 10^{-n}. Например: $0{,}001 = 10^{-3}$, $0{,}0001 = 10^{-4}$ и т.д.

Рассмотрим число 0,000 000 121. Попробуем записать его более кратко, то есть без большого числа нулей после запятой. Для этого сделаем такую «хитрость»: умножим его на 10^7 и тут же разделим на 10^7:

$$\frac{0{,}000\,000\,121\cdot10^7}{10^7}=\frac{0\,000\,000\,1{,}21}{10^7}=\frac{1{,}21}{10^7}=1{,}21\cdot10^{-7}.$$

Согласитесь, $1{,}21\cdot10^{-7}$ занимает меньше места, чем 0,000000121!

Задача 5.30. Представьте число 0,000 000 000 174 с помощью 10^{-n} так, чтобы перед запятой стояла только одна цифра.

Решение. От нас требуется, чтобы запятая стояла после первой цифры нашего числа, то есть после 1. Значит, запятую надо перенести *на десять позиций вправо*, то есть умножить число на 10^{10}. Для того чтобы величина числа при этом не изменилась, его нужно тут же разделить на 10^{10} или, что то же самое, умножить на $10^{-10}=\dfrac{1}{10^{10}}$. Получим:

$$0{,}000\,000\,000\,174 = 0\,000\,000\,000\,1{,}74\cdot10^{-10} = 1{,}74\cdot10^{-10}.$$

СТОП! Решите самостоятельно.

Б35. Представьте данные числа с помощью 10^{-n} так, чтобы перед запятой стояла одна значащая цифра: а) 0,336; б) 0,748; в) 0,06333; г) 0,0847; д) 0,00322.

Стандартный вид положительного числа

Любое положительное число a можно представить в виде: $a_1\cdot10^n$, где $1 \le a_1 < 10$, а n – целое число. Например: $3{,}65\cdot10^5$; $2{,}8\cdot10^1$; $4{,}13\cdot10^0$; $6{,}87\cdot10^{-7}$ и т.д.

Такая запись называется *стандартным видом числа*, а показатель степени n называется при этом *порядком числа.*

Задача 5.31. Представьте в стандартном виде числа: а) 395; б) 4,13; в) 0,0023.

Решение.

а) Чтобы представить число 395 = 395,0 в стандартном виде, надо перенести запятую на две позиции влево, то есть разделить число на 10^2. А чтобы не изменилось значение этого числа, необходимо умножить его на 10^2:

$$395{,}0 = 3{,}950 \cdot 10^2 = 3{,}95 \cdot 10^2.$$

Итак, $395 = 3{,}95 \cdot 10^2$. Заметим, что число имеет *порядок 2*.

б) В числе 4,13 запятая уже стоит после первой значащей цифры, значит, для представления его в стандартном виде достаточно умножить его на $1 = 10^0$, получим:

$$4{,}13 = 4{,}13 \cdot 10^0.$$

Заметим, что это число имеет *порядок 0*.

в) Для представления данного числа в стандартном виде необходимо перенести запятую на три позиции вправо, то есть умножить его на 10^3. Чтобы величина числа при этом не изменилась, необходимо тут же умножить его на 10^{-3}:

$$0{,}0023 = 0002{,}3 \cdot 10^{-3} = 2{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Заметим, что *порядок* этого числа равен –3.

СТОП! Решите самостоятельно.

Б36. Приведите к стандартному виду числа и укажите порядок: а) 16; б) 659; в) 2034; г) 0,718; д) 0,00728; е) 343,964; ж) 0,000 433.

Задача 5.32. Приведите к стандартному виду число $210{,}3 \cdot 10^{-3}$.

Решение. Сначала приведем к стандартному виду число 210,3. Для этого перенесем запятую на две позиции влево и умножим полученное число на 10^2:

$$210{,}3 = 2{,}103 \cdot 10^2.$$

Затем вынесем число 2,103 за скобки и произведем умножение 10^2 на 10^{-3}:

$$210{,}3 \cdot 10^{-3} = 2{,}103 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} = 2{,}103 \cdot (10^2 \cdot 10^{-3}) = 2{,}103 \cdot 10^{2-3} =$$
$$= 2{,}103 \cdot 10^{-1}.$$

Запишем окончательный результат:

$$210{,}3 \cdot 10^{-3} = 2{,}103 \cdot 10^{-1}.$$

Таким образом, порядок нашего числа равен –1.

СТОП! Решите самостоятельно.

В30. Приведите к стандартному виду числа: а) $15\cdot10^9$; б) $825\ 000\cdot10^6$; в) $0{,}86\cdot10^5$; г) $0{,}087\cdot10^3$; д) $512\cdot10^{-4}$; е) $1001\cdot10^{-6}$; ж) $0{,}001\ 73\cdot10^{-16}$; з) $0{,}000\ 000\ 71\cdot10^{-29}$.

✍ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задачи очень легкие

А21. Запишите данное произведение в виде степени, укажите основание и показатель степени:

а) $9{,}4\cdot9{,}4\cdot9{,}4\cdot9{,}4\cdot9{,}4$; б) $\left(-6\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-6\frac{7}{8}\right)$; в) $(-3p)\cdot(-3p)\cdot(-3p)\cdot(-3p)$; г) $(2x-y)\cdot(2x-y)\cdot(2x-y)\cdot(2x-y)$.

А22. Представьте в виде произведения одинаковых множителей: а) $3{,}5^4$; б) $(-0{,}01)^3$; в) $(-1000)^4$; г) $(-2a)^6$; д) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^5$; е) $\left(-\frac{a}{b}\right)^4$.

А23. Вычислите: а) $(-1)^{10}$; б) 0^0; в) 5^3; г) $(-10)^5$; д) 1^{12}; е) 3^4; ж) 289^0; з) $1{,}7^1$.

А24. Определите знак выражения: а) $(-4{,}9)^{2011}$; б) $\left(-7\frac{329}{1000}\right)^{1329}$.

А25. Вычислите: а) $(-1)^7+(-1)^{10}-0^8$; б) $(-1)^{17}\cdot(-1)^2\cdot0^9\cdot1^3$; в) $(-1)^{14}+0^1-1^{24}+0^7-(-1)^5$; г) $(-1)^2-(-1)^3-(-1)^4-(-1)^5$.

А26. Представьте числа в виде суммы степеней 10 с некоторыми коэффициентами: а) 784; б) 3.

А27. Вычислите: а) $7\cdot10^2+5\cdot10^1+3\cdot10^0$; б) $8\cdot10^4+6\cdot10^3+1\cdot10^2+$ $+4\cdot10^0$.

А28. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: а) 18; б) 81; в) 99.

А29. Упростите выражение: а) $(t^3)^2$; б) $(t^5)^8$; в) $(t^7)^{14}$; г) $(t^{11})^{12}$.

А30. Представьте в виде степени: а) $(6^7)^{12}$; б) $((-0{,}12)^5)^2$; в) $\left(\left(1\frac{1}{7}\right)^6\right)^4$; г) $((-0{,}1)^3)^3$; д) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$.

А31. Представьте в виде степени с основанием: а) 2^8; б) 2^{10}; в) 2^{20}; г) 2^4.

А32. Вычислите рационально: а) $2^4 \cdot 5^4$; б) $4^3 \cdot 25^3$; в) $(5 \cdot 10)^4$; г) $12^{10}:6^{10}$.

А33. Представьте в виде степени некоторого выражения: а) b^3x^3; б) $x^2y^2z^2$; в) a^2b^{10}; г) $p^8q^{10}z^{30}$.

А34. Представьте в виде степени некоторого выражения: а) $\dfrac{3^8}{5^8}$; б) $\dfrac{m^3}{8}$.

А35. Запишите в виде степени с целым показателем и целым основанием: а) $(-5)(-5)(-5)$; б) 1; в) $\dfrac{1}{7^2}$; г) $(0{,}1)^{-4}$; д) $\dfrac{1}{9} \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^2$.

А36. Вычислите: а) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^0$; б) 6^{-1}; в) $(-3{,}07)^0$; г) 4^{-4}; д) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$; е) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-2}$; ж) $(-4)^{-2}$; з) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-1}$; и) $\left(1\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$.

А37. Вычислите: а) $2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$; б) $(-3)^3$, $(-3)^2, (-3)^1, (-3)^0, (-3)^{-1}, (-3)^{-2}, (-3)^{-3}$.

А38. Упростите: а) $x^{-3} \cdot x^{-2}$; б) $x^{15}:x^{17}$; в) $(x^{-7})^{-9}$; г) $x^0(x^{-3})^2$; д) $x^{-7}:x^{-11}$; е) $(x^{-5})^9x^{21}$.

Задачи легкие

Б37. Запишите данное произведение в виде степени, укажите основание и показатель степени: а) $\underbrace{(-11)\cdot(-11)\cdot\ldots\cdot(-11)}_{k \text{ ì í î æèòåëåé}}$; б) $\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ ì í î æèòåëåé}}$; в) $\underbrace{(-cd)\cdot(-cd)\cdot\ldots\cdot(-cd)}_{m \text{ ì í î æèòåëåé}}$; г) $\underbrace{(-t+v)\cdot(-t+v)\cdot\ldots\cdot(-t+v)}_{n \text{ ì í î æèòåëåé}}$.

Б38. Вычислите: а) $(-3{,}4)^2$; б) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5$; в) $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^4$; г) $\left(-3\dfrac{1}{3}\right)^3$.

Б39. Зная, что $9^4 = 6561$, найдите: а) $(-9)^4$; б) -9^4; в) 9^5; г) $(-9)^5$.

Б40. Вычислите значение степени, если:

а) основание степени равно 5, показатель равен 5;

б) основание степени равно –0,5, показатель равен 4;

в) основание степени равно $-\dfrac{3}{4}$, показатель равен 3;

г) основание степени равно $1\dfrac{1}{7}$, показатель равен 2.

Б41. Определите знак выражения: а) $(-1{,}7)^8\cdot(-1{,}7)^{13}$; б) $\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^5 \times$ $\times\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^6\cdot\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^7$; в) $-7{,}2^6 + (-4{,}7)^5 - (3 + 3{,}2)^2$.

Б42. Сравните: а) $3{,}2^2$ и 0; б) $\left(-2\dfrac{3}{5}\right)^3$ и 0; в) $(-2{,}7)^{13}$ и $(-4{,}9)^8$.

Б43. Сравните: а) $7{,}1^{15}$ и $7{,}1^{16}$; б) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{11}$ и $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11}$; в) $-8{,}4^3$ и $-8{,}4^4$; г) $-\left(\dfrac{4}{7}\right)^{10}$ и $\left(-\dfrac{4}{7}\right)^{11}$.

Б44. Вычислите: а) $2 + 4\cdot10^3$; б) $-2^6 + (-3)^4$; в) $(6 - 8)^5$; г) $-6^2 - (-1)^4$; д) $2\cdot5^3 + 5\cdot2^3$.

Б45. Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных: а) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ при $x = -1$; 0; 10; б) x^3; $-x^3$; $(-x^3)$ при $x = 4$; –3.

Б46. Докажите, что выражения $a^2 +1$ и $(a-1)^2+1$ принимают только положительные значения.

Б47. Вместо многоточия поставьте нужный знак неравенства: а) $x^2 + y^2$ ... 0; б) $(a + 51)^2 + (b^2 - 13)^2$ ... 0; в) $5(a^2 + b^2)$ ... 0; г) $-94(x + y)^2$ ... 0.

Б48. Представьте числа в виде суммы, степеней 10 с некоторыми коэффициентами: а) 890305; б) 1 000 430 209.

Б49. Какой цифрой оканчивается значение выражения: а) 3246^5; б) $71^6 + 90^7$; в) $96^3 - 84^2 + 88^2$; г) разность пятых степеней чисел 2325 и 571?

Б50. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: а) 600, б) 432, в) 784.

Б51. Представьте в виде квадрата или куба: а) 3; б) –216; в) –0,125.

Б52. Представьте в виде квадрата или куба: а) –8; б) 0,0625; в) –64; г) 1,69.

Б53. Представьте произведение в виде степени: а) $a^n a^2$; б) xx^n; в) xx^4x^n.

Б54. Представьте произведение в виде степени: а) $81\cdot 3^{11}$; б) $1024\cdot 2^4$; в) $0{,}001\cdot 0{,}1^4$.

Б55. Упростите и вычислите: а) $\dfrac{9^{15}}{9^{12}}$; б) $\left(-1\dfrac{2}{7}\right)^{18} : \left(-1\dfrac{2}{7}\right)^{16}$; в) $\dfrac{(-7{,}29)^{189}}{(-7{,}29)^{188}}$; г) $(-0{,}2)^{19} : (-0{,}2)^{14}$.

Б56. Упростите и вычислите:

а) $\dfrac{5^{15}}{5^{13}}$; б) $\dfrac{(-0{,}6)^{12}}{(-0{,}6)^4\cdot(-0{,}6)^5}$; в) $\dfrac{(-0{,}09)^5\cdot(-0{,}09)^4}{(-0{,}09)^7}$; г) $\dfrac{\left(\frac{7}{8}\right)^{16}\cdot\frac{7}{8}}{\left(\frac{7}{8}\right)^{15}}$.

Б57. Упростите выражение: а) $x^{13}:x$; б) $y^8:y^7$; в) $a^{26}:a^{19}$; г) k^{31}/k^{18}; д) x^l/x^5 $(l > 5)$; е) t^{33}/t^k $(0 < k < 33)$; ж) p^{18}/p^{k+1}; з) a^{3k-4}/a^8.

Б58. Упростите выражение: а) $(-u^3)^2\cdot(u^5)^4$; б) $(-u^2)^3\cdot(u^6)^2$.

Б59. Выполните возведение в степень: а) $(a^7)^n$; б) $(u^6)^{3n}$; в) $(x^n)^8$; г) $(-c^4)^{7n}$.

Б60. Вычислите: а) $\dfrac{(5^6)^3\cdot 5^8}{5^{21}}$; б) $\dfrac{(-2{,}1)^4\cdot((-2{,}1)^3)^3}{((-2{,}1)^2)^6}$; в) $\dfrac{4^7\cdot 16}{(4^2)^4}$.

Б61. Представьте, если возможно, выражение в виде степени с основанием –3: а) 81^4; б) 729^2.

Б62. Сравните: а) $(10x)^5$ и $10x^5$, если $x > 0$; б) $\left(\dfrac{1}{2}x\right)^4$ и $\dfrac{1}{2}x^4$, если $x < 0$.

Б63. Замените * таким выражением, чтобы выполнялось равенство: а) $(*)^8a^7a^4 = a^{27}$; б) $aa^4(*)^{10} = a^{35}$.

Б64. Решите уравнение: а) $17^{3x-1} = 17\cdot 17^{x+2}$; б) $15^{2x+5} = 1$.

Б65. Вместо x напишите такое число, чтобы равенство было верным: а) $x\cdot 3^{10}=3^{12}$; б) $x\cdot 25 = 5^3$; в) $x\cdot 7^8 = 7^{13}$.

Б66. Вместо x напишите такое выражение, чтобы равенство было верным: а) $r^3\cdot x = r^{11}$; б) $x\cdot r^{14} = r^{16}$.

Б67. Представьте, если возможно, данное выражение в виде произведения двух сомножителей, одним из которых является $3ab$: а) $6a^2b$; б) $-24a^8b^6$; в) $2a^6b^4$.

Б68. Вычислите рационально: а) $0{,}25^{15}\cdot 4^{15}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot 1{,}5^7$; в) $\left(-\frac{7}{8}\right)^{10}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)^{10}$; г) $0{,}2^5\cdot 2^5\cdot 5^5$; д) $(0{,}1\cdot 7\cdot 100)^3$.

Б69. Выполните возведение в степень: а) $(10b^2d^5)^4$; б) $(a^3bn^6)^{18}$; в) $(-0{,}1kc^5a^{11})^6$; г) $(-4c^5a^8d^9)^2$; д) $(-1{,}1c^na^8)^2$; е) $(-0{,}3a^6bd^{2n-1})^4$.

Б70. Представьте в виде степени некоторого выражения: а) $125c^3d^3z^3$; б) $8x^6$; в) $0{,}01x^8y^{16}$; г) $\frac{1}{81}a^4b^2$.

Б71. Представьте в виде степени некоторого выражения: а) $0{,}027m^3$; б) $-125c^9d^6$; в) $-\frac{1}{27}x^9y^{12}$; г) $0{,}216a^3c^6$; д) $1\frac{7}{9}a^{16}b^{18}$.

Б72. Сравните: а) $(-2)^4$ и 2^4; б) $(-2{,}2)^{-3}$ и 0; в) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ и $(-2)^0$; г) $(-1{,}6)^{-7}$ и $(-1{,}6)^0$.

Б73. Расположите в порядке убывания: а) 11^{-2}, -11^2, $(-11)^2$, $(-1)^{-2}$, -1^{-2}; б) 13^{-2}, -3^2, $(-3)^2$, $(-3)^{-2}$, -3^{-2}.

Б74. Упростите: а) $(a^{-7}b^2)^{-2}$; б) $a^{-12}a^5/a^{17}$; в) $(-pq)^{-14}(-pq)^{-13}/(-pq)^{-27}$; г) $\left(\frac{p}{2}\right)^{16}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{-27}:\left(\frac{p}{2}\right)^{-15}$.

Б75. Решите уравнение: а) $5^x=\frac{1}{25}$; б) $5^x=\frac{1}{125}$; в) $(-2{,}5)^x=1$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=3\frac{3}{8}$.

Б76. Приведите к стандартному виду числа и укажите порядок: а) 81; б) 161; в) 4062; г) 0,521; д) 9,91; е) 0,0118; ж) 0,000 961; з) 10 200; и) 127 000;

Задачи средней трудности

В31. Запишите данное произведение в виде произведения степеней, укажите основание и показатель каждой степени:

а) 4,35·18·18·18·4,35·18; б) $(-d)\cdot c\cdot c\cdot c\cdot(-d)\cdot c\cdot(-d)\cdot(-d)$; в) $\left(-3\dfrac{1}{8}\right)\times$ $\times 15{,}9\cdot ð\cdot\left(-\dfrac{25}{8}\right)\cdot 15{,}9$; г) $(-0{,}5)\cdot\left(-2\dfrac{2}{3}\right)\cdot k\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot k\cdot\left(-\dfrac{8}{3}\right)\cdot k$.

В32. Определите знак выражения: а) 0^n, б) $-3\cdot(-1)^m$; в) $(-1)^m$ + $+ (-1)^{m-1}$.

В33. Даны выражения: $(-1{,}8)^n$, $8{,}4^n$, $(-5)^{2n}$, $(-7)^{n+2}$, $(-1{,}8)^{4n}$, $(-3{,}2)^{n+1}$. Выберите те из них, которые при любом n принимают положительные значения.

В34. Не производя вычислений, расположите в порядке возрастания следующие числа: а) $(-0{,}4)^3$, $(-1{,}5)^2$, $(-7)^3$, $\left(\dfrac{1}{7}\right)^3$;

б) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^3$, $(-1{,}8)^2$, $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^3$, $(-2{,}1)^2$.

В35. Что больше: $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ или $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$? Рассмотрите чётные и нечётные n $(n > 0)$.

В36. Что больше: а) 2^n или 3^n; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ или $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ $(n > 0)$?

В37. Вычислите: а) $7200\cdot(-1)^4$; б) $232^0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3$; в) $\dfrac{7^2}{(-7)^3}$;

г) $\dfrac{1{,}8}{(-0{,}3)^2}$; д) $(-0{,}5)^3 + (-0{,}4)^2$; е) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4-\left(\dfrac{2}{9}\right)^2$; ж) $\dfrac{(-2)^2}{2^3}-\dfrac{5^5}{4}$.

В38. Вычислите значения алгебраических выражений при заданных значениях переменных: а) $-x^3 + 0{,}1x^2 - x$ при $x = -1; 0; 5; \dfrac{1}{4}$;

б) $0{,}5y^3 - 0{,}2y^2 + 0{,}4$ при $y = -2; 0; 1; \dfrac{2}{5}$.

В39. Из данных выражений выберите те, которые при любом значении переменной b принимают отрицательные значения: а) $-b^2$; б) $(-b)^2$; в) $-b^2 - 5$; г) $-(b + 1)^2$; д) $-8 - 3b^2$; е) $-2b^2 - 1$.

В40. Вычислите: а) $2\cdot10^5 + 6\cdot10^4 + 8\cdot10^2 + 9$; б) $6\cdot10^7 + 5\cdot10^5 + 4\cdot10^3 + 2\cdot10^2$.

В41. Какой цифрой оканчивается значение выражения: а) 691^4; б) $75^5 - 31^4$; в) $37^2 + 61^6 + 95^4$; г) сумма кубов чисел 381 и 516.

В42. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: а) 3969; б) 21600; в) 19360.

В43. Представьте в виде квадрата или куба: а) $\frac{25}{169}$; б) 0,0001; в) 0,16; г) –0,027; д) $4\frac{17}{27}$.

В44. Представьте в виде квадрата или куба: а) 0,0004; б) $\frac{16}{49}$; в) –0,216; г) $3\frac{3}{8}$; д) $-\frac{343}{512}$; е) $1\frac{11}{25}$.

В45. Представьте произведение в виде степени: а) $81\cdot3^6$; б) $9\cdot2187$; в) $27\cdot243$.

В46. Представьте произведение в виде степени: а) $3^{n+5}\cdot81$; б) $216\cdot6^{n+2}$.

В47. Упростите выражение: а) $x^{33}: x^{16}: x^{15}$; б) $a^{36}: a^{18}: a$; в) $(c+d)^{11}:(c+d)^7$; г) $(k-l)^{44}:(k-l)$.

В48. Упростите и вычислите:

а) $\frac{16\cdot2^7}{2^9}$; б) $\frac{(-4)^4\cdot(-4)^{13}}{(-4)^{14}\cdot(-64)}$; в) $\frac{(-49)\cdot(-7)^7}{7\cdot343\cdot(-7)^3}$.

В49. Упростите выражение:

а) $t^6\cdot(t^2)^3$; б) $(x^8)^4\cdot x^{23}$; в) $(b^{14})^3:b^{20}$; г) $(u^8)^9:u^{69}$; д) $(c^8)^2\cdot(c^{12})^3$;

е) $(u^{25})^2\cdot(u^{10})^4$; ж) $\frac{(a^3)^5\cdot a^5}{(a^6)^3}$; з) $\frac{(t^2)^3\cdot t^{16}}{(t^4)^3}$; и) $((b^2)^3)^4$; к) $((c^6)^7)^2$;

л) $(x^2x^3)^4$; м) $(a^4a)^2$.

В50. Запишите 2^{60} в виде степени с основанием а) 16; б) 32.

В51. Представьте, если возможно, выражение в виде степени с основанием 2: а) $(4^3)^6$; б) $(-4^2)^8$; в) $(-8)^3\cdot64$.

В52. Сравните: а) 125^7 и 5^{11}; б) 100^{20} и 200^{10}; в) 4^5 и 32^2; г) 27^{130} и 81^{90}; д) 2^{66} и 4^{33}.

B53. Сравните: а) $0{,}5^{10}$ и $0{,}25^4$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$ è $\left(\frac{1}{27}\right)^2$; в) $0{,}1^{10}$ и $0{,}01^{20}$; г) $(–0{,}1)^8$ и $(–0{,}1)^6$; д) $(–0{,}1)^{117}$ и $(–0{,}1)^{119}$; е) $(–0{,}2)^{116}$ и $(–0{,}2)^{113}$.

B54. Решите уравнения:

а) $\dfrac{x^{17}\cdot x^{23}}{(x^8)^3\cdot x^5\cdot (x^2)^3}=-243$; б) $\dfrac{(x^5)^2\cdot (x^4)^7\cdot x}{x^{130}:(x^{25})^4}=512$.

B55. Решите уравнения: а) $2^{2x-1} = 4\cdot 2^x$; б) $6^{7x-2,4} = 36^{0,2x}\cdot 6^{1,8x+1,6}$; в) $3^{2x}\cdot 27^x = 9^{x-9}$.

B56. Вместо y напишите такое выражение, чтобы равенство было верным: а) $k^{14}\cdot y\cdot k^5\cdot y = k^{25}$; б) $k^{49}\cdot y\cdot k\cdot y = k^{64}$.

B57. Подберите показатель степени m так, чтобы данное равенство было верно при любом значении переменной a:

а) $0{,}3a^m\cdot 6a = 1{,}8a^{12}$; б) $–1{,}2a^{m+2}\cdot a^3 = –1{,}2a^9$.

B58. Решите уравнения: а) $10^{x+1}=100\cdot 10^8$; б) $10^{x-1}=10\cdot 10^{2x-10}$; в) $10^{x+1}=100\cdot 10^{2x-7}$.

B59. Вычислите рационально:

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cdot 1{,}4^9$; б) $0{,}2^6\cdot 50^7$; в) $0{,}125^9\cdot 8^{10}$; г) $\left(\frac{35}{24}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3$.

B60. Вычислите рационально: а) $\dfrac{2^8\cdot 3^8}{6^6}$; б) $\dfrac{3^5\cdot 4^4}{12^3}$; в) $\dfrac{7^{12}\cdot 9^{11}}{63^{10}}$.

B61. Замените P некоторым выражением так, чтобы получилось равенство, верное при всех значениях входящих в него переменных:

а) $P\cdot(–3a^2b) = –12a^2b^4$; б) $(–0{,}3a^4b)\cdot P = 0{,}9a^6b\cdot 2b^5$;

в) $\frac{1}{4}x^4y\cdot P=-\frac{3}{14}x^5\cdot\frac{1}{5}xy^3$.

B62. Проверьте равенство: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=1{,}5^2$; б) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}=0{,}4^3$.

B63. Вычислите: а) $(2 – 2^{–1})^{–1}$; б) $(4^{–2} – 4^{–3})^{–1}$; в) $((–8)^0)^5 – 6^2\cdot\frac{1}{6} –$ $– 5^2\cdot 0{,}2$; г) $\left(0{,}2^{-1}+1\frac{1}{2}\right)^{-1}$; д) $\dfrac{1{,}6^2-(3{,}8)^0\cdot 16\cdot 0{,}4+0{,}4^2}{1{,}88-0{,}2^2}\cdot 2^{-1}$.

В64. Сравните:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{9}\cdot 1{,}5^{10}$ и $\left(-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)^{0}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$ и $\left(1{,}5+\frac{2}{3}\right)^{0}$.

В65. Представьте в виде степени некоторого выражения:

а) $\frac{8a^3}{b^6}$; б) $\frac{0{,}027\tilde{n}^9}{b^{12}}$; в) $\frac{2\frac{1}{4}a^4b^3}{c^{16}}$.

В66. Упростите выражение:

а) $(-0{,}1xy)^4\cdot(0{,}2zy)^2\cdot(-10xyz)^3$; б) $\left(1\frac{1}{7}bxy\right)^2\cdot\left(-\frac{7}{8}by\right)^3\cdot(-2cx)^5$.

В67. Упростите:

а) $\frac{a^7a^9:a^{-4}}{a^{16}:a^{-6}a^2}$; б) $(k+l)^4:(k+l)^3(k+l)^2:(k+l)^3$; в) $\frac{(b^4)^3(b^{-3})^{-3}:b^{19}}{b^{19}b:(b^4)^{-5}}$.

В68. При $k = 1; 0; -1$ найдите значение выражений:

а) $\left(-1\frac{2}{7}\right)^{k}$; б) $3\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{17}\right)^{0}\left(\frac{5}{17}\right)^{-k-1}$.

В69. При $a = -1$, $b = 2$ найдите значение выражений:

а) $\frac{a^{-3}b^{-2}}{a^{-4}b^2}$; б) $a^{-2}b(a^{-3})^{-2}b^{-5}$.

В70. Решите уравнение:

а) $3{,}429^{0{,}5x\,+\,0{,}25} = 1$; б) $0{,}4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}$; в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x+5}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{3x-2} = \frac{9}{16}$.

В71. Приведите к стандартному виду числа: а) $6400\cdot10^3$; б) $161\cdot10^{11}$; в) $17{,}3\cdot10^{18}$; г) $0{,}000\,191\cdot10^6$; д) $51\cdot10^{-3}$; е) $0{,}186\cdot10^{-1}$; ж) $0{,}981\cdot10^{-3}$; з) $0{,}009\,27\cdot10^{-5}$; и) $0{,}016\cdot10^{-4}$; к) $0{,}026\cdot10^{23}$.

Задачи трудные

Г7. Запишите произведение $-\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 0{,}5\cdot k\cdot 4\cdot(-k)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot k^2$ в виде произведения степеней, укажите основание и показатель каждой степени.

Г8. Что больше: $(-2)^n$ или $(-3)^n$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ или $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$? Рассмотрите разные n.

Г9. Вычислите значение выражений при заданных значениях переменных:

а) $-4x^4 + y^2 - (x + y)^2$ при $x = 2$; $y = -6$;

б) $0{,}7\cdot 2^{n+1} + (0{,}5\cdot 2)^{2n+9} - 0{,}4\cdot 2^{2n+1}$ при $n = 2$.

Г10. Какой цифрой оканчивается значение выражения 444^{444}.

Г11. Какой цифрой оканчивается значение выражения: а) 44^{123}; б) 777^{777}; в) 8888^{9999}.

Г12. Представьте в виде произведения степеней простых чисел: а) 18513; б) 10404; в) 38025.

Г13. Найдите значение выражения:

а) $(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+1}$, где $n > 2$;

б) $(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n+2}\cdot(-1)^{n+3}\cdot(-1)^{n+4}$, где $n > 1$.

Г14. Вычислите рационально: $\dfrac{(32^2)^2 \cdot 4^5}{(-16)^8}$.

Г15. Укажите все пары натуральных значений t и k, при которых верно равенство: а) $t^k = (2^3)^3$; б) $t^k = (5^3)^2$; в) $t^k = (7^2)^2$.

Г16. Решите уравнение: $3^{3^{\frac{x}{2}}} = 19683$.