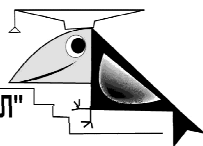




Всероссийская школа
математики и физики
«Авангард»

ШКОЛА-ИНТЕРНАТ
"ИНТЕЛЛЕКТУАЛ"



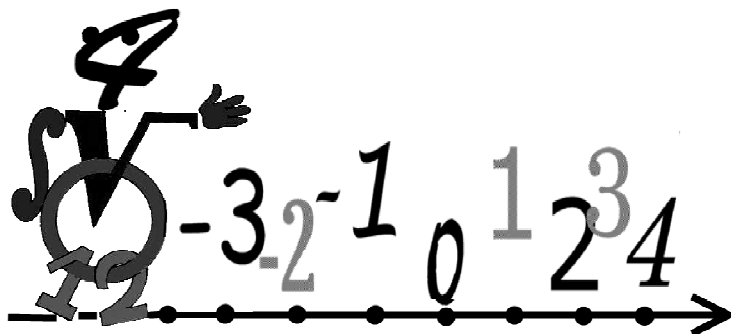
Е. В. Клейменичева, Е. Н. Филатов

МАТЕМАТИКА

5

Экспериментальный учебник

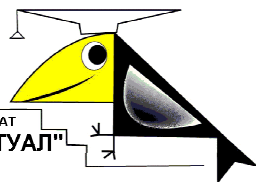
Часть 1



МОСКВА 2012

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ШКОЛА - ИНТЕРНАТ
"ИНТЕЛЛЕКТУАЛ"



Всероссийская школа математики и физики
«Авангард»

Е. В. Клейменичева, Е. Н. Филатов

МАТЕМАТИКА

5

Экспериментальный учебник

Часть 1

МОСКВА 2012

Клеймничева Е.В., Филатов Е. Н. МАТЕМАТИКА-5. Экспериментальный учебник. Часть 1. – М.: АНО ЗФМЛ "Авангард", 2012. – 224 с.

Данное учебное пособие предназначено для углубленного изучения математики в 5-м классе. Главная цель учебника – научить учащихся самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» – краткие рекомендации к их решению и ответы.

© *Е.В. Клеймничева, Е.Н. Филатов, 2012*

© АНО ЗФМЛ "Авангард", 2012

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
-------------------	---

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Позиционная запись числа	5
§ 2. Римские числа	13
§ 3. Координатный луч	17
§ 4. Сравнение натуральных чисел	23
§ 5. Сложение натуральных чисел	29
§ 6. Вычитание натуральных чисел	42
§ 7. Умножение натуральных чисел	48
§ 8. Деление натуральных чисел	63
§ 9. Деление натуральных чисел с остатком	79
§ 10. Что такое степень натурального числа	86
§ 11. Системы счисления	97
§ 12. Методы быстрого вычисления	151
§ 13. Арифметические выражения	172
ПОДСКАЗКИ	195
ОТВЕТЫ	206



§ 11. Системы счисления

Автор: Как Вы считаете, может ли быть верным равенство:
 $8 + 7 = 16$?

Читатель: Нет, конечно, потому что $8 + 7 = 15$!

Автор: И все-таки равенство $8 + 7 = 16$ тоже верное! И после того, как мы с Вами изучим данный параграф, Вы сами сможете объяснить, почему это так.

Начнем же мы с чисто практической задачи.

Система счисления кассира

У кассира в банке есть монеты достоинством 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп. и 10 коп. Кассир должен выдать клиенту сумму 26 руб. 70 коп., при этом используя наименьшее количество монет. Спрашивается: как это сделать?

Читатель: По-моему, начинать надо с крупных денег, то есть сначала следует выдать как можно большее количество 10-рублевых монет (но так, чтобы они не превысили требуемую сумму), потом надо выдавать 5-рублевые, потом 2-рублевые и т.д.

Автор: Хорошо! Начнем с 10-рублевых. Сколько же их надо выдать?

Читатель: Конечно, две: $2 \times 10 = 20$. А три 10-рублевых монеты – уже много, потому что $3 \times 10 = 30$ больше, чем 26 руб. 70 коп.

Автор: Верно. Продолжайте.

Читатель: Дальше пойдут 5-рублевые монеты. Ясно, что нужна только одна такая монета. После того как кассир ее выдаст, выданная сумма составит: $2 \times 10 = 20 + 5 = 25$ руб. и останется выдать:

$$26 \text{ руб. } 70 \text{ коп.} - 25 \text{ руб.} = 1 \text{ руб. } 70 \text{ коп.}$$

2-рублевые монеты нам вообще не понадобятся, но понадобится одна 1-рублевая монета, одна 50-копеечная и две 10-копеечных. В итоге мы получили:

$$2 \times 10 \text{ руб.} + 1 \times 5 \text{ руб.} + 1 \times 50 \text{ коп.} + 2 \times 10 \text{ коп.} = 26 \text{ руб.} 70 \text{ коп.}$$

Автор: Совершенно верно! Давайте для большей наглядности оформим наш результат в виде таблицы. В верхней строке таблицы укажем достоинство каждой монеты, а в нижней – количество монет данного достоинства, которое кассир выдал клиенту (табл. 11.1).

Таблица 11.1

10 руб.	5 руб.	2 руб.	1 руб.	50 коп.	10 коп.
2	1	0	1	1	2

А теперь давайте уберем клеточки таблицы и запишем подряд цифры, стоящие в нижней строке таблицы, получим:

2 1 0 1 1 2.

Читатель: Похоже на какое-то число.

Автор: И каждая цифра в этом числе показывает нам количество монет определенного достоинства, то есть наше «число» 2 1 0 1 1 2 надо понимать так:

$$2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 =$$

$$= 2 \times 10 \text{ руб.} + 1 \times 5 \text{ руб.} + 0 \times 2 \text{ руб.} + 1 \times 1 \text{ руб.} + 1 \times 50 \text{ коп.} + 2 \times 10 \text{ коп.}$$

Или, если перевести рубли в копейки:

$$2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 =$$

$$= 2 \times 1000 + 1 \times 500 + 0 \times 200 + 1 \times 100 + 1 \times 50 + 2 \times 10 (\text{коп.})$$

И в то же время:

$$2 \times 1000 + 1 \times 500 + 0 \times 200 + 1 \times 100 + 1 \times 50 + 2 \times 10 (\text{коп.}) = \\ = 2670 \text{ коп.} = 26 \text{ руб.} 70 \text{ коп.}$$

Получается, что число 2670 мы с Вами записали по-другому: 2 1 0 1 1 2.

Читатель: Значит одно и то же число можно записывать по-разному!

Автор: Совершенно верно. Наша обычная система записи чисел (или система счисления) называется *десятичной*, потому что в ней используется 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. А ту систему счисления, которую мы только что придумали, давайте назовем *системой счисления кассира*.

Заметим, что при записи чисел в нашей обычной, десятичной системе счисления любая из 10-ти цифр может использоваться в любом разряде числа. То есть цифра 9 может стоять и в разряде единиц, и в разряде десятков, и в разряде сотен и т.д.

Как Вы считаете, какие *максимальные* цифры могут стоять в каждой из позиций числа, записанного в системе счисления кассира? То есть, каким может быть максимально возможное количество 10-копеечных, 50-копеечных, 1-рублевых, 2-рублевых и 5-рублевых монет при правильной работе кассира, то есть при минимально возможном количестве выдаваемых монет?

Читатель: По-моему, 10-копеечных монет может быть не более 4, так как если таких монет будет 5, то их следует заменить на одну 50-копеечную монету.

50-копеечных монет может быть не больше одной, потому что две такие монеты следует заменить одной 1-рублевой.

1-рублевых монет тоже может быть не больше одной, потому что две такие монеты следует заменить на 2-рублевую.

2-рублевых монет может быть не больше двух, потому что три такие монеты можно заменить на одну 1-рублевую и одну 5-рублевую.

5-рублевых монет может быть не больше одной, потому что две такие монеты следует заменить одной 10-рублевой.

Ну, а 10-рублевых монет может быть сколько угодно. Тут все зависит от суммы, которую надо выдать.

Автор: Совершенно верно!

Задача 11.1. Запишите в системе счисления кассира сумму 173 руб. 21 коп., если имеются следующие купюры и монеты: 100 руб., 50 руб., 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп., 10 коп., 5 коп., 1 коп.

Решение. Сначала нарисуем таблицу, в верхней строке которой указаны достоинства купюр и монет (табл. 11.2).

Таблица 11.2

100 руб.	50 руб.	10 руб.	5 руб.	2 руб.	1 руб.	50 коп.	10 коп.	5 коп.	1 коп.

1. Начнем заполнять нашу таблицу, начиная со сторублевых купюр. Ясно, что нам нужна ровно одна 100-рублевая купюра, тогда останется выдать:

$$173 \text{ руб. } 21 \text{ коп.} - 100 \text{ руб.} = 73 \text{ руб. } 21 \text{ коп.}$$

2. Добавляем одну 50-рублевую купюру, остается выдать: $73 \text{ руб. } 21 \text{ коп.} - 50 \text{ руб.} = 23 \text{ руб. } 21 \text{ коп.}$

3. Добавляем две 10-рублевых монеты, остается выдать: $23 \text{ руб. } 21 \text{ коп.} - 20 \text{ руб.} = 3 \text{ руб. } 21 \text{ коп.}$

4. 5-рублевые монеты нам не нужны.

5. Добавляем одну 2-рублевую монету, остается выдать: $3 \text{ руб. } 21 \text{ коп.} - 2 \text{ руб.} = 1 \text{ руб. } 21 \text{ коп.}$

6. Добавляем одну 1-рублевую монету, остается выдать: $1 \text{ руб. } 21 \text{ коп.} - 1 \text{ руб.} = 21 \text{ коп.}$

7. 50-копеечная монета нам не нужна.

8. Добавляем две 10-копеечные монеты, остается выдать: $21 \text{ коп.} - 20 \text{ коп.} = 1 \text{ коп.}$

9. 5-копеечные монеты нам не нужны.

10. Добавляем одну 1-копеечную монету, и требуемая сумма набрана.

Итак, мы получили нужную сумму следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &173 \text{ руб. } 21 \text{ коп.} = \\
 &= 100 \text{ руб.} \times 1 + 50 \text{ руб.} \times 1 + 10 \text{ руб.} \times 2 + 5 \text{ руб.} \times 0 + \\
 &+ 2 \text{ руб.} \times 1 + 1 \text{ руб.} \times 1 + 50 \text{ коп.} \times 0 + 10 \text{ коп.} \times 2 + 1 \text{ коп.} \times 1.
 \end{aligned}$$

Теперь запишем в нашу таблицу количества всех, использованных нами купюр и монет (табл.11.3).

Таблица 11.3

100 руб.	50 руб.	10 руб.	5 руб.	2 руб.	1 руб.	50 коп.	10 коп.	5 коп.	1 коп.
1	1	2	0	1	1	0	2	0	1

В системе счисления кассира мы получили число: 1 120 110 201, и это число равно 173 руб. 21 коп. = 17 321 коп.

Ответ: 1 120 110 201.

СТОП! Решите самостоятельно:

A1. Запишите в системе счисления кассира 9 руб. Можно использовать монеты: 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп., 10 коп.

A2. Запишите в системе счисления кассира сумму 12 руб. 30 коп. У вас есть монеты: 10, 5, 2, 1 руб., 50, 10 коп.

B1. На машине времени Вы попали в 1975 год, в Советский Союз. У вас есть с собой деньги 20, 15, 10, 5, 3, 2, 1 копеек. Запишите в системе счисления кассира стоимость мороженого, оно стоит (не удивляйтесь!) 48 копеек.

B2. Запишите в системе счисления кассира стоимость пакета молока, если у вас собой есть купюры по 50 руб. и монеты: 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп., 10 коп. Молоко стоит 64 рубля 90 копеек.

B1. Даны монеты: 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп., 10 коп. Расшифруйте сумму, записанную в системе счисления кассира:

а) 111; б) 2 111 111; в) 6 000 002.

Система счисления продавца

Задача 11.2. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Какие гири он должен по-

ложить на весы, чтобы уравновесить кусок мяса массой 3 кг 420 г? Требуется положить наименьшее число гирь.

Решение. Будем последовательно класть на чашу весов гири, начиная с самых тяжелых.

Ясно, что 5-килограммовая гиря нам не нужна.

1. 2-килограммовая гиря нужна ровно одна. После того, как мы положим ее на чашку весов, останется еще положить: $3 \text{ кг } 420 \text{ г} - 2 \text{ кг} = 1 \text{ кг } 420 \text{ г}$.

2. Добавим гирю в 1 кг, останется положить: $1 \text{ кг } 420 \text{ г} - 1 \text{ кг} = 420 \text{ г}$.

3. Гиря в 500 г нам не нужна.

4. Добавим две гири по 200 г, останется положить: $420 - 2 \times 200 = 20 \text{ г}$.

5. Гири массой 100 г и 50 г нам не нужны.

6. Добавим одну гирю в 20 г – и наш кусок мяса уравновешен!

7. Заметим, что гири в 10, 5 и 1 г нам не понадобились.

Итак, мы набрали нужный вес следующим образом:

$$3 \text{ кг } 420 \text{ г} = 3420 \text{ г} = 0 \times 5 \text{ кг} + 1 \times 2 \text{ кг} + 1 \times 1 \text{ кг} + 0 \times 500 \text{ г} + 2 \times 200 \text{ г} + 0 \times 100 \text{ г} + 0 \times 50 \text{ г} + 1 \times 20 \text{ г} + 0 \times 10 \text{ г} + 0 \times 5 \text{ г} + 0 \times 1 \text{ г}.$$

Оформим наш результат в виде таблицы (табл. 11.4), в которой в верхней строчке указаны массы гирь, а в нижней строчке их количества.

Таблица 11.4

5 кг	2 кг	1 кг	500 г	200 г	100 г	50 г	20 г	10 г	5 г	1 г
0	1	1	0	2	0	0	2	0	0	0

Эта таблица и является ответом на вопрос задачи.

Если теперь убрать клеточки таблицы, в нижней строчке мы получим число: 1 102 002 000 (ноль, соответствующий гире 5 кг мы опустили.)

Можно сказать, что это число выражает массу нашего товара (3420 г) в *системе счисления продавца*.

СТОП! Решите самостоятельно:

А3. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Запишите в системе счисления продавца вес 24 г.

Б3. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Запишите в системе счисления продавца вес: 6 кг 7 г.

В2. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Запишите в системе счисления продавца вес 9 кг 976 г.

В3. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Расшифруйте вес, записанный в системе счисления продавца: а) 111; б) 1 000 011; в) 11 111 111 000; г) 10 101 010 101.

Читатель: А все-таки, что такое «система счисления»?

Автор: Система счисления – это **способ записи натуральных чисел**. Как видим, система счисления кассира позволяет записать любое число копеек, система счисления продавца – любое число грамм.

Позволяет записывать натуральные числа и Римская система счисления, ну и, конечно, наша – десятичная, которую еще называют арабской.

Читатель: И сколько же существует систем счисления?

Автор: Очень много! И мы сейчас будем с ними разбираться по порядку.

Мышки и кошки: двоичная система счисления

Двоичной называется система счисления, в которой для записи натуральных чисел используются только ДВЕ ЦИФРЫ: 0 и 1. Попробуем разобраться с этой системой счислений с помощью следующей сказочной истории.

Представьте себе, что вы попали в сказочную страну, в которой живут волшебные звери:

1) мышки;

- 2) кошки;
- 3) собаки
- 4) лисы;
- 5) волки;
- 6) медведи;
- 7) тигры;
- 8) носороги;

и т.д. Есть и ещё более крупные звери, но пока и этих достаточно.

Читатель: А в чем волшебство?

Автор: Волшебство в том, что если встречаются две волшебные мышки, то они тут же превращаются в волшебную кошку, если встречаются две волшебные кошки, то они превращаются в волшебную собаку, а две волшебные собаки – в волшебную лису, а две лисы – в волка, а два волка в медведя и т.д., то есть, если встречаются два одинаковых зверя, они превращаются в следующего по списку более крупного зверя.

Таким образом, можно записать:

1 кошка = 2 мышки;

1 собака = 2 кошки = 4 мышки;

1 лиса = 2 собаки = 4 кошки = 8 мышек;

1 волк = 2 лисы = 4 собаки = 8 кошек = 16 мышек;

1 медведь = 2 волка = 4 лисы = 8 собак = 16 кошек = 32

мышки и т.д.

Выясним, какая «компания зверей» у нас получится, если на полянку одна за другой будут выбегать волшебные мышки. Для этого нарисуем таблицу 11.5. В левой колонке будем указывать порядковый номер прибежавшей мышки в нашей обычной десятичной системе счисления, а в остальных колонках – количества разных зверей, которые окажутся на полянке после всех волшебных превращений.

Таблица 11.5

Порядковый номер мышки	Лисы	Собаки	Кошки	Мышки
1				1
2			1	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$
3			1	1
4		1	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$
5		1	0	1
6		1	1	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$
7		1	1	1
8	1	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$	$\leftarrow (1 + 1) \ 0$

1. Прибежала первая мышка, и ничего с ней не происходит: сидит себе и сидит.

2. Прибежала вторая мышка, и две мышки тут же превратились в кошку. Теперь у нас на полянке сидит одна кошка, а мышек вообще нет.

3. Прибежала третья мышка и села рядом с кошкой. Никаких превращений не произошло.

4. Прибежала четвертая мышка, мышек стало две, и они тут же превратились в кошку. А одна кошка на полянке уже была, поэтому кошек стало две, и они превратились в собаку. В результате на полянке не осталось ни мышек, ни кошек, но зато появилась одна собака.

5. Прибежала пятая мышка и села рядом с собакой. Больше на полянке никого нет.

6. Прибежала шестая мышка, мышек стало две, и они превратились в кошку. В результате на полянке оказались одна кошка и одна собака.

7. Прибежала седьмая мышка и села рядом с кошкой и собакой, никаких превращений не произошло.

8. Прибежала восьмая мышка и вместе с той мышкой, что уже сидела на полянке, превратились в кошку. Но одна кошка на полянке уже была, поэтому кошек стало две, и они превратились в собаку. Теперь собак стало две, и они превратились в лису. В результате на поляне сидит в гордом одиночестве лиса.

Если рассматривать записанные в таблице 11.5 нули и единицы как **числа**, с помощью которых мы считали мышек, то получится следующая связь между «обычными» числами (т.е. числами, записанными в десятичной системе счисления) и числами, записанными при помощи всего **двух цифр**: нуля и единицы:

$$\begin{aligned} 1 &= 1_2; \quad 2 = 10_2; \quad 3 = 11_2; \quad 4 = 100_2; \quad 5 = 101_2; \\ 6 &= 110_2; \quad 7 = 111_2; \quad 8 = 1000_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы поставили у наших новых чисел внизу маленькую двойку (индекс), чтобы не путать их с «обычными» числами.

Итак, мы с вами получили первые 8 чисел натурального ряда, записанные в **двоичной** системе счисления.

Читатель: Мне вот что непонятно: число 100_2 согласно нашей таблице 11.5 означает не 4 мышки, а одну собаку. А из записи (1) получается, что 100_2 – это 4 мышки.

Автор: Да, но мы знаем, что 1 собака состоит из 4-х мышек, и при желании мы всегда можем пустить «волшебство» в обратном направлении и превратить всех лис, собак и кошек в мышек. И этих мышек получится ровно столько, сколько их прибежало на поляну. И кошки, и собаки, и лисы понадобились нам только для того, чтобы записать число прибежавших на полянку мышек с помощью ТОЛЬКО ДВУХ ЦИФР: нуля и единицы.

СТОП! Решите самостоятельно:

А4. Запишите в двоичной системе счисления «обычные» числа: 9, 10, 11, 12.

Б4. Запишите в двоичной системе счисления «обычные» числа: 16; 32; 64.

Б4. Вставьте пропущенные числа в ряд натуральных чисел: 1001_2 ; 1010_2 ; 1011_2 ; ...; 1101_2 ; 1111_2 ; ...; 10001_2 .

Троичная система счисления

Троичной называется система счисления, в которой используются **три цифры**: 0, 1 и 2.

Пусть теперь в нашей волшебной стране «закон превращений» изменился: теперь из трёх мышек получается одна кошка, из трёх кошек – одна собака, из трёх собак – одна лиса и т.д., то есть:

1 кошка = 3 мышки;

1 собака = 3 кошки = 9 мышек;

1 лиса = 3 собаки = 9 кошек = 27 мышек;

1 волк = 3 лисы = 9 собак = 27 кошек = 81 мышка и т.д.

Посмотрим, какая «компания зверей» окажется на полянке, если на нее одна за другой будут выбегать мышки. Результаты будем записывать в таблицу 11.6.

Таблица 11.6

Порядковый номер мышки	Лисы	Собаки	Кошки	Мышки
1				1
2				$1 + 1 = 2$
3			1	$\leftarrow (2 + 1) \ 0$
4			1	1
5			1	$1 + 1 = 2$
6			$1 + 1 = 2$	$\leftarrow (2 + 1) \ 0$
7			2	1
8			2	$1 + 1 = 2$
9		1	$\leftarrow (2 + 1) \ 0$	$\leftarrow (2 + 1) \ 0$
10		1	0	1

1. Прибежала первая мышка, ни в кого она не превратилась, сидит на полянке одна.

2. Прибежала вторая мышка и села рядом с первой. Никаких превращений пока нет.

3. Прибежала 3-я мышка. Как только на полянке оказались три мышки, они тут же превратились в кошку. Значит теперь на полянке вместо трех мышек сидит одна кошка.

4. Прибежала 4-я мышка и села рядом с кошкой, никаких превращений нет.

5. Прибежала 5-я мышка. Теперь на полянке сидят: одна кошка и две мышки.

6. Прибежала 6-я мышка, и на полянке оказались сразу три мышки, которые тут же превратились в кошку. А одна кошка уже была. Значит, теперь на полянке сидят только две кошки.

7. Прибежала 7-я мышка и села рядом с двумя кошками. Никаких превращений нет.

8. Прибежала 8-я мышка. Теперь на полянке две кошки и две мышки.

9. Прибежала 9-я мышка. На полянке оказались сразу три мышки, и они превратились в кошку. Но две кошки на полянке уже сидели, и теперь их стало три. Эти три кошки тут же превратились в собаку. Вот только одна эта собака и сидит теперь на полянке.

10. Прибежала 10-я мышка и села рядом с собакой.

Теперь рассмотрим записанные в таблице 11.6 цифры (нули, единицы и двойки) как **числа**, записанные в **троичной системе счисления**.

В этих числах цифры, стоящие в каждом из разрядов, указывают количества соответствующих зверей: мышек, кошек, собак и т.д.

В то же время каждое из этих чисел показывает, сколько мышек прибежало на полянку, то есть:

$$1 = 1_3; \quad 2 = 2_3; \quad 3 = 10_3; \quad 4 = 11_3; \quad 5 = 12_3; \\ 6 = 20_3; \quad 7 = 21_3; \quad 8 = 22_3; \quad 9 = 100_3; \quad 10 = 101_3.$$

Внизу рядом с каждым числом, записанным в троичной системе счисления, мы написали индекс 3, чтобы не путать их с «обычными» числами.

СТОП! Решите самостоятельно:

A5. Запишите в троичной системе счисления «обычные» числа: 11; 12; 13; 14; 15.

B5. Запишите в троичной системе счисления «обычные» числа: 27; 81; 243.

B5. Вставьте пропущенные числа натурального ряда: ...; 222₃; ...; 1001₃; 1002; ...; 1011₃.

Четверичная система счисления

В четверичной системе счисления используются четыре цифры: 0; 1; 2 и 3. Чтобы разобраться и с этой системой, воспользуемся еще раз волшебной страной с ее волшебными зверями. Теперь в кошку превращаются 4 мышки, в собаку 4 кошки, в лису 4 собаки и т.д., то есть

$$1 \text{ лиса} = 4 \text{ собаки} = 16 \text{ кошек} = 64 \text{ мышки}.$$

Пусть опять на полянку по одной выбегают волшебные мышки. Чтобы ситуация на полянке была более наглядной, нарисуем таблицу 11.7.

Таблица 11.7

Порядковый номер мышки	Лисы	Собаки	Кошки	Мышки
1				1
2				2
3				3
4			1	$\leftarrow (3 + 1) \ 0$
....	...	...	...	...
8			2	0

....	...	...	...	...
16		1	0	0
....				
64	1	0	0	0
65	1	0	0	1
66	1	0	0	2

Автор: Пока на полянке менее четырех мышек, никаких превращений не происходит. Но вот прибежала 4-я мышка. Что произойдет?

Читатель: Они превратятся в кошку.

Автор: Верно. А что произойдет, если на полянку одновременно прибегут 8 мышек?

Читатель: Я думаю, что они превратятся в две кошки, потому что $8 \text{ мышек} = 4 \text{ мышки} + 4 \text{ мышки} = 1 \text{ кошка} + 1 \text{ кошка} = 2 \text{ кошки}$.

Автор: Верно. А если на полянку одновременно прибегут 16 мышек?

Читатель: Тогда они сначала превратятся в 4 кошки, а потом эти 4 кошки превратятся в одну собаку.

Автор: Правильно. А если прибегут 64 мышки?

Читатель: Тогда они сначала превратятся в 16 кошек ($64 : 4 = 16$), потом эти 16 кошек превратятся в 4 собаки, а потом эти 4 собаки превратятся в одну лису.

Автор: Именно так. А если прибегут 65 мышек?

Читатель: Тогда 64 из этих 65 превратятся в лису и еще одна мышка останется.

Автор: А если мышек будет 66?

Читатель: Тогда 64 мышки превратятся в лису, а две так и останутся мышками.

Автор: Все верно. Как Вы уже догадываетесь, с помощью мышек – кошек, мы уже научились записывать натуральные числа в четверичной системе счисления. Попробуйте

записать в четверичной системе первые 10 натуральных чисел.

Читатель: Первые 4 числа и число 8 мы уже получили в Таблице 11.7, а дальше нетрудно догадаться. По-моему получится так:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1_4	2_4	3_4	10_4	11_4	12_4	13_4	20_4	21_4	22_4

Автор: Все верно.

СТОП! Решите самостоятельно:

А6. Запишите следующие 4 числа натурального ряда в четверичной системе счисления: 20_4 ; 21_4 ; 22_4 ; ...

Б6. Вставьте пропущенные числа в натуральный ряд чисел: 332_4 ; ...; ...; 1001_4 ; ...; 1003_4 .

В6. С помощью Таблицы 11.7 запишите в четверичной системе счисления «обычные» числа: 15, 17, 63,

Круглые числа в различных системах счисления

Теперь вы, наверное, поняли, что система счисления может быть любой: двоичной, троичной, четверичной и т.д.

В пятиричной системе счисления в кошку будут превращаться пять мышек, в шестеричной – шесть, в семиричной – семь и т.д.

Задача 11.3. В восьмеричной системе счисления записаны числа: 10_8 ; 100_8 ; 1000_8 . Запишите эти числа в «обычной» десятичной системе счисления.

Решение. В восьмеричной системе счисления 1 кошка – это 8 мышек.

Число 10_8 означает одну кошку и 0 мышек, а так как 1 кошка = 8 мышек, то $10_8 = 8$.

Число 100_8 – это 1 собака, 0 кошек и 0 мышек; 1 собака = 8 кошек = $8 \cdot (8 \text{ мышек}) = 64$ мышки. Значит, $100_8 = 64$.

Число 1000_8 – это одна лиса, 0 собак, 0 кошек и 0 мышек.
 $1 \text{ лиса} = 8 \text{ собак} = 8 \cdot (8 \text{ кошек}) = 64 \text{ кошки} = 64 \cdot (8 \text{ мышек}) =$
 $= 512 \text{ мышек}$. Значит, $1000_8 = 512 \text{ мышек}$.

Ответ: $1000_8 = 512$.

СТОП! Решите самостоятельно:

В7. Запишите в «обычной» системе счисления круглые числа:

а) 10_5 ; 100_5 ; 1000_5 ; б) 10_6 ; 100_6 ; 1000_6 .

Натуральный ряд чисел в восьмеричной системе счисления

Первые 7 мышек, прибежавшие на полянку, в восьмеричной системе счисления ни во что не превращаются, поэтому первые 7 чисел в восьмеричной системе счисления ничем не отличаются от первых семи чисел в «обычной» десятичной системе счисления: 1_8 ; 2_8 ; 3_8 ; 4_8 ; 5_8 ; 6_8 ; 7_8 .

А вот восемь мышек – это уже одна кошка, поэтому следующее число 10_8 , то есть $8 = 10_8$. Затем цифра в разряде мышек постепенно увеличивается до 7: 1_8 ; 2_8 ; 3_8 ; 4_8 ; 5_8 ; 6_8 ; 7_8 ; 10_8 ; 11_8 ; 12_8 ; 13_8 ; 14_8 ; 15_8 ; 16_8 ; 17_8 .

Следующее число – это 1 кошка и 8 мышек, то есть две кошки: 20_8 . После этого цифра в разряде мышек опять растет до 7: 1_8 ; 2_8 ; 3_8 ; 4_8 ; 5_8 ; 6_8 ; 7_8 ; 10_8 ; 11_8 ; 12_8 ; 13_8 ; 14_8 ; 15_8 ; 16_8 ; 17_8 ; 20_8 ; 21_8 ; 22_8 ; 23_8 ; 24_8 ; 25_8 ; 26_8 ; 27_8 .

Максимальное двузначное число – это 77_8 . Следующее за ним: 100_8 .

СТОП! Решите самостоятельно:

В7. Вставьте пропущенные числа в натуральный ряд чисел: 76_8 ; ..., ...; 101_8 ; 102_8 .

В8. Продолжите ряд натуральных чисел, запишите следующие два числа: 256_8 ; 257_8 ; ...; ...

Двенадцатеричная система счисления

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в кошку превращаются 12 мышек, в собаку – 12 кошек и т.д. В таблице 11.8 показано количество различных зверей на поляне, по мере того, как на поляну выбегают мышки.

Таблица 11.8

Порядковый номер мышки	Собаки	Кошки	Мышки
1	0	0	1
2	0	0	2
...	...	...	...
9	0	0	9
10	0	0	10
11	0	0	11
12	0	1	$\leftarrow (11 + 1) \ 0$
13	0	1	1
...	...	...	...
22	0	1	10
23	0	1	11
24	0	2	$\leftarrow (11 + 1) \ 0$
...	...	...	...
144	1	0	0
145	1	0	1

1. Ясно, что пока не прибежит 12-я мышка на поляне будут одни мышки.

2. После того, как прибежит 12-я мышка, мышки превратятся в кошку и на поляне будет 1 кошка и ни одной мышки.

3. После этого могут прибежать 11 мышек безо всяких превращений.

4. После того, как прибежит 23-я мышка, на поляне будет 1 кошка и 11 мышек, а после того, как прибежит 24-я мышка, 12 мышек превратятся в кошку, и на поляне будут только две кошки и ни одной мышки.

5. Кошки смогут превратиться в собаку только после того, как кошек станет 12, а для этого надо, чтобы на поляну 12 раз прибежало по 12 мышек, то есть $12 \times 12 = 144$ мышки.

6. Значит, после того, как на поляну прибегут 144 мышки, из них получится одна собака, а кошек и мышек не будет совсем.

Читатель: Все понятно, но как записать в 12-ричной системе счисления число 23? Писать: 1 11? Потому что в разряде мышек 11, а в разряде кошек 1. Получается, что в разряде мышек двузначное число. Можно подумать, что у нас число 1 1 1, то есть 1 собака, 1 кошка и 1 мышка, а можно подумать, что это 11 1, то есть 11 кошек и 1 мышка. Тут легко запутаться. Ведь раньше в одной позиции всегда стояли **цифры**.

Автор: Вы правы. А что если мы придумаем новые цифры для числа 10 и числа 11? То есть пусть у нас будет не 10 цифр, а 12!

Читатель: А какие же это будут цифры? Может быть римские?

Автор: Давайте поступим просто: Возьмем в качестве цифр две латинские буквы: $10 = A$, $11 = B$. Тогда наша таблица 11.8 немного изменится (табл. 11.9).

Таблица 11.9

Порядковый номер мышки	Собаки	Кошки	Мышки
1	0	0	1
2	0	0	2
...	...	...	...
9	0	0	9
10	0	0	A
11	0	0	B
12	0	1	$\leftarrow (B + 1) \ 0$

13	0	1	1
...	...	...	...
22	0	1	A
23	0	1	B
24	0	2	$\leftarrow (B + 1) \quad 0$
...	...	...	...
144	1	0	0
145	1	0	1

Теперь попробуем записать первые 25 натуральных чисел в 12-ричной системе счисления.

1. Первые 9 чисел ничем не отличаются от «обычных».
2. Вместо 10 – число A , вместо 11 – число B .
3. Вместо 12 – число 10_{12} (1 кошка и 0 мышек).
4. Дальше число мышек растет до 11 (не забудем, что $A = 10$ и $B = 11$).

5. 24 – это две мышки и 0 кошек, то есть $24 = 20_{12}$, а $25 = 21_{12}$.

Обычные числа	1	2	...	9	10	11	12	...	22	23	24	25
12-е числа	1_1	2_{12}	...	9_{12}	A_{12}	B_{12}	10_{12}	...	$1A_{12}$	$1B_{12}$	20_1	21_1
	2										2	2

СТОП! Решите самостоятельно:

Б8. Запишите в 12-й системе счисления числа: 36; 37; 48; 49.

В9. Вставьте пропущенные цифры в ряд натуральных чисел:

а) ...; BA_{12} ; BB_{12} ; ...; 101_{12} ; ...;

б) ...; $8A_{12}$; $8B_{12}$; ...; 91_{12} .

Вавилонская система счисления

В Древнем Вавилоне была принята 60-ричная система счисления. В этой системе в кошку превращается 60 мышек, в собаку 60 кошек и т.д. Кстати, мы до сих пор пользуемся этой

системой при измерении времени. В самом деле, в одной минуте – 60 секунд, а в 1 часе – 60 минут.

Читатель: То есть секунды – это мышки, минуты – это кошки, а часы – это собаки?

Автор: Совершенно верно! Давайте попробуем записать числа натурального ряда в вавилонской системе счисления.

Читатель: Но в этой системе нам понадобится 60 цифр! Даже если мы возьмем 10 обычных цифр, то нам понадобится еще 50 букв. По-моему ни в одном алфавите нет такого количества букв. Может быть, взять китайские иероглифы? Но в них легко запутаться!

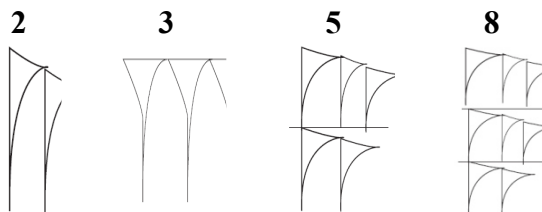
Автор: В Древнем Вавилоне тоже боялись запутаться с большим количеством цифр, и вышли из положения очень просто: вместо того, чтобы изобретать 60 цифр, они придумали ровно три знака:



А из этих знаков уже «конструировали» 60 цифр.

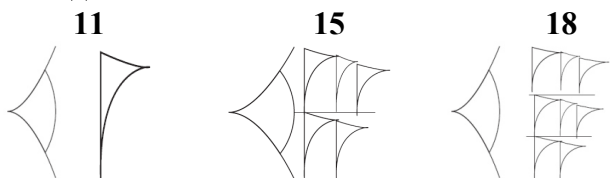
Читатель: А как же записать, например, цифры: 2, 3, 5, 8?

Автор: Очень просто: 2 – это две единички, 3 – это три единички, 5 – это 5 единичек, 8 – это 8 единичек, и т.д. до 10.



Читатель: Хорошо, а как же записать, например, цифры: 11, 15, 18?

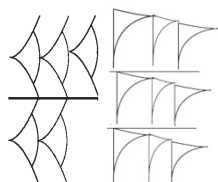
Автор: Очень просто: $11 = 10 + 1$, то есть одна десятка и одна единичка, 15 – это одна десятка и 5 единицек, 18 – одна десятка и 8 единицек:



А число 30 – это просто три десятки:

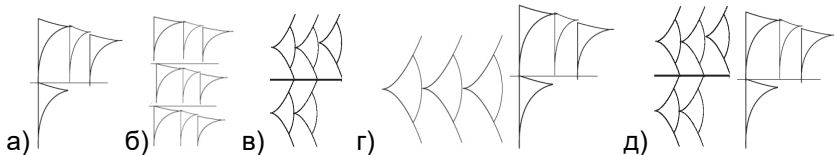


Число 59 – это 5 десятков и 9 единиц:



СТОП! Решите самостоятельно:

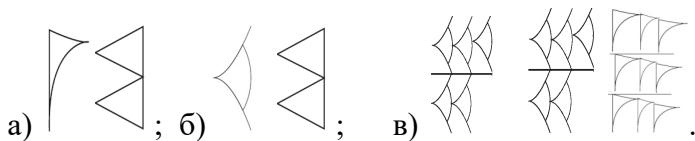
А7. Расшифруйте вавилонские цифры:



Б9. Запишите вавилонские цифры: а) 5; б) 39; в) 51.

Теперь потренируемся записывать двузначные вавилонские числа. Под двузначными вавилонскими числами мы будем понимать такие числа, в которых цифры стоят в двух позициях: в позиции мышек и в позиции кошек.

Задача 11.4. Расшифруйте двузначные вавилонские числа:



Решение.

а) Здесь у нас одна кошка и 0 мышек, то есть 60 мышек.

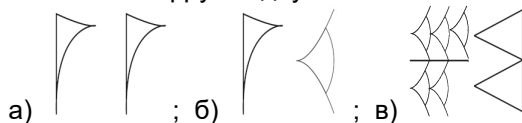
б) У нас 10 кошек и 0 мышек, то есть $10 \times 60 = 600$ мышек.

в) Здесь 50 кошек и 59 мышек, то есть $50 \times 60 + 59$ мышек = $3000 + 59 = 3059$ мышек.

Ответ: а) 50; б) 600; в) 3059.

СТОП! Решите самостоятельно:

В10. Расшифруйте двузначные вавилонские числа:

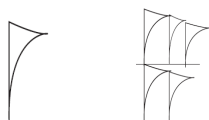


Задача 11.5. Запишите по-вавилонски числа: а) 65; б) 660;

в) 3001; г) 3010.

Решение.

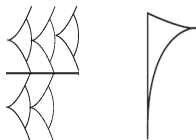
а) $65 = 60 + 5$ – одна кошка и 5 мышек:



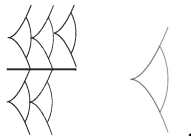
б) $660 = 60 \times 11 + 0$ – 11 кошек и 0 мышек:



в) $3001 = 3000 + 1 = 50 \times 60 + 1$ – 50 кошек и одна мышка:



г) $3010 = 3000 + 10 = 50 \times 60 + 10$ – 50 кошек и 10 мышек:



СТОП! Решите самостоятельно:

Г1. Запишите по-вавилонски числа: а) 75; б) 661; в) 3011; г) 3035.

Таблицы сложения в различных системах счисления

Десятичная система счисления. Вспомните, что для нашей «обычной» системы счисления вы учили (а может быть, и не учили) таблицу сложения для натуральных однозначных чисел (табл. 11.10).

Таблица 11.10

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Напомним, как ей пользоваться. Допустим, мы хотим к 8 прибавить 7. Находим 8-ю строку сверху и 7-й столбец слева. На пересечении 8-й строки и 7-го столбца стоит сумма этих чисел – число 15.

Ясно, что с таким же успехом мы могли бы к 7 прибавить 8. Для этого надо найти число, стоящее на пересечении 7-й строки и 8-го столбца в таблице 11.10. Легко убедиться, что это число 15.

Двоичная система счисления. Составим таблицу сложения для двоичной системы счисления. Она будет состоять ровно из одного числа, потому что в двоичной системе счис-

ления существует только одно однозначное число, не равное нулю – это единица. И сложить это число можно только с самим собой (больше просто не с чем):

Таблица 11.11

+	1_2
1_2	10_2

$$1_2 + 1_2 = 10_2$$

(две мышки равны одной кошке).

Но для красоты оформим наш результат в виде таблицы (табл. 11.11).

Троичная система счисления. Выполним все возможные действия с однозначными числами, не равными нулю в троичной системе счисления. Получим:

Таблица 11.12

+	1_3	2_3
1_3	2_3	10_3
2_3	10_3	11_3

$$1 + 1 = 2;$$

$$1 + 2 = 2 + 1 = 3 = (1 \text{ кошка и } 0 \text{ мышек}) = 10_3;$$

$$2 + 2 = 4 = 3 + 1 = (1 \text{ кошка и } 1 \text{ мышка}) = 11_3.$$

Оформим наши результаты в виде таблицы (табл. 11.12).

Восьмеричная система счисления. Составим таблицу сложения для 8-ричной системы счисления. Сначала еще раз выпишем ряд натуральных чисел, записанный в восьмеричной системе счисления: $1_8; 2_8; 3_8; 4_8; 5_8; 6_8; 7_8; 10_8; 11_8; 12_8; 13_8; 14_8; 15_8; 16_8; 17_8; 20_8; 21_8; 22_8; 23_8; 24_8; 25_8; 26_8; 27_8$.

Начнем заполнение таблицы с первой строки. Будем последовательно прибавлять 1 к числам: 1, 2, 3 ..., 7. Получим:

$$1 + 1 = 2; \quad 1 + 2 = 3; \quad \dots \quad 1 + 6 = 7;$$

$$1 + 7 = 8 = (1 \text{ кошка и } 0 \text{ мышек}) = 10_8.$$

Теперь заполним 1-й столбец, то есть запишем результаты сложения (табл. 11.13): $2 + 1 = 3; \quad 3 + 1 = 4; \quad \dots; \quad 7 + 1 = 10_8$

Таблица 11.13

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10_8
2	3						

3	4						
4	5						
5	6						
6	7						
7	10_8						

Начнем заполнять 2-ю строку. Первое число в этой строке уже стоит: $2 + 1 = 3$.

Второе число $2 + 2 = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$ – на единицу больше предыдущего (тройки).

Третье число 2-й строки: $2 + 3 = (2 + 2) + 1 = 5$ тоже на 1 больше предыдущего (четверки).

Читатель: Вообще каждое последующее число в строке на 1 больше предыдущего потому, что первое слагаемое – 2 всегда одно и то же, а второе с каждым шагом увеличивается на 1.

Автор: Вы правы. И тогда всю 2-ю строку можно заполнить, не производя никаких вычислений: достаточно просто продолжить натуральный ряд чисел, в котором каждое последующее число больше предыдущего ровно на 1, до конца строки: 6; 7; 10_8 ; 11_8 .

Читатель: А теперь можно заполнить 2-й столбец, который ничем не отличается от второй строки (табл.11.14).

Автор: Совершенно верно. Получим следующую картину:

Таблица 11.14

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10_8
2	3	4	5	6	7	10_8	11_8
3	4	5					
4	5	6					
5	6	7					
6	7	10_8					
7	10_8	11_8					

Читатель: А в остальных строках – то же самое: каждое последующее число ровно на 1 больше предыдущего, и можно в каждой строке просто продолжить натуральный ряд чисел, ничего не вычисляя!

Автор: Вы совершенно правы! Можно даже не тратить время на отдельное заполнение столбцов, как мы это делали с первым и вторым столбцами, а сразу заполнить все строки (табл. 11.15).

Таблица 11.15

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10_8
2	3	4	5	6	7	10_8	11_8
3	4	5	6	7	10_8	11_8	12_8
4	5	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8
5	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8
6	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8	15_8
7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8	15_8	16_8

Заметим, что все однозначные числа в наших таблицах мы (для краткости) писали без индекса 8 внизу. Это потому, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 в десятичной и восьмеричной системах счисления – это одно и то же.

СТОП! Решите самостоятельно:

В11. Составьте таблицы сложения в 4-ричной и 5-ричной системах счисления.

+	1	2	3
1			
2			
3			

+	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Г2. Составьте таблицы сложения в 6-ричной и 7-ричной системах счисления.

+	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Сложение многозначных чисел без перехода через базис системы счисления

Читатель: А что такое базис системы счисления?

Автор: Базисом системы счисления называется количество цифр, используемых в данной системе. В двоичной системе счисления базис – 2, в троичной – 3, в «обычной» – 10, в вавилонской – 60.

Оказывается, что в любой системе счисления числа складываются очень легко, если при сложении цифр в каждом разряде получается число, меньшее базиса системы счисления. Убедимся в этом на конкретных примерах.

Задача 11.6. Выполните сложение: а) $1010_2 + 100_2$; б) $1012_3 + 1210_3$; в) $2041_8 + 3125_8$; г) $9A_{12} + 11_{12}$.

Решение. Будем проводить сложение так же, как мы проводили его в 10-й системе счисления – в столбик:

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{а) } \begin{array}{r} 1010_2 \\ + 100_2 \\ \hline 1110_2 \end{array} & \text{б) } \begin{array}{r} 1012_3 \\ + 1210_3 \\ \hline 2222_3 \end{array} & \text{в) } \begin{array}{r} 2041_8 \\ + 3125_8 \\ \hline 5166_8 \end{array} & \text{г) } \begin{array}{r} 39A_{12} \\ + 41_{12} \\ \hline 7AB_{12} \end{array}
 \end{array}$$

Здесь все предельно просто: складываем единицы в каждом из разрядов и результат записываем в сумму в тот же разряд.

В случае г) мы учли, что $A_{12} + 1 = B_{12}$ (то есть $10 + 1 = 11$) и $9_{12} + 1 = A_{12}$ (то есть $9 + 1 = 10$).

СТОП! Решите самостоятельно:

A8. Выполните сложение: а) $11010_2 + 101_2$; б) $2022_4 + 1311_4$; в) $1111_8 + 1234_8$.

B10. Выполните сложение: а) $1012_{12} + 999_{12}$; б) $910AB_{12} + 19A10_{12}$.

Сложение многозначных чисел с переходом через базис

Задача 11.7. Выполните сложение: а) $111_2 + 11_2$; б) $220_3 + 121_3$; в) $765_8 + 222_8$; г) $AA_{12} + BB_{12}$.

Решение. а) Выполним сложение в двоичной системе счисления. Сложение будем проводить «в столбик», для удобства выделим одну строку для запоминания цифр.

1. Складываем сначала единицы (мышки): $1_2 + 1_2 = 10_2$. Получаем 0 «мышек» и одну «кошку». Записываем 0 в сумму в разряд «мышек» и 1 в строку для запоминания в разряд «кошек».

2. Складываем «кошек», включая ту, что мы запомнили, получаем: $1_2 + 1_2 + 1_2 = 10_2 + 1_2 = 11_2$ (1 кошка и 1 собака). Записываем 1 в сумму в разряд «кошек» и 1 в строку для запоминания в разряд «собак»:

$$\begin{array}{r}
 111_2 \\
 + \\
 11_2 \\
 \hline
 111 \quad (\text{строка для запоминания}) \\
 \hline
 1010_2
 \end{array}$$

3. Складываем цифры в разряде «собак»: $1_2 + 1_2 = 10_2$ (0 «собак» и 1 «лиса»). Пишем 0 в сумму в разряд «собак» и 1 в строку для запоминания в разряд «лис».

4. В разряде «лис» – одна единица (в строке для запоминания), записываем её в сумму. Получаем: 1010_2 .

б) Выполним сложение в троичной системе счисления. Сложение будем проводить в столбик, для удобства выделим одну строку для запоминания цифр:

$$\begin{array}{r} 220_3 \\ + 221_3 \\ \hline 11 \quad \text{(строка для запоминания)} \\ \hline 1211_3 \end{array}$$

1. Складываем «мышек»: $0_3 + 1_3 = 1_3$, пишем 1 в сумму в разряд «мышек».

2. Складываем «кошек»: $2_3 + 2_3 = 11_3$ (1 кошка и 1 собака), пишем 1 в сумму в разряд «кошек» и 1 в строку для запоминания в разряд «собак».

3. Складываем «собак»: $2_3 + 2_3 + 1_3 = 12_3$ (2 собаки и 1 лиса), пишем 2 в сумму в разряд собак и 1 в строку для запоминания в разряд «лис».

4. В разряде «лис» – одна единица (в строке для запоминания), записываем её в сумму.

Получаем: 1211_3 .

в) Выполним сложение в восьмеричной системе счисления. Сложение будем проводить «в столбик», для удобства выделим одну строку для запоминания цифр:

$$\begin{array}{r} 765_8 \\ + 222_8 \\ \hline 11 \quad \text{(строка для запоминания)} \\ \hline 1207_8 \end{array}$$

1. Складываем «мышек»: $5_8 + 2_8 = 7_8$, пишем 7 в сумму в разряд «мышек».

2. Складываем «кошек»: $6_8 + 2_8 = 10_8$ (1 «собака» и 0 «кошек»), пишем 0 в сумму в разряд «кошек» и 1 в строку для запоминания в разряд «собак».

3. Складываем «собак»: $7_8 + 2_8 + 1_8 = 12_8$ (2 «собаки» и 1 «лиса»), пишем 2 в сумму в разряд «собак» и 1 в строку для запоминания в разряд «лис».

4. В разряде «лис» – одна единица (в строке для запоминания), записываем её в сумму.

Получаем: 1207_8 .

г) Самый сложный случай – это сложение в 12-ричной системе счисления. Для начала вычислим, сколько будет $A_{12} + B_{12}$. Вспомним, что $A_{12} = 10$ и $B_{12} = 11$.

В «обычной» системе счисления $10 + 11 = 21 = 12 + 9$.

В 12-ричной системе счислений $12 + 9 = 1$ «кошка» + 9 «мышек», то есть

$$\begin{array}{r} + AA_{12} \\ BB_{12} \\ \hline 11 \quad (\text{строка для запоминания}) \\ \hline 1A9_{12} \end{array}$$

Итак, $A_{12} + B_{12} = 19_{12}$. Теперь приступим к нашему примеру: $AA_{12} + BB_{12}$.

1. Складываем «мышек»: $A_{12} + B_{12} = 19_{12}$, 9 пишем в сумму в разряд «мышек», а 1 – в строку для запоминания в разряд «кошек».

2. Складываем «кошек»: $A_{12} + B_{12} + 1_{12} = 10 + 11 + 1 = 22 = 12 + 10 = 1A_{12}$. Пишем A в сумму в разряд «кошек», а 1 в строку для запоминания в разряд «собак».

3. В разряде «собак» только одна единица в строке для запоминания. Записываем её в сумму.

Получаем: $1A9_{12}$.

Ответ: а) 1010_2 ; б) 1211_3 ; в) 1207_8 ; г) $1A9_{12}$.

СТОП! Решите самостоятельно:

A9. Выполните сложение: а) $101_2 + 1101_2$; б) $212_3 + 120_3$; в) $777_8 + 101_8$.

B11. Выполните сложение: а) $1111_3 + 2222_3$; б) $7765_8 + 6577_8$.

B12. Выполните сложение: а) $77_{12} + 88_{12}$; б) $AA_{12} + 99_{12}$.

Умножение в различных системах счисления

Умножение на ноль. Мы с вами уже выяснили, что при умножении любого натурального числа на ноль получается ноль. И этот результат не зависит от системы счисления.

Читатель: А почему не зависит?

Автор: Если Вы N раз подойдете к столу и каждый раз не будете брать ни одной конфеты, то у Вас будет 0 конфет, в какой бы системе счисления Вы не записывали число N . Поэтому $0 \cdot N = N \cdot 0 = 0$.

Умножение на 1. Для всякого натурального числа N , записанного в любой системе счисления, справедливо: $1 \cdot N = N \cdot 1 = N$. В самом деле, если Вы N раз возьмете по одной конфете, у Вас будет N конфет.

Таблицы умножения

Десятичная система счисления. В начальной школе вы уже выучили таблицу умножения (табл. 11.16). Тогда вы еще не знали, что она составлена для десятичной системы счисления, и что это десятичная система отнюдь не единственная.

Таблица 11.16

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Напомним, как пользоваться этой таблицей.

Допустим, надо умножить 7 на 8. Находим 7-ю строку сверху и 8-й столбец слева. На пересечении 7-й строки и 8-го столбца стоит число 56. Это значит, что $7 \times 8 = 56$.

Заметим, что с таким же успехом мы могли найти пересечение 8-й строки и 7-го столбца: на их пересечении тоже стоит число 56, потому что $8 \times 7 = 56$. (От перестановки мест сомножителей произведение не меняется.)

Двоичная система счисления. Вспомните, как долго вы учили Таблицу умножения в десятичной системе счисления.

Таблица 11.17 Таблицу умножения в двоичной системе счисления выучить будет очень легко, потому что она состоит из одного единственного числа (табл. 11.17)!

×	1
1	1

В самом деле: $1 \times 1 = 1$ – вот и вся таблица умножения.

Троичная система счисления. Чтобы составить таблицу умножения, нам придется выполнить целых четыре операции умножения:

1) $1 \times 1 = 1$; 2) $1 \times 2 = 2$;

3) $2 \times 1 = 2$; 4) $2 \times 2 = 11_3$.

Таблица 11.18

Поясним 4-е умножение:

$$2 \times 2 = 4 = 3 + 1 =$$

$$= 1 \text{ «кошка»} + 1 \text{ «мышка»} = 11_3.$$

×	1	2
1	1	2
2	2	11_3

Результаты представим в таблице 11.18.

Восьмеричная система счисления. Будем последовательно заполнять таблицу 11.19.

Таблица 11.19

×	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Начнем с первой строки. Ее заполнить очень легко, потому что для любого числа n справедливо: $1 \times n = n$, то есть $1 \times 1 = 1$, $1 \times 2 = 2$; ... и т.д.

Заметим, что первый столбец ничем не отличается от первой строки, потому что для любого числа n справедливо: $1 \times n = n$, то есть $1 \times 1 = 1$, $2 \times 1 = 2$; ... и т.д. (табл.11.20).

1. Заполним 2-ю строку. Будем умножать последовательно 2 на 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ясно, что каждое последующее число во 2-й строке будет на 2 больше предыдущего. В самом деле:

$$2 \times 2 = 2 + 2,$$

$$2 \times 3 = (2 + 2) + 2,$$

$$2 \times 4 = (2 + 2 + 2) + 2 \text{ и т.д.}$$

Таблица 11.20

$\times$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Получим следующие числа:

$$2 \times 2 = 4,$$

$$2 \times 3 = 4 + 2 = 6,$$

$2 \times 4 = 6 + 2 = 8 = 10_8$ (в восьмеричной системе счисления 8 мышек – это одна «кошка»),

$$2 \times 5 = 10_8 + 2 = 12_8,$$

$$2 \times 6 = 12_8 + 2 = 14_8,$$

$$2 \times 7 = 14_8 + 2 = 16_8.$$

Сразу же можем заполнить 2-й столбец: там должны стоять точно такие же числа, что и во 2-й строке, так как от перестановки мест сомножителей произведение не меняется. После этого наша таблица именит вид (табл. 11.21).

Таблица 11.21

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10_8	12_8	14_8	16_8
3	3	6					
4	4	10_8					
5	5	12_8					
6	6	14_8					
7	7	16_8					

2. В третьей строке каждое последующее число больше предыдущего. Начнём заполнять третью строку:

$$3 \times 3 = 3 \times 2 + 3 = 6 + 3 = (6 + 2) + 1 = 10_8 + 1 = 11_8,$$

$$3 \times 4 = 11_8 + 3 = 14_8,$$

$$3 \times 5 = 14_8 + 3 = 17_8,$$

$$3 \times 6 = 17_8 + 3 = (17_8 + 1) + 2 = 20_8 + 2 = 22_8,$$

$$3 \times 7 = 22_8 + 2 = 25_8.$$

После заполнения 3-й строки можно заполнить 3-й столбец, который ничем не отличается от 3-й строки. А наша таблица примет вид таблицы 11.22.

Таблица 11.22

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10_8	12_8	14_8	16_8
3	3	6	11_8	14_8	17_8	22_8	25_8
4	4	10_8	14_8				

5	5	12_8	17_8				
6	6	14_8	22_8				
7	7	16_8	25_8				

Читатель: По-моему, в любой строке каждый последующий член больше предыдущего на порядковый номер строки.

Автор: Совершенно верно! В 4-й строке каждый последующий член больше предыдущего на 4, в 5-й строке – на 5, в 6-й – на 6, а в 7-й – на 7.

А еще после заполнения любой строки можно тут же заполнять столбца с тем же номером! С учетом сказанного продолжим наши вычисления.

3. В 4-й строке:

$$4 \times 4 = 14_8 + 4 = 10_8 + 10_8 = 20_8,$$

$$4 \times 5 = 20_8 + 4 = 24_8,$$

$$4 \times 6 = 24_8 + 4 = 20_8 + (4 + 4) = 20_8 + 10_8 = 30_8,$$

$$4 \times 7 = 30_8 + 4 = 34_8.$$

4. В 5-й строке:

$$5 \times 5 = 24_8 + 5 = 20_8 + (4 + 4) + 1 = 20_8 + 10_8 + 1 = 31_8,$$

$$5 \times 6 = 31_8 + 5 = 36_8,$$

$$5 \times 7 = 36_8 + 5 = 30_8 + (6 + 2) + 3 = 30_8 + 10_8 + 1 = 43_8,$$

5. В 6-й строке:

$$6 \times 6 = 36_8 + 6 = 30_8 + (6 + 2) + 4 = 30_8 + 10_8 + 4 = 44_8,$$

$$6 \times 7 = 44_8 + 6 = 40_8 + (4 + 4) + 2 = 40_8 + 10_8 + 2 = 52_8.$$

6. В 7-й строке:

$$7 \times 7 = 52_8 + 7 = 50_8 + (2 + 6) + 1 = 50_8 + 10_8 + 1 = 61_8.$$

Теперь приведем нашу таблицу в окончательный вид (табл. 11.23).

Таблица 11.23

$\times$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10_8	12_8	14_8	16_8
3	3	6	11_8	14_8	17_8	22_8	25_8
4	4	10_8	14_8	20_8	24_8	30_8	34_8
5	5	12_8	17_8	24_8	31_8	36_8	43_8
6	6	14_8	22_8	30_8	36_8	44_8	52_8
7	7	16_8	25_8	34_8	43_8	52_8	61_8

СТОП! Решите самостоятельно:

Б12. Заполните таблицу умножения в 4-ричной системе счисления.

Б13. Заполните таблицу умножения в 5-ричной системе счисления.

Г3. Заполните таблицу умножения в 6-ричной системе счисления.

Умножение многозначных чисел на однозначные без перехода через базис

Двоичная система счисления. В этой системе счисления умножить любое число на однозначное очень легко, ведь однозначных чисел всего два: ноль и единица. Умножив любое число n на ноль, получим ноль, а умножив любое число n на 1, получим n . Например: $1101_2 \times 0 = 0$, $1101_2 \times 1 = 1101_2$.

Троичная система счисления. В троичной системе счисления однозначных чисел три: 0, 1 и 2. С умножением на 0 и 1 все предельно просто, рассмотрим умножение на 2.

Задача 11.8. Выполните умножение: $101101_3 \times 2$.

Решение. Будем выполнять умножение «в столбик». Умножим на 2 число, стоящее в каждом разряде точно так же, как мы это делали в десятичной системе счисления. Резуль-

тат каждого такого умножения будем записывать в произведение в тот же разряд, получим:

$$\begin{array}{r} \times 101101_3 \\ 2 \\ \hline 202202_3 \end{array}$$

Ответ: 202 202₃.

Восьмеричная система счисления. Рассмотрим задачу.

Задача 11.9. Выполнить умножение: а) $1033_8 \times 2_8$; б) $12221_8 \times 3_8$.

Решение. Выполним умножение «в столбик» точно так же как мы это делали в «обычной» десятичной системе счисления, получим:

$$\begin{array}{rcl} \times 1033_8 & & \times 12221_8 \\ \text{а) } \frac{2}{2066_8} & \text{б) } \frac{3}{36663_8} \end{array}$$

Ответ: а) 2066₈; б) 36663₈.

СТОП! Решите самостоятельно:

A10. Выполните умножение: а) $11101_2 \times 0$; б) $111011_2 \times 1$; в) $111_3 \times 1$; г) $777_8 \times 0$.

B13. Выполните умножение: а) $1101_3 \times 2$; б) $12301_8 \times 2$; в) $22022_8 \times 3$.

Умножение на однозначное число с переходом через базис

Двоичная система счисления. Тут такое невозможно, потому что однозначных чисел – всего два: 0 и 1 и «перейти через базис», то есть получить при умножении одной цифры на другую число, большее 1, невозможно!

Троичная система счисления. В троичной системе счисления переход через базис возможен, так как $2 \times 2 = 4 = 11_3$.

Задача 11.10. Выполните умножение: $2122_3 \times 2$.

Решение. Умножение будем выполнять лесенкой, как мы это делали в «обычной» системе счисления. Нам нужно только помнить два результата из таблицы умножения для троичной системы: $1 \times 2 = 2$ и $2 \times 2 = 11_3$.

1. Сначала умножим на 2 разряд «мышек», получим $2 \times 2 = 11_3$, т.е. 1 «мышка» и 1 «кошка».

2. Умножим на 2 разряд «кошек», получим $2 \times 2 = 11_3$, т.е. 1 «кошка» и 1 «собака».

3. Умножим на 2 разряд «собак», получим $1 \times 2 = 2$, т.е. 2 «собаки».

4. Умножим на 2 разряд «лис», получим $2 \times 2 = 11_3$, т.е. 1 «лиса» и 1 «волк».

Теперь складываем все «ступеньки» нашей лесенки.

1. В разряде «мышек»: $1 + 0 + 0 + 0 = 1$.

2. В разряде «кошек»: $1 + 1 = 2$.

3. В разряде «собак»: $1 + 2 = 10_3$, т.е. 0 «собак» и 1 «лиса». 0 пишем в результат в разряд «собак», а 1 – в строку для запоминания в разряд «лис».

4. В разряде «лис»: *ВЛСКМ*

$1 + 1 = 2$.

5. В разряде «волков»: 1.

Остается только записать

ответ.

Ответ: 12021_3 .

$$\begin{array}{r}
 \times 2122_3 \\
 \hline
 2 \\
 11 \\
 110 \\
 200 \\
 11000 \\
 \hline
 1 \quad \text{(строка для запоминания)} \\
 12021_3
 \end{array}$$

СТОП! Решите самостоятельно:

Б14. Выполните умножение: а) $21_3 \times 2$; б) $212_3 \times 2$; в) $2022_3 \times 2$; г) $2222_3 \times 2$.

Восьмеричная система счисления. Рассмотрим задачу.

Задача 11.11. Выполните умножение: а) $15_8 \times 2$; б) $225_8 \times 3$;
в) $1234_8 \times 4$.

Решение. Здесь нам понадобится таблица умножения для 8-й системы счисления (см. табл. 11.23), так как умножать в уме однозначные числа в восьмеричной системе счисления не так уж просто.

а) Находим в табл. 11.23 следующие результаты:

$$5 \times 2 = 12_8; \quad 1 \times 2 = 2.$$

Теперь выполняем умножение «лесенкой»:

$$\begin{array}{r} \times 15_8 \\ 2 \\ \hline 12 \\ 20 \\ \hline 32_8 \end{array}$$

б) Находим в табл. 11.23:

$$5 \times 3 = 17_8; \quad 2 \times 3 = 6_8.$$

Теперь выполняем умножение «лесенкой»:

$$\begin{array}{r} \times 225_8 \\ 3 \\ \hline 17 \\ 60 \\ 600 \\ \hline 677_8 \end{array}$$

в) Находим в табл. 11.23: $1 \times 4 = 4$; $2 \times 4 = 10_8$; $3 \times 4 = 14_8$; $4 \times 4 = 20_8$. Выполним умножение «лесенкой»:

$$\begin{array}{r} \times 1234_8 \\ 4 \\ \hline 20 \\ 140 \\ 1000 \\ 4000 \\ \hline 5160_8 \end{array}$$

Ответ: а) 32_8 ; б) 677_8 ; в) 5160_8 .

СТОП! Решите самостоятельно:

Б15. Выполните умножение: а) $26_8 \times 3$; б) $226_8 \times 4$.

В14. Выполните умножение: а) $677_8 \times 3$; б) $4321_8 \times 5$.

Умножение на 10, 100 и 1000 в различных системах счисления

Двоичная система. Рассмотрим следующие примеры:
а) $1101_2 \times 10_2$; б) $77561_8 \times 10_8$; в) $2212_3 \times 10_8$; г) $7956_{12} \times 10_{12}$.

Выполним аккуратно все умножения в столбик, получим:

а) $\begin{array}{r} \times 1101_2 \\ 10_2 \\ \hline 0000 \\ 1101 \\ \hline 11010_2 \end{array}$	б) $\begin{array}{r} \times 7561_8 \\ 10_8 \\ \hline 0000 \\ 7561 \\ \hline 75610_8 \end{array}$	в) $\begin{array}{r} \times 2212_3 \\ 100_3 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 2212 \\ \hline 221200_3 \end{array}$	г) $\begin{array}{r} \times 7956_{12} \\ 1000_{12} \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 7956 \\ \hline 7956000_{12} \end{array}$
--	--	--	---

Видим, что при умножении на 10 в любой системе счисления к нашему исходному числу «прибавляется» один ноль слева, при умножении на 100 – 2 нуля слева, а при умножении на 1000 – три нуля.

Причем от системы счисления данный результат никак не зависит, потому что, как мы с вами уже выяснили, в любой системе счисления при умножении любого числа на 0 получается 0, а при умножении любого числа N на 1 получается число N .

Таким образом, правило умножения на 10, 100 и 1000, которое мы с вами установили в десятичной системе счисления, оказывается справедливым и в любой другой системе счисления.

Итак, чтобы умножить число, записанное в любой системе счисления на число 10 (записанное в той же системе счисления!), необходимо приписать слева один ноль, при умножении на 100 – два нуля, при умножении на 1000 – три нуля.

СТОП! Решите самостоятельно:

A11. Выполните умножение: а) $11_2 \times 100_2$; б) $12_3 \times 1000_3$; в) $77_8 \times 10_8$.

Умножение на двузначные и трехзначные числа

Двоичная система счисления. Решим задачу.

Задача 11.12. Выполните умножение: а) $11101_2 \times 11_2$; б) $11101_2 \times 110_2$; в) $11101_2 \times 101_2$.

Решение.

а) Умножать будем в столбик точно так же, как мы это делали в десятичной системе счисления.

При сложении «мышек», «кошек» и «собак» запоминать ничего не придется, а вот при сложении «лис» получаем $1+1=10_2$. 0 пишем в результат в разряд «лис», а 1 – в строку для запоминания в разряд «волков».

При сложении «волков» имеем: $1+1+1=11_2$. 1 пишем в результат в разряд «волков» и 1 в строку для запоминания в разряд «медведей».

При сложении «медведей» имеем: $1+1=10_2$. 0 пишем в результат в «разряд медведей», а 1 – в строку для запоминания в «разряд тигров».

В разряде тигров у нас только одна единица в строке для запоминания.

$$\begin{array}{r} \text{ТМВЛСКМ} \\ \times \quad 11101_2 \\ \hline \quad \quad 11_2 \\ \hline \quad 11101 \\ 11101 \\ \hline 111 \quad \text{строка для запоминания} \\ \hline 1010111_2 \end{array}$$

б) Запишем наше умножение так:

$$11101_2 \times 110_2 = 11101_2 \times (11_2 \times 10_2) = \\ = (11101_2 \times 11_2) \times 10_2.$$

Умножение в скобках мы уже выполнили в пункте а): $11101_2 \times 11_2 = 1010111_2$. Поэтому нам достаточно лишь приписать к результату, полученному в пункте а), один нолик слева: 10101110_2 .

в) Попробуйте разобраться с этим примером без комментариев:

$$\begin{array}{r} \times 11101_2 \\ 101_2 \\ \hline 11101 \\ 11101 \\ \hline 1111 \end{array} \text{ строка для запоминания}$$

$$10010001_2$$

Ответ: а) 1010111_2 ; б) 10101110_2 ; в) 10010001_2 .

СТОП! Решите самостоятельно:

Б16. Выполните умножение: а) $1011_2 \times 11_2$; б) $1011_2 \times 1100_2$; в) $1011_2 \times 1001_2$.

Троичная система счисления. Решим задачу.

Задача 11.13. Выполните умножение: а) $21_3 \times 12_3$; б) $21_3 \times 120_3$; в) $22_3 \times 22_3$.

Решение. Прежде всего, нам надо вспомнить три результата из таблицы умножения для троичных чисел (см. табл. 11.18): 1) $1 \times 1 = 1$; 2) $2 \times 1 = 1 \times 2 = 2$; 3) $2 \times 2 = 11_3$.

а) Будем умножать «в столбик»:

$$\begin{array}{r} \times 21_3 \\ 12_3 \\ \hline 112 \\ 21 \\ \hline 1 \end{array} \text{ строка для запоминания}$$

$$1022_3$$

б) Воспользуемся результатом пункта а) и правилом умножения на 10:

$$21_3 \times 120_3 = 21_3 \times (12 \times 10_3) = (21_3 \times 12) \times 10_3 = 1022_3 \times 10_3 = 10220_3.$$

в) Выполним умножение: $22_3 \times 22_3$. Умножение будем выполнять «лесенкой», нам только нужно помнить что «дважды два» в 3-й системе равной 11_3 :

$$\begin{array}{r}
 \times 22_3 \\
 22_3 \\
 \hline
 11 \\
 11 \\
 11 \\
 11 \\
 \hline
 11 \text{ строка для запоминания} \\
 \hline
 2101_3
 \end{array}$$

Ответ: а) 1022_3 ; б) 10220_3 ; в) 2101_3 .

СТОП! Решите самостоятельно:

В15. Выполните умножение: а) $22_3 \times 21_3$; б) $22_3 \times 210_3$; в) $222_3 \times 220_3$.

Восьмеричная система счисления. Решим задачу.

Задача 11.14. Выполните умножение: а) $23_8 \times 34_8$; б) $23_8 \times 340_8$; в) $23_8 \times 304_8$.

Решение. Для решения данной задачи нам потребуются следующие результаты из таблицы умножения для восьмеричной системы счисления (см. табл. 11.23):

- 1) $3 \times 4 = 14_8$;
- 2) $3 \times 3 = 11_8$;
- 3) $2 \times 4 = 10_8$;
- 4) $2 \times 3 = 6$.

а) Выполним умножение «лесенкой» полностью аналогично тому, как мы делали это в десятичной системе счисления:

$$\begin{array}{r}
 \times 23_8 \\
 34_8 \\
 \hline
 14 \\
 100 \\
 110 \\
 600 \\
 \hline
 1 \quad \text{строка для запоинания} \\
 1024_8
 \end{array}$$

б) Воспользуемся результатом пункта а) и правилом умножения на 10:

$$23_8 \times 340_8 = (23_8 \times 34) \times 10_8 = 1024_8 \times 10_8 = 10240_8.$$

в) Выполним это умножение «лесенкой» и ... без комментариев. Смотрите сами:

$$\begin{array}{r}
 \times 23_8 \\
 304_8 \\
 \hline
 14 \\
 100 \\
 1100 \\
 6000 \\
 \hline
 7214_8
 \end{array}$$

Ответ: а) 1024_8 ; б) 10240_8 ; в) 7214_8 .

СТОП! Решите самостоятельно:

В16. Выполните умножение: а) $32_8 \times 43_8$; б) $32_8 \times 430_8$; в) $32_8 \times 403_8$.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Задача 11.15. Переведите в десятичную систему счисления числа: а) 1101_2 ; б) 212_3 ; в) 712_8 ; г) 132_{12} ;



Решение. Вспомним про «кошек–мышек». В каждом случае нам нужно будет вычислить в «обычном виде» количество «мышек», зашифрованных тем или иным способом.

а) Число 1101_2 записано в двоичной системе счисления, значит $1101_2 = 1$ лиса + 1 собака + 0 кошек + 1 мышка. Вспомним, что:

1 кошка = 2 мышки;

1 собака = 2 кошки = $2 \cdot 2$ мышки = 4 мышки;

1 лиса = 2 собаки = $2 \cdot 2$ кошки = $2 \cdot 2 \cdot 2$ мышек = 8 мышек.

Следовательно, всего у нас мышек: $1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 = 13$, или $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 13$.

Заметим, что число 1101 в десятичной системе счисления можно выразить так: $1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1 = 1101$. Как видите, разница только в том, что вместо двойки в двоичной системе счисления в десятичной системе стоит 10.

б) Число 212_3 задано в троичной системе счисления:

$212_3 = 2$ собаки + 1 кошка + 2 мышки.

Вспомним, что:

1 кошка = 3 мышки;

1 собака = 3 кошки = $3 \cdot 3$ мышек = 9 мышек;

Значит, всего у нас мышек: $2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 = 18 + 3 + 2 = 23$ или $2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 = 23$.

в) Число 712_8 задано в восьмеричной системе счисления. Значит, $712_8 = 7$ собак + 1 кошка + 2 мышки.

В 8-й системе счисления:

1 кошка = 8 мышек;

1 собака = 8 кошек = $8 \cdot 8$ мышки = 64 мышки.

Вычислим количество мышек:

$$7 \cdot 64 + 1 \cdot 8 + 2 = 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2 = 522.$$

г) Число 132_{12} задано в 12-й системе счисления, значит, $132_{12} = 1$ собака + 3 кошки + 2 мышки.

1 кошка = 12 мышек;

1 собака = 12 кошек = $12 \cdot 12$ мышек = 144 мышек.

Считаем мышек:

$$1 \cdot 144 + 3 \cdot 12 + 2 = 1 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 2 = 144 + 36 + 2 = 182.$$

д) Число задано в 60-й системе счисления. В разряде мышек стоит «вавилонская цифра» 21, в разряде кошек – 11, и в разряде собак – 2.

В вавилонской системе счисления:

1 кошка = 60 мышек;

1 собака = 60 кошек = $60 \cdot 60$ мышек = 3600 мышек.

Посчитаем мышек:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3600 + 11 \cdot 60 + 21 &= 2 \cdot 60^2 + 11 \cdot 60 + 21 = \\ &= 7200 + 660 + 21 = 7862. \end{aligned}$$

СТОП! Решите самостоятельно:

Б17. Переведите в десятичную систему счисления: а) 111_2 ; б) 1011_2 ; в) 111_3 ; г) 1011_3 .

Б17. Переведите в десятичную систему счисления: а) 111_5 ; б) 1011_5 ; в) 111_6 ; г) 1011_6 .

Г4. Переведите в десятичную систему счисления: а) 99_{12} ; б) $1A1_{12}$; в)



Перевод чисел из десятичной системы счисления в другие системы счисления

Задача 11.16. Запишите в часах, минутах и секундах время, равное 10 000 секундам.

Решение.

Автор: Вспомним, что 1 минута = 60 секунд и 1 час = 60 минут = $60 \cdot 60$ секунд = 3600 секунд. То есть от нас фактически требуется перевести «обычное» число в 60-ю, то есть Вавилонскую систему счисления. Как это сделать?

Читатель: По-моему, сначала надо выяснить, сколько минут содержится в 10 000 с. Для этого нужно 10 000 разделить на 60. Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r}
 \underline{10000} \quad \underline{60} \\
 \underline{60} \quad 166 \\
 \underline{400} \\
 \underline{360} \\
 \underline{400} \\
 \underline{360} \\
 40
 \end{array}$$

Получается 166 и 40 в остатке. Значит,
 $10\,000\text{ с} = 166\text{ мин } 40\text{ с}.$

Автор: Верно! А как определить количество часов?

Читатель: Нужно 166 минут разделить на 60:

$$\begin{array}{r}
 \underline{166} \quad \underline{60} \\
 \underline{120} \quad 2 \\
 46
 \end{array}$$

Получается 2 ч и 46 мин в остатке. Значит, всего у нас 2 ч 46 мин 40 с.

Автор: Совершенно верно!

СТОП! Решите самостоятельно:

Б18. Переведите в часы, минуты и секунды время: а) 301 с; б) 3601 с; в) 3661 с.

В18. Переведите в часы, минуты и секунды время: а) 7400 с; б) 10801 с; в) 5000 с.

Задача 11.17. Запишите число 31 в следующих системах счисления: а) двоичной; б) троичной; в) 8-й; г) 12-й.

Решение.

Автор: Рассмотрим пункт а). Вспомним про «кошек-мышек». Представим себе, что к нам на поляну одновременно прибежала 31 мышка. А потом по законам превращений в двоичной системе счисления все из них, кто мог-

ли, превратились в кошек. Спрашивается, сколько получилось кошек?

Читатель: Ясно, что кошек будет в 2 раза меньше, чем мышек. Разделим 31 на 2 и получим: $31 : 2 = 15$ (ост.1). Это значит, что 1 мышка так и осталась мышкой, а остальные 30 мышек превратились в 15 кошек.

Автор: Верно. Теперь эти 15 кошек превращаются в собак. Сколько из них получится собак?

Читатель: В 2 раза меньше, чем кошек. Разделим 15 на 2 и получим: $15 : 2 = 7$ (ост.1). То есть одна кошка так и останется кошкой, а 14 кошек превратятся в 7 собак.

Автор: Верно. Теперь собаки превращаются в лис. Сколько будет лис?

Читатель: В 2 раза меньше, чем собак: $7 : 2 = 3$ (ост.1). Получатся 3 лисы, и останется 1 собака.

Автор: А что будет дальше?

Читатель: Дальше подсчитаем, сколько волков получится из этих трех лис: $3 : 2 = 1$ (ост.1). Значит, получится один волк и еще останется 1 лиса.

Автор: Правильно! Значит, у нас получилась такая «компания зверей»: 1 волк, 1 лиса, 1 собака, 1 кошка, 1 мышка. То есть мы получили число: 11111_2 . Значит, $31 = 11111_2$. Попробуйте самостоятельно разобраться с пунктом б).

б) Нам требуется записать число 31 в троичной системе счисления. У нас 31 мышка. Сначала вычислим, сколько из них получится кошек. Разделим 31 на 3, получим: $31 : 3 = 10$ (ост.1). Значит, получится 10 кошек и останется одна мышка.

Теперь кошки превращаются в собак. Собак будет в 3 раза меньше, чем кошек: $10 : 3 = 3$ (ост.1). Значит, получатся 3 собаки, и останется 1 кошка.

Вычислим, сколько лис получится из этих собак: $3 : 3 = 1$ (ост.0), то есть получится 1 лиса, а собак вообще не останется.

Наша «компания»: 1 лиса, 0 собак; 1 кошка, 1 мышка. То есть мы получили число 1011_3 . Значит, $31 = 1011_3$.

Автор: Все верно.

в) В случае восьмеричной системы счисления у нас опять 31 мышка. Из них получится кошек: $31 : 8 = 3$ (ост.7). То есть у нас будут 3 кошки и 7 мышек, а наше число: $37_8 = 31$.

г) В 12-ричной системе счисления ситуация аналогичная. Делим 31 на 12: $31 : 12 = 2$ (ост.7). То есть у нас получилось 2 кошки и еще осталось 7 мышек, а наше число: $27_{12} = 31$.

Ответ: а) 11111_2 ; б) 1011_3 ; в) 37_8 ; г) 27_{12} .

СТОП! Решите самостоятельно:

Б19. Запишите число 41: а) в 5-ричной системе; б) в 6-ричной системе; в) в 8-ричной системе.

В19. Запишите число 100: а) в 2-ричной системе; б) в 3-ичной системе; в) в 12-ричной системе.

Угадай систему счисления

Автор: Вернемся к тому, с чего мы начали наш параграф.

Помните, Вы удивились тому, что равенство $8 + 7 = 16$ может быть верным. А теперь скажите: в какой системе счисления это равенство справедливо?

Читатель: По-моему в 9-ричной. В самом деле, $7 + 8 = 9 + 6$.

Но в 9-ричной системе счисления $9 = 10_9$, то есть 9 мышек это одна кошка. А $10_9 + 6 = 16_9$. Значит, равенство $8+7=16$ справедливо в 9-й системе счисления.

Автор: Вы совершенно правы.

СТОП! Решите самостоятельно:

Б20. В какой системе счисления справедливо равенство: а) $1 + 1 = 10$; б) $1+2 = 10$; в) $1+7 = 10$?

В20. В какой системе счисления справедливо равенство: а) $2 + 2 = 11$; б) $7+3=12$; в) $19+5=20$?



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задачи очень легкие

A12. Запишите в системе счисления кассира сумму 99 коп. Имеются монеты: 50, 10, 5, 1 коп.

A13. Запишите три следующих числа натурального ряда в троичной системе счисления: 120_3 ; 121_3 ; 122_3 ;...

A14. Запишите следующее число натурального ряда: 332_4 ; 333_4 ;....

A15. Расшифруйте вавилонские цифры:

а)



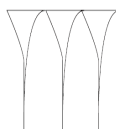
б)



в)



г)



д)



е)



ж)



з)



A16. Выполните сложение: а) $10_5 + 4$; б) $21_6 + 31_6$; в) $102_3 + 110_3$; г) $121_9 + 701_9$.

A17. Выполните сложение: а) $11_2 + 111_2$; б) $101_2 + 1011_2$; в) $111_2 + 1010_2$.

A18. Выполните умножение: а) $11111_2 \times 1$; б) $3444_5 \times 0$; в) $34567_{12} \times 1$.

A19. Выполните умножение: а) $110_5 \times 10_5$; б) $101_6 \times 100_6$; в) $770_8 \times 1000_8$; $AB_{12} \times 10_{12}$.

Задачи легкие

B21. У кассира есть купюры и монеты достоинством: 100 руб., 50 руб., 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп., 10 коп., 5 коп., 1 коп. Запишите в системе счисления кассира сумму: а) 3 руб. 59 коп., б) 303 руб. 9 коп.

Б22. Вставьте пропущенные числа натурального ряда: 202_3 ; ...; 211_3 ; ...; 220_3 ; ...; 222_3 ; ...

Б23. Вставьте пропущенные числа натурального ряда: 30_4 ; 31_4 ; ...; ...; ...; 101_4 .

Б24. Запишите в 12-й системе счисления числа: 144; 143; 146.

Б25. Запишите вавилонские цифры: а) 13; б) 32; в) 52.

Б26. Сложите в двенадцатеричной системе: а) $3 + 8$; б) $13_{12} + 7$; в) $25_{12} + 6$; г) $91_{12} + 1A_{12}$; д) $149_{12} + 162_{12}$

Б27. Выполните сложение: а) $121_3 + 212_3$; б) $222_3 + 222_3$; в) $202 + 111_3$.

Б28. Выполните умножение: а) $110111_3 \times 2$; б) $12021_7 \times 3$; в) $12021_{12} \times 5$.

Б29. Выполните умножение: а) $12_3 \times 2$; б) $122_3 \times 2$.

Б30. Выполните умножение: а) $55_8 \times 3$; б) $33_8 \times 6$;

Б31. Выполните умножение: а) $1101_2 \times 11_2$; б) $1101_2 \times 11000_2$; в) $1101_2 \times 1001_2$.

Б32. Переведите в 10-ю систему счисления: а) 101_2 ; б) 11011_2 ; в) 202_3 ; г) 2022_3 .

Б33. Переведите в часы, минуты и секунды время: а) 601 с; б) 3621 с; в) 7261 с.

Задачи средней трудности

Б21. У кассира есть монеты: 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб., 50 коп., 10 коп. Расшифруйте сумму, записанную в системе счисления кассира: а) 102, б) 11 101; в) 610 002.

Б22. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Запишите в системе счисления продавца вес 9 кг 481 г.

Б23. У продавца есть гири: 5 кг, 2 кг, 1 кг, 500 г, 200 г, 100 г, 50 г, 20 г, 10 г, 5 г, 1 г. Расшифруйте вес, записанный в системе счисления продавца: а) 113; б) 2 000 011; в) 21 111 112 000; г) 20 101 010 104.

Б24. Вставьте пропущенные числа в ряд натуральных чисел: ...; 1010_2 ; ...; 1100_2 ; ...; 1110_2 ; ...; 10000_2 ; ...; 10010_2 .

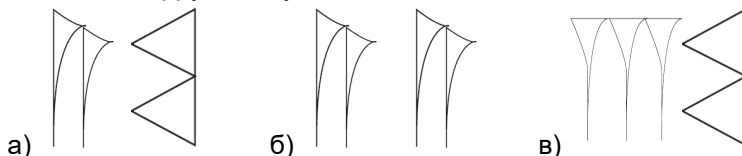
Б25. Мы знаем, что $100_3 = 9$; $1000_3 = 27$; $10000_3 = 81$. Запишите в троичной системе счисления «обычные» числа: 10; 29; 80.

Б26. Известно, что $256 = 10000_4$; $1024 = 100000_4$. Запишите в четверичной системе счисления числа: 255; 257; 1022; 1026.

B27. Запишите в «обычной» системе счисления круглые числа:
а) 10_7 ; 100_7 ; 1000_7 ; б) 10_9 ; 100_9 ; 1000_9 .

B28. Вставьте пропущенные цифры в ряд натуральных чисел:
а) $9BA_{12}$; ...; $A00_{12}$; ...; $A02_{12}$; б) $ABBA_{12}$; ...; $B000_{12}$; ...; $B002_{12}$.

B29. Расшифруйте двузначные вавилонские числа:



B30. Заполните таблицу сложения для 9-ричной системы счисления:

+	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

B31. Выполните сложение: а) $123_4 + 101_4$; б) $133_4 + 111_4$;
в) $333_4 + 333_4$.

B32. Выполните сложение: а) $1234_5 + 1001_5$; б) $144_5 + 111_5$;
в) $444_5 + 222_5$.

B33. Выполните сложение: а) $145_6 + 101_6$; б) $155_6 + 111_6$;
в) $555_6 + 222_6$.

B34. Заполните таблицу умножения для 7-ричной системы счисления.

B35. Выполните умножение: а) $2112_3 \times 2$; б) $22122_3 \times 2$.

B36. Выполните умножение: а) $756_8 \times 7$; б) $777_8 \times 3$.

B37. Выполните умножение: а) $222_3 \times 12_3$; б) $222_3 \times 120_3$;
в) $121_3 \times 20_3$.

B38. Выполните умножение: а) $53_8 \times 43_8$; б) $53_8 \times 430_8$; в) $53_8 \times 403_8$.

B39. Переведите в 10-ю систему счисления: а) 301_5 ; б) 222_5 ;
в) 101_6 ; 1100_6

В40. Переведите в десятичную систему счисления: а) 212_3 ; б) 172_8 ; в) $1B2_{12}$.

В41. Переведите число в десятичную систему счисления: а) 1000001_2 ; б) 1011011011_2 ; в) 10102_3 ; г) 12211_3 ; д) 7627_8 ; е) $1AB9_{12}$.

В42. Переведите в часы, минуты и секунды время: а) 7321 с; б) 10861 с; в) 7000 с.

В43. Запишите число 81 в следующих системах счисления: а) двоичной; б) троичной; в) 4-ричной; г) в 7-ричной.

В44. Переведите в троичную систему счисления числа: а) 142; б) 377.

В45. Переведите в двенадцатеричную систему счисления числа: а) 109; б) 131.

В46. Определите систему счисления, в которой справедливы равенства: а) $8 + 2 = 11$; б) $3 + 2 = 11$; в) $10 + 10 = 100$; г) $20 + 20 = 100$; д) $3 + 1 = 10$; е) $4 + 5 = 13$; ж) $5 + 6 = 12$.

Задачи трудные

Г5. Запишите в системе счисления кассира 13481 рублей, современными российскими рублями, если имеются следующие купюры и монеты: 5000 руб., 1000 руб., 500 руб., 100 руб., 50 руб., 10 руб., 5 руб., 2 руб., 1 руб.

Г6. Запишите число в системе продавца вес 15 кг 305 г. Набор гирь в граммах: 10000, 5000, 2000, 1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1.

Г7. Запишите по-вавилонски: а) 180; б) 182; в) 1200; г) 1201.

Г8. Заполните таблицу сложения для 12-ричной системы счисления:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											

8												
9												
A												
B												

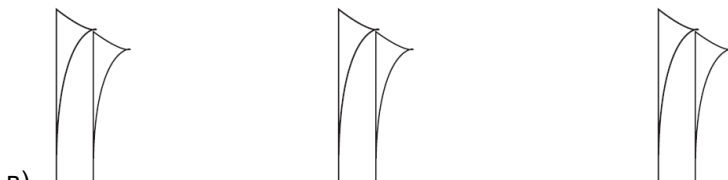
Г9. Выполните сложение: а) $11_{12} + 19_{12}$; б) $11A_{12} + A11_{12}$;
в) $987_{12} + 444_{12}$; г) $AAA_{12} + 112_{12}$; д) $AAA_{12} + BBB_{12}$.

Г10. Выполните сложение: а) $654_7 + 111_7$; б) $655_7 + 555_7$;
в) $333_7 + 444_7$.

Г11. Выполните сложение: а) $857_9 + 111_9$; б) $875_9 + 555_9$;
в) $333_9 + 777_9$.

Г12. Заполните таблицу умножения в 9-ричной системе счисления.

Г13. Переведите в 10-ю систему счисления: а) AA_{12} ; б) $AA9_{12}$;



в)

Г14. Переведите число 111100001111_2 в десятичную систему.

Г15. Переведите число 23727_8 в десятичную систему счисления.

Г16. Переведите число $5A9B_{12}$ в десятичную систему счисления.

Г17. Запишите число 1000 в следующих системах счисления: а) 8-й; б) 9-й; в) 12-й.

Задачи очень трудные

Д1. Заполните таблицу умножения в 12-й системе счисления.

Д2. Расшифруйте число, записанное в вавилонской системе счисления.



Д3. Я задумываю трехзначное число. Можно ли угадать его, задав лишь 10 вопросов, на которые я отвечу только «да» или «нет»? После 10-го вопроса вы должны назвать число.

1. Делится ли оно на 2 без остатка? Нет.
2. Делится ли неполное частное на 2 без остатка? Да.
3. Делится ли новое частное на 2 без остатка? Нет. И т.д.

Запишите справа налево вместо каждого «да» 0, а вместо каждого «нет» 1 и вы получите задуманное число в двоичной системе счисления. Перевести его в десятичную – дело техники.

Д4. Некий человек принес в банк 1023 доллара однодолларовыми купюрами и 10 пустых мешков и, обратившись к клерку, сказал:

- Не откажите в любезности разложить эти деньги по мешкам так, чтобы любую сумму денег, которая мне понадобится, вы всегда могли выдать в одном или нескольких мешках, не вскрывая при этом ни один из них.

Как разложить деньги? Выдать любую требуемую сумму банк должен лишь один раз, величина ее ограничена только размером вклада. Иначе говоря, вкладчик имеет право потребовать любую сумму от 1 до 1023 долларов. Число долларов должно быть целым.