Всероссийская школа математики и физики «Авангард»

Е. Н. ФИЛАТОВ

Ф И З И К А
11

Экспериментальный учебник

Часть 2

Механические колебания и волны. Электромагнитные явления

Москва 2010

Всероссийская школа математики и физики «Авангард»

Е. Н. ФИЛАТОВ

ФИЗИКА
11

Экспериментальный учебник для профильных физико-математических классов

Часть 2

Механические колебания и волны. Электромагнитные явления

Москва 2010

***Филатов Е.Н*. Физика–11. Часть 2. Механические колебания и волны. Электромагнитные явления.** Экспериментальный учебник для профильных физико-математических классов. – М.: ВШМФ «Авангард», 2010. – 436 с.

Учебник предназначен для учащихся 11-х профильных физико-математических классов. Главная цель учебника – научить учащихся самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения.

Все задачи условно разбиты на четыре категории сложности: легкие, средней трудности, трудные, очень трудные. Легкие задачи – это стандартные задачи из традиционных школьных учебников, а очень трудные соответствуют уровню вступительных экзаменов в наиболее престижные вузы Москвы: МФТИ, МГУ, МИФИ.

К большинству задач приведены ответы и подсказки.

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Гармонические колебания

Что такое механические колебания?

Под *механическими колебаниями* мы понимаем процесс, обладающий той или иной степенью *повторяемости*. Например, колеблется вода в стакане, колеблется груз, подвешенный на пружине, колеблется автомобиль на рессорах, колеблются качели, колеблется зажатая одним концом металлическая пластина, колеблется натянутая струна, колеблется стрелка компаса (рис. 1.1).

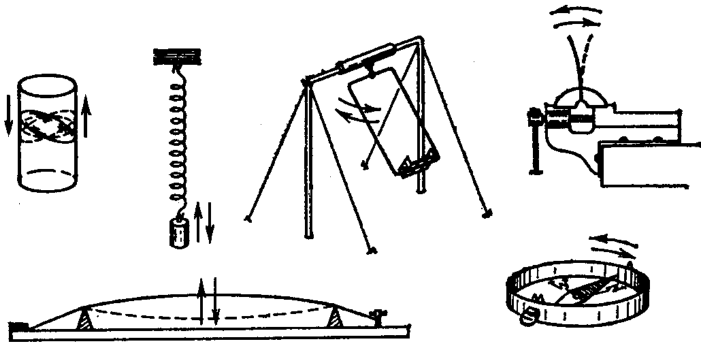


Рис. 1.1

Совершают колебания также молоток, висящий на гвозде, весы, груз на веревке, маятник часов (рис. 1.2).

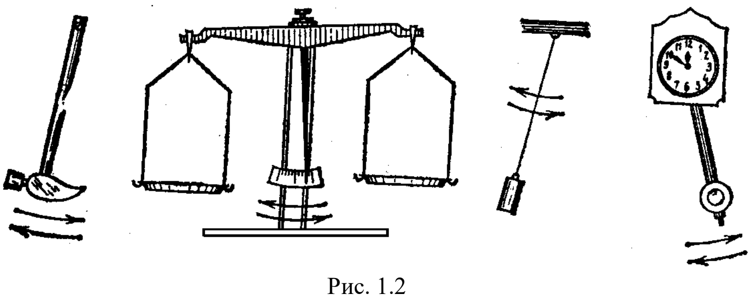


Рис. 1.2

Самые «простые» колебания

Начнем с самых простых колебаний – *гармонических*. Говорят, что точка совершает гармонические колебания вдоль оси x, если ее координата изменяется по закону:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad (1.1)$$

где t – время, а a, α, ω – постоянные величины, с физическим смыслом которых мы разберемся чуть позже.

График зависимости $x(t)$ представляет собой синусоиду (рис. 1.3).

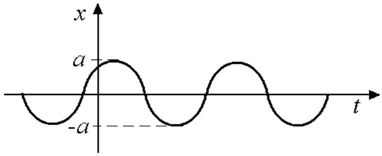


Рис. 1.3

Выясним, в каких случаях возникают именно гармонические (а не какие-либо другие) колебания.

Рассмотрим такую систему: вдоль оси x может двигаться без трения материальная точка массой m. При этом в нулевой точке на нее никакие силы не действуют, а в случае смещения в точку с координатой x на нее начинает действовать «возвращающая» сила, проекция которой на ось x равна

$$F_x = -kx, \qquad (1.2)$$

где k – постоянная величина (рис. 1.4).

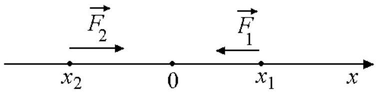


Рис. 1.4

Эту силу еще называют *квазиупругой.* Она обладает двумя свойствами: 1) всегда направлена к точке равновесия – нулевой точке на оси x; 2) линейно зависит от величины координаты x.

Так вот, если материальная точка оказывается под действием только квазиупругой силы, то она начинает совершать гармонические колебания по закону (1.1).

Читатель: То, что под действием квазиупругой силы материальная точка начнет колебаться, в общем понятно. Но вот почему эти колебания будут проходить именно по *гармоническому закону* – совершенно непонятно.

Автор: Давайте докажем это строго.

Прежде всего, вспомним, что если координата точки изменяется по закону $x = x(t)$, то проекция скорости на ось x равна производной функции $x(t)$ по времени: $\upsilon_x = x'(t)$. А проекция ускорения точки на ось x равна производной проекции скорости на ось x:

$$a_x = \upsilon'_x(t) = (x'(t))' = x''(t)\ .$$

То есть проекция ускорения – это вторая производная координаты по времени.

Пусть в некоторый момент времени t материальная точка имеет координату $x(t)$. Тогда на нее действует квазиупругая сила, проекция которой на ось x равна

$$F_x = -kx(t). \qquad (1)$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$F_x = ma_x = mx''(t). \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), получим:

$$-kx(t) = mx''(t)$$

или

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0\ . \tag{1.3}$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы доказать, что функция $x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$ удовлетворяет уравнению (1.3). Вычислим вторую производную этой функции. Сначала вычислим первую производную:

$$x'(t) = \upsilon_x(t) = [a\cos(\omega t + \alpha)]' = a(-\sin(\omega t + \alpha))(\omega t + \alpha)' =$$
$$= -a\sin(\omega t + \alpha)\omega = -a\omega\sin(\omega t + \alpha).$$

Запомним:

$$\upsilon_x(t) = -a\omega\sin(\omega t + \alpha). \tag{1.4}$$

Вычислим вторую производную:

$$x''(t) = a_x(t) = \upsilon'_x(t) = [-a\omega\sin(\omega t + \alpha)]' = -a\omega\cos(\omega t + \alpha)(\omega t + \alpha)' =$$
$$= -a\omega\cos(\omega t + \alpha)\omega = -a\omega^2\cos(\omega t + \alpha).$$

Запомним:

$$a_x(t) = -a\omega^2\cos(\omega t + \alpha)\ . \tag{1.5}$$

Теперь подставим значения $x(t)$ и $x''(t)$ в формулу (1.3), получим:

$$-a\omega^2\cos(\omega t + \alpha) + \frac{k}{m}a\cos(\omega t + \alpha) = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \ a\cos(\omega t + \alpha)\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) = 0\ .$$

Это равенство выполняется при любом значении t, если выражение, стоящее скобках, равно нулю:

$$\frac{k}{m} - \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \qquad (1.6)$$

Итак, мы доказали, что функция $x(t) = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$ удовлетворяет уравнению (1.3) при условии $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ и *любых* значениях констант a и α. Кстати, мы определили ω – одну из трех констант, входящих в функцию $x(t) = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (1.6a)$$

Читатель: А как определить остальные две: a и α?

Автор: Они определяются начальными условиями: значениями υ_x и x в момент начала движения $t = t_0$. Найдем их для частного случая, когда материальная точка в момент $t = 0$ находится в точке с координатой $x = x_0$ и имеет нулевую начальную скорость $\upsilon_x(0) = 0$. Тогда

$$x(0) = x_0 = a\cos(\omega \cdot 0 + \alpha) = a\cos\alpha.$$

Согласно формуле (1.4)

$$\upsilon_x(0) = 0 = -\,a\sin(\omega \cdot 0 + \alpha) = -a\sin\alpha;$$

$$\begin{cases} \tilde{o}_0 = a\cos\alpha, \\ 0 = -\grave{a}\sin\alpha, \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0,\ x_0 = a \cdot \cos 0 = a \cdot 1 \Rightarrow a = x_0.$$

(мы взяли только одно из возможных решений уравнения $\sin\alpha = 0$). Теперь наша функция $x(t)$ примет вид

$$x(t) = x_0\cos\omega t. \qquad (1.7)$$

Читатель: Но здесь возникает еще один вопрос: а где гарантия, что $x(t) = a_0\cos(\omega t + \alpha)$ – *единственное* решение уравнения (1.3)?

Автор: На этот вопрос можно ответить двояко. С чисто математической точки зрения, можно сослаться на то, что существует строгое доказательство *единственности* решения уравнений типа (1.3). (Кстати, такие уравнения называются линейными *дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.*) С чисто физической точки зрения, единственность решения очевидна: если мы поставим два тела в абсолютно одинаковые начальные условия, а потом будем действовать на них абсолютно одинаковыми силами, то эти тела должны совершать абсолютно одинаковые движения. Правда, оговорюсь, что это очевидно только в классической механике.

Дадим четкие определения введенным нами величинам.

Величина $x(t)$ называется *смещением*.

Величина a в формуле $x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$ называется *амплитудой* колебания и показывает величину максимального смещения; a – величина положительная.

Величина ω называется *циклической частотой* колебания и измеряется как угловая скорость в радианах в секунду: $[\omega]$ = рад/с.

Величина аргумента косинуса $(\omega t + \alpha)$ называется *фазой* колебания.

Величина α называется *начальной фазой*.

Периодом колебания T называется минимальное время, через которое точка совершит одно полное колебание. Так как период функции косинус равен 2π, то из этого следует, что в момент времени $(t + T)$ фаза должна быть больше фазы в момент времени t на 2π:

$$\omega(t + T) + \alpha = (\omega t + \alpha) + 2\pi \;\Rightarrow\; \omega T = 2\pi \;\Rightarrow$$

$$\grave{O} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{R}}\,. \qquad (1.8)$$

Частотой колебания ν называют величину, которая показывает число колебаний, совершенных за единицу времени. Так, если за время t совершено n колебаний, то

$$\nu = \frac{n}{t}\,,\ [\nu] = 1/\text{с} = \text{Гц (герц)}.$$

Если $n = 1$, то $t = T$, тогда

$$\nu = \frac{1}{\grave{O}} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \qquad (1.9)$$

Задача 1.1. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x(t) = 0{,}1\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$. Определите амплитуду a, циклическую частоту ω, частоту ν, период T, начальную фазу α, а также путь s, пройденный за один период[1].

$x(t) = 0{,}1\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

$a = ?$ $\omega = ?$ $\nu = ?$
$T = ?$ $\alpha = ?$ $s = ?$

Решение. Сравним заданное уравнение с уравнением гармонических колебаний:

$$x(t) = 0{,}1\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right), \quad x(t) = a\cos(\omega t + \alpha).$$

Очевидно, что $a = 0{,}1$ м, $\omega = \pi/3$ рад/с, $\alpha = \pi/4$.

Согласно формуле (1.9) $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{6}$ Гц.

Согласно формуле (1.8) $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{(1/6)\text{ Гц}} = 6$ с.

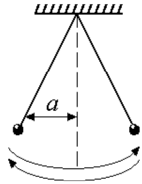


Рис. 1.5

Осталось найти путь, пройденный за период. Из рис. 1.5 видно, что $s = 4a = 4\cdot 0{,}1$ м $= 0{,}4$ м.

Ответ: $a = 0{,}1$ м; $\omega = \pi/3$ рад/с; $\nu = \frac{1}{6}$ Гц; $\alpha = \pi/4$; $T = 6$ с; $s = 0{,}4$ м.

СТОП! Решите самостоятельно: А1–А4, В1.

Задача 1.2. Материальная точка совершает колебания по закону $x(t) = 2\cos\frac{\pi t}{2}$. Определить смещение в моменты $t_1 = 1$ с и $t_2 = 1{,}5$ с, а также моменты времени, в которые $x_3 = \sqrt{3}$ м. Движение рассматривается в течение одного периода.

$x(t) = 2\cos\frac{\pi t}{2}, \quad x_3 = \sqrt{3}$ м
$t_1 = 1$ с, $t_2 = 1{,}5$ с

$x_1 = ?$ $x_2 = ?$ $t_3 = ?$

Решение.

$$x_1 = 2\cos\frac{\pi t_1}{2} = 2\cos\frac{\pi\cdot 1}{2} = 0;$$

[1] Все численные значения в этой и всех последующих задачах данного параграфа являются абсолютно точными и заданными в СИ.

$$x_2 = 2\cos\frac{\pi t_2}{2} = 2\cos\frac{\pi\cdot 1{,}5}{2} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\text{ м};$$

$$x_3 = 2\cos\frac{\pi t_3}{2} \Rightarrow \sqrt{3} = 2\cos\frac{\pi t_3}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi t_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi t_3}{2} = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k \Rightarrow \frac{\pi t_3}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow t_3 = \pm\frac{1}{3} + 4k\ .$$

Если $k = 0$, то $t_3 = \pm\frac{1}{3}$ с; если $k = 1$, то $t_3 = \frac{11}{3}$ с и $t_3 = \frac{13}{3}$ с. К первому периоду относятся значения $t_3 = \frac{1}{3}$ с и $t_3 = \frac{11}{3}$ с.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{2}$ м; $t_3 = \frac{1}{3}$ с и $t_3 = \frac{11}{3}$ с.

СТОП! Решите самостоятельно: А5, В2–В7, С1, С2.

Задача 1.3. Написать уравнение гармонического колебания, амплитуда которого 10 см, период 10 с, начальная фаза равна нулю. Найти смещение, проекции скорости и ускорения колеблющегося тела через 12 с после начала колебаний.

$a = 0{,}1$ м $T = 10$ с, $t_1 = 12$ с $\alpha = 0$
$x(t_1) = ?$ $\upsilon_x(t_1) = ?$ $a_x(t_1) = ?$

Решение. Согласно формуле (1.8)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10}\ \text{рад/с}.$$

Запишем уравнение колебаний

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 0\right) = 0{,}1\cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right).$$

Тогда

$$x(t_1) = 0{,}1\cos\left(\frac{2\pi}{10}\cdot 12\right) \approx 0{,}031\text{ м};$$

$$\upsilon_x(t) = x'(t) = \left(0{,}1\cos\frac{2\pi t}{10}\right)' = -0{,}1\cdot\frac{2\pi}{10}\sin\frac{2\pi t}{10};$$

$$\upsilon_x(t_1) = -0{,}1\cdot\frac{2\pi}{10}\sin\left(\frac{2\pi\cdot 12}{10}\right) \approx -0{,}060\text{ м/с};$$

$$a_x(t) = v_x'(t) = \left(-0{,}1\cdot\frac{2\pi}{10}\sin\frac{2\pi t}{10}\right)' = -0{,}1\cdot\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2\cos\frac{2\pi t}{10};$$

$$a_x(t_1) = -0{,}1\cdot\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi\cdot 12}{10}\right)\approx -0{,}012 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $x(t_1)\approx 0{,}031$ м; $v_x(t_1)\approx -0{,}060$ м/с; $a_x(t_1)\approx -0{,}012$ м/с^2.

СТОП! Решите самостоятельно: В8–В11.

Энергия материальной точки при гармонических колебаниях

Задача 1.4. Материальная точка массой m совершает колебания по закону $x(t) = a\cos\omega t$. Определите зависимости от времени кинетической, потенциальной и полной энергии.

$x(t) = a\cos\omega t$
$K(t) = ?$ $\Pi(t) = ?$ $E(t) = ?$

Решение. Начнем с кинетической энергии:

$$\hat{E}(t) = \frac{m(v_x)^2}{2}.$$

Подставляя сюда $v_x(t)$ из формулы (1.4), получим

$$K(t) = \frac{m}{2}(-a\omega\sin\omega t)^2 = \frac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t.$$

Запомним:

$$K(t) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t. \qquad (1.10)$$

Потенциальная энергия равна работе квазиупругой силы по перемещению материальной точки из данной точки с координатой $x(t)$ в нулевую точку. Построим график зависимости величины квазиупругой силы от координаты x (рис. 1.6).

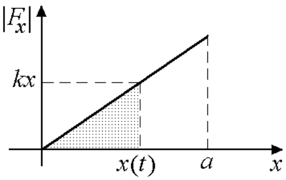


Рис. 1.6

Заметим, что направление силы $\vec{F}$ при этом совпадает с направлением перемещения $\vec{s}$ (рис. 1.7). Из рисунка видно, что работа, которую совершит квазиупругая сила $\vec{F}$, проекция которой на ось x равна

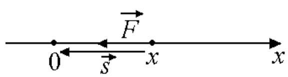


Рис. 1.7

$F_x = -kx$ при перемещении материальной точки с координатой x в точку с координатой 0 – это положительная величина, численно равная площади под графиком $|F_x(x)|$ на участке $[0; x]$:

$$A_{x\to 0} = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Эта работа и есть потенциальная энергия в точке $x(t)$:

$$\Pi(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{k\cdot(a\cos\omega t)^2}{2} = \frac{ka^2\cos^2\omega t}{2}.$$

Запомним:

$$\Pi(t) = \frac{ka^2\cos^2\omega t}{2}. \qquad (1.11)$$

С другой стороны, согласно формуле (1.6)

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega^2.$$

Подставив это значение k в уравнение (1.11), получим

$$\Pi(t) = \frac{m\omega^2 a^2\cos^2\omega t}{2}. \qquad (1.12)$$

Теперь найдем полную энергию:

$$E(t) = K(t) + \Pi(t) = \frac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t + \frac{m\omega^2 a^2\cos^2\omega t}{2} =$$

$$= \frac{ma^2\omega^2}{2}(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = \frac{ma^2\omega^2}{2} = \text{const}.$$

Итак, полная энергия E не зависит от времени и равна

$$E = \frac{ma^2\omega^2}{2}. \qquad (1.13)$$

Ответ: $K(t) = \dfrac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t$;

Ï $(t) = \dfrac{ma^2\omega^2\cos^2\omega t}{2}$;

$E = \dfrac{ma^2\omega^2}{2}$.

СТОП! Решите самостоятельно: А6, В12, В13, С3, С4.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ[1]

Задачи легкие

А1. Материальная точка совершает незатухающие гармонические колебания. Какие из величин, характеризующих это движение (смещение, амплитуда, период, частота, циклическая частота, фаза, скорость, ускорение), являются постоянными и какие переменными?

А2. Амплитуда незатухающих колебаний точки струны 1 мм, частота 1 кГц. Какой путь пройдет точка за 0,2 с?

А3. Маятник совершил 50 колебаний за 1 мин 40 с. Найти период, частоту и циклическую частоту колебаний.

А4. Уравнение движения имеет вид $x = 0{,}06\cos 100\pi t$. Каковы амплитуда, частота и период колебаний?

А5. Через какой минимальный промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебания 24 с, начальная фаза равна $\pi/2$, а колебания происходят по закону $x = a\cos(\omega t + \alpha)$?

А6. Материальная точка массой m колеблется с частотой ν и амплитудой x_m. Найти зависимость потенциальной и кинетической энергии точки от времени: $W_p(t)$ и $W_k(t)$. Какова полная механическая энергия W колебаний?

Задачи средней трудности

В1. Какова частота колебаний поршней в цилиндрах двигателя автомобиля «Жигули» при скорости движения автомобиля 120 км/ч, если диаметр колес 60 см и частота вращения коленчатого вала в 4,3 раза больше частоты вращения колес?

В2. Уравнение движения гармонического колебания имеет вид: $x = 0{,}02\cos\pi t$. Построить график зависимости $x(t)$. Найти смещение через 0,25 с; через 1,25 с. Ответы пояснить с помощью графика.

В3. При каких фазах смещение по модулю равно половине амплитуды?

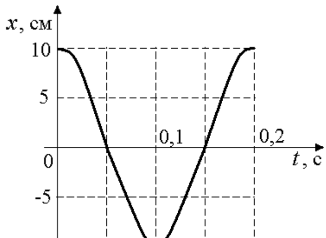


Рис. 1.8

[1] В задачах этого параграфа, если нет специальных оговорок, считать, что: а) колебательное движение задается уравнением $x = x_m\cos\omega t$; б) все величины заданы в единицах СИ; в) движение изучается в пределах одного периода; г) все начальные данные – точные.

В4. По графику, приведенному на рис. 1.8: а) найти амплитуду, период, частоту и циклическую частоту колебаний; б) написать уравнение зависимости $x(t)$; в) найти смещение колеблющейся точки при фазах $\pi/2$ и $\frac{2\pi}{3}$ рад; г) найти смещение через 0,1 и 0,15 с после начала отсчета времени.

В5. Амплитуда колебаний 10 см, в частота 0,5 Гц. Написать уравнение зависимости $x(t)$ и построить его график. Найти фазу и смещение через 1,5 с. Определить, через сколько времени смещение будет 7,1 см.

В6. При фазе $\pi/3$ рад смещение было равно 1 см. Найти амплитуду колебаний и смещение при фазе $\frac{3\pi}{4}$ рад.

В7. Составить уравнение гармонического колебания, если амплитуда колебания 4 см, а период – 0,01 с, $x_0 = 0$. Колебания происходят по закону $x = a\cos(\omega t + \alpha)$.

В8. Колебательное движение точки описывается уравнением $x = 0{,}05\cos 20\pi t$. Вычислив первую и вторую производные, написать уравнения зависимости скорости и ускорения от времени: $\upsilon_x(t)$ и $a_x(t)$. Найти координату, скорость и ускорение спустя $\frac{1}{60}$ с после момента $t = 0$.

В9. Амплитуда колебаний конца ножки камертона 1 мм, а частота колебаний 500 Гц. Написать уравнения $x(t)$, $\upsilon_x(t)$ и $a_x(t)$. Каковы наибольшие значения скорости и ускорения? В каких положениях достигаются эти значения?

В10. Написать уравнение гармонического колебания тела, если его амплитуда 5 см, период 4 с, начальная фаза равна $\pi/4$, а также зависимости $\upsilon_x(t)$ и $a_x(t)$. Колебания происходят по закону $x = a\cos(\omega t + \alpha)$.

В11. Тело совершает колебания по закону $x = 0{,}3\cos\pi(t + 0{,}5)$ м. Найти амплитуду, период, начальную фазу колебаний и ускорение в момент времени $t = 0{,}5$ с.

В12. Человек массой 80 кг качается на качелях. Амплитуда его колебания 1 м. За 1 мин он совершает 15 колебаний. Найти кинетическую и потенциальную энергию через 1/12 периода.

В13. Материальная точка массой 10 г колеблется по закону $x = 0{,}05\sin(0{,}6t + 0{,}8)$. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.

Задачи трудные

С1. Сравнить время прохождения колеблющейся точкой первой и второй половины амплитуды: $t_1 : t_2 = ?$ Начальное смещение равно амплитуде $x(0) = a$.

С2. Какую часть периода груз маятника находится в пределах 1 см от положения равновесия, если амплитуда его колебания равна 2 см?

С3. Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0{,}2$ м и периодом $T = 4$ с. В момент $t_0 = 0$ $x = A$. Найти кинетическую и потенциальную энергии в момент времени $t = 1$ с.

С4. Написать уравнение гармонического колебания тела, если его полная энергия $3{\cdot}10^{-5}$ Дж, максимальная сила, действующая на тело, 1,5 мН, период колебания 2 с и начальная фаза 60°. Колебания происходят по закону $x = a\cos(\omega t + \alpha)$.

§ 2. Пружинный маятник

Автор: Рассмотрим такую задачу. На гладкой поверхности лежит груз массой m, прикрепленный к стене пружиной жесткостью k (рис. 2.1). Как будет двигаться груз, если его слегка отвести в сторону и отпустить?

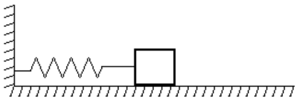


Рис. 2.1

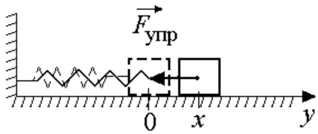


Рис. 2.2

Читатель: По-моему, возникнет ситуация, абсолютно аналогичная той, что мы рассмотрели в § 1: на груз начнет действовать сила упругости, которая по закону Гука прямо пропорциональна смещению x и направлена к положению равновесия, причем $F_x = -kx$ (рис. 2.2).

Автор: Совершенно верно! А сила упругости в данном случае будет играть роль той самой квазиупругой «возвращающей» силы, которую мы ввели в рассмотрение в § 1!

Читатель: Но тогда для нашего груза будут справедливы все полученные в § 1 результаты: он будет колебаться по закону

$$x = a\cos\omega t,$$

где a – амплитуда, а $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – циклическая частота. (Я учел, что начальная фаза равна нулю: $\alpha = 0$.)

Автор: Верно! А каков будет период колебаний?

Читатель: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Автор: Эту формулу надо запомнить:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \;. \qquad (2.1)$$

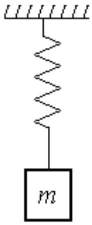


Рис. 2.3

Теперь у меня следующий вопрос: а как изменится период колебаний, если груз *повесить* на той же пружине, как показано на рис. 2.3?

Читатель: Здесь надо будет учесть действие силы тяжести: в положении равновесия пружина будет растянута, должно выполняться равенство $mg = F_{упр}$. А что касается периода колебаний…, даже не знаю…

Автор: Вы правы. Если груз подвешен на пружине, то, помимо силы упругости, на его колебания будет влиять сила тяжести. Но ее действие *можно исключить* из рассмотрения таким приемом.

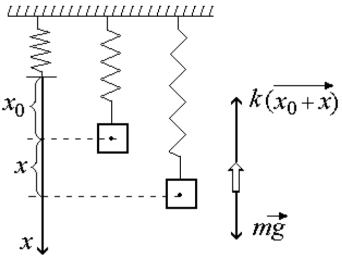


Рис. 2.4

Пусть в положении равновесия пружина удлинилась на расстояние x_0 от недеформированного положения (рис. 2.4). Ясно, что в положении равновесия $mg = kx_0$. Если пружину растянуть еще на расстояние x, считая от этой точки, то проекция равнодействующей всех сил, приложенных к грузу на ось x, будет равна

$$F_x = -k(x_0 + x) + mg = -kx_0 - kx + mg = (\cancelto{0}{mg - kx_0}) - kx = -kx.$$

Таким образом, если начало координат поместить в точку, соответствующую положению равновесия, то все будет происходить так, как если бы на груз действовала только упругая сила пружины $F_x = -kx$. А значит, период колебаний не изменится.

Задача 2.1. Пружинный маятник колеблется с периодом $T =$ $= 1{,}0$ с. Масса груза $m = 1{,}0$ кг. Какова жесткость пружины?

$T = 1{,}0$ с $m = 1{,}0$ кг	***Решение.*** Согласно формуле (2.1)
$k = ?$	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\dfrac{m}{k} \Rightarrow$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}0\,\text{кг}}{(1{,}0\,\text{с})^2} \approx 39 \text{ Н/м}.$$

Ответ: $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} \approx 39$ Н/м.

СТОП! Решите самостоятельно: А1–А3, В1, С1, С3.

Задача 2.2. Найти проекции ускорения шарика (рис. 2.5) при смещениях x_1 = 2,0 см и x_2 = –0,50 см, если масса шарика m = 100 г и жесткость пружины k = 400 Н/м. В какой точке проекция ускорения равна $a_{x_3} = 10$ м/с^2?

x_1 = 2,0 см
x_2 = –0,50 см
m = 100 г = 0,100 кг
$a_{x_3} = 10$ м/с^2
k = 400 Н/м

$a_{x_1} = ?$ $a_{x_2} = ?$ $x_3 = ?$

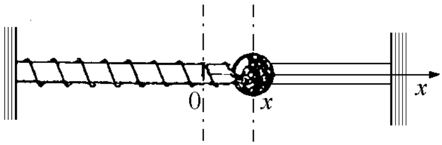


Рис. 2.5

Решение. Воспользуемся вторым законом Ньютона в проекции на ось x:

$$ma_x = -kx \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x.$$

Тогда

$$a_{x_1} = -\frac{400\,\text{Н/м}}{0{,}100\,\text{кг}} \cdot (2{,}0 \cdot 10^{-2}\text{ м}) = -80 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{x_2} = -\frac{400\,\text{Н/м}}{0{,}100\,\text{кг}} \cdot (-0{,}50 \cdot 10^{-2}\text{ м}) = 20 \text{ м/с}^2,$$

$$x_3 = -\frac{m}{k}a_x = -\frac{0{,}100\,\text{кг}}{400\,\text{Н/м}} \cdot 10\,\text{м/с}^2 = -0{,}25 \cdot 10^{-2}\text{ м} = -0{,}25 \text{ см}.$$

Ответ: $a_{x_1} = -80$ м/с^2; $a_{x_2} = 20$ м/с^2; x_3 = –0,25 см.

СТОП! Решите самостоятельно: В2, В3, С2.

Задача 2.3. Груз, подвешенный на пружине с жесткостью 1,0 кН/м, колеблется с амплитудой 2,0 см. Найти кинетическую и потенциальную энергию при фазе π/3 рад.

k = 1,0 кН/м = $1{,}0\cdot10^3$ Н/м a = 2,0 см = $2{,}0\cdot10^{-2}$ м $\varphi = \pi/3$ рад	***Решение.*** Потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины $П = \dfrac{kx^2}{2}$. Если $x = a\cos\omega t$ или (если
$К = ?\quad П = ?$	

учесть, что фаза $\varphi = \omega t$) $x = a\cos\varphi$, то

$$П = \frac{k(a\cos\varphi)^2}{2} = \frac{1{,}0\cdot10^3\ \text{Н/м}\cdot\left(2{,}0\cdot10^{-2}\ \text{м}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}{2} = 5{,}0\cdot10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Полная энергия E равна максимальному значению потенциальной энергии, то есть $E = П$ в тот момент, когда груз находится в крайнем положении, а его смещение равно амплитуде: $E = \dfrac{ka^2}{2}$.
Поскольку полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергий, то

$$E = П + К \Rightarrow К = E - П \Rightarrow$$

$$К = \frac{ka^2}{2} - \frac{k(a\cos\varphi)^2}{2} = \frac{ka^2}{2}(1-\cos^2\varphi) = \frac{ka^2}{2}\sin^2\varphi.$$

Подставим численные значения:

$$К = \frac{ka^2}{2}\sin^2\varphi = \frac{1{,}0\cdot10^3\ \text{Н/м}\cdot(2{,}0\cdot10^{-2}\ \text{м})^2\sin^2(\pi/3)}{2} \approx 15\cdot10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $П = \dfrac{k(a\cos\varphi)^2}{2} \approx 5{,}0\cdot10^{-2}$ Дж; $К = \dfrac{ka^2}{2}\sin^2\varphi \approx 15\cdot10^{-2}$ Дж.

СТОП! Решите самостоятельно: В4, В5, С3.

Задача 2.4. Тело массой m подвешено на двух пружинах одинаковой длины, но с разными упругими свойствами. Коэффициенты упругости k_1 и k_2. Определите частоту колебаний тела в случаях *а* и *б* (рис. 2.6).

k_1 k_2 m	***Решение***. Поставим вопрос так: пружинами какой жесткости k_{01} и k_{02} можно *заменить* эти системы пружин, чтобы при одинаковой внешней силе F они деформировались на
$\nu_1 = ?$ $\nu_2 = ?$	такую же величину Δl? 1. Растянем две параллельные пружины на величину Δl, тогда общая сила, действующая на груз, будет равна

$$F = F_1 + F_2 = k_1\Delta l + k_2\Delta l. \qquad (1)$$

С другой стороны, при замене этих двух пружин на одну жесткостью k_{01} получим

$$F = k_{01}\Delta l . \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), получим

$$k_1\Delta l + k_2\Delta l = k_{01}\Delta l \;\Rightarrow k_{01} = k_1 + k_2.$$

Запомним: при параллельном соединении жесткость *эквивалентной* пружины равна сумме жесткостей соединенных пружин:

$$k_{01} = k_1 + k_2. \qquad (2.2)$$

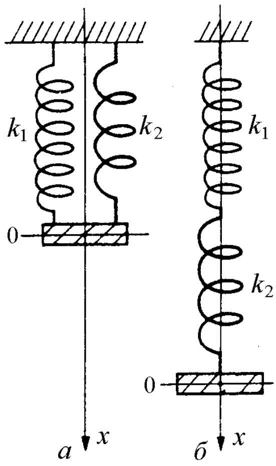


Рис. 2.6

Тогда частота колебаний будет равна

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{01}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} .$$

2. Растянем две последовательно соединенные пружины так, чтобы общее удлинение было равно Δl. Тогда первая пружина удлинится на Δl_1, а вторая – на Δl_2, но при этом

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l. \qquad (3)$$

Заметим, что в этом случае силы натяжения обеих пружин одинаковы:

$$F = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2 \qquad (4)$$

(иначе система не находилась бы в равновесии).

При замене этих двух пружин на эквивалентную, жесткостью k_{02}, сила F будет равна

$$F = k_{02}\Delta l. \qquad (5)$$

Выразим величины Δl_1 и Δl_2 из (4), а Δl из (5) и подставим в (3), получим

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{02}} \Rightarrow \frac{1}{k_{02}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} .$$

Запомним: при последовательном соединении пружин справедливо

$$\frac{1}{k_{02}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} . \qquad (2.3)$$

Из (2.2) выразим k_{02}:

$$k_{02} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \qquad (2.4)$$

Теперь найдем частоту колебаний для случая последовательного соединения пружин:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{02}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$$

Ответ: $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$; $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$.

Автор: Как Вы думаете, чему будет равна жесткость пружины, составленной из n маленьких одинаковых пружин жесткостью k, соединенных последовательно?

Читатель: Если *обобщить* формулу (2.2) для произвольного n (по-моему, это нетрудно сделать), то получим

$$\frac{1}{k_0} = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}}_{n\text{ раз}} = \frac{n}{k} \Rightarrow \underline{k_0 = \frac{k}{n}}.$$

Автор: Совершенно верно! Жесткость большой пружины будет *меньше* жесткости каждой маленькой пружины в n раз.

СТОП! Решите самостоятельно: А4, В6, В7.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. Найти частоту колебаний груза массой 400 г, подвешенного к пружине жесткостью 160 Н/м.

А2. Найти массу груза, который на пружине с жесткостью 250 Н/м делает 20 колебаний за 16 с.

А3. Во сколько раз изменится частота колебаний автомобиля на рессорах после снятия груза, равного массе порожнего автомобиля?

А4. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если их последовательное соединение заменить параллельным?

Задачи средней трудности

В1. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить алюминиевый шарик того же радиуса? Плотность меди ρ_1 = 8,9 г/см^3, алюминия ρ_2 = 2,7 г/см^3.

В2. Груз массой 1,0 кг, подвешенный к пружине с жесткостью 100 Н/м, совершает колебания с амплитудой 10 см. Написать уравнение $x = x(t)$ движения груза и формулу $F_x(t)$, выражающую зависимость силы упругости от времени. Найти наибольшее значение силы упругости и значение проекции силы упругости F_x через 1/6 периода.

В3. Шарик массой 200 г, закрепленный на пружине, жесткость которой 0,20 кН/м (рис. 2.7), совершает колебания. Написать уравнение, выражающее зависимость ускорения от смещения: $a_x(x)$. Каково наибольшее ускорение, если амплитуда колебаний равна 1,0 см?

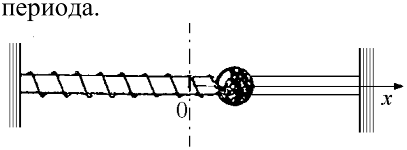


Рис. 2.7

В4. Груз массой 400 г совершает колебания на пружине с жесткостью 250 Н/м. Амплитуда колебаний 15 см. Найти полную механическую энергию колебаний и наибольшую скорость движения груза.

В5. Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое время (в долях периода) кинетическая энергия колеблющегося тела будет равна потенциальной энергии пружины?

В6. Груз, подвешенный на длинном резиновом жгуте, совершал колебания с периодом T. Во сколько раз изменится период колебаний, если отрезать 3/4 длины жгута и подвесить на оставшуюся часть тот же груз? При возможности проверьте ответ на опыте.

В7. Найдите период T колебаний систем, изображенных на рис. 2.8. Коэффициенты жесткости пружин k_1 и k_2, масса груза m. Трение отсутствует.

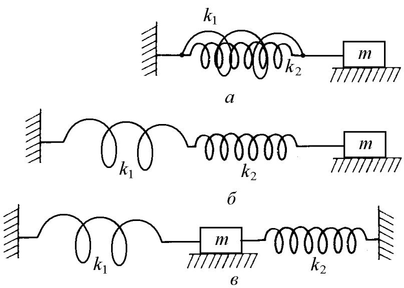


Рис. 2.8

Задачи трудные

С1. Подвешенный груз растягивает легкую пружину на Δl = 16 см. Чему равен период колебаний груза на этой пружине?

С2. На пружине, имеющей жесткость k, неподвижно висит очень легкая чашка (рис. 2.9). На чашку с высоты h падает без начальной скорости пластилиновый шарик массой m. Определите амплитуду A возникающих колебаний.

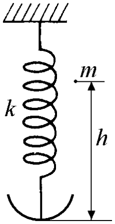


Рис. 2.9

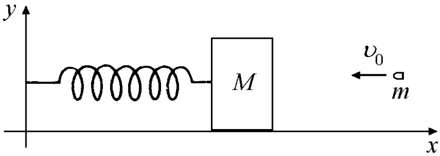


Рис. 2.10

С3. На идеально гладкой плоской поверхности лежит брусок массой M, прикрепленный к стене пружиной с коэффициентом упругости k (масса пружины равна нулю). В брусок попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью υ_0, и застревает в нем (рис. 2.10). Найдите амплитуду и частоту колебаний.

§ 3. Математический маятник

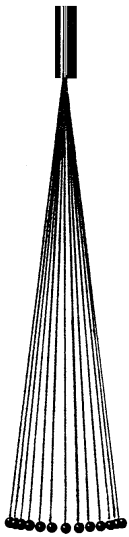


Рис. 3.1

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нити или невесомом стержне, которая совершает колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Металлический шарик, подвешенный на нити, является вполне приемлемой моделью математического маятника.

Попробуем вычислить период *малых* колебаний математического маятника, то есть таких колебаний, при которых нить отклоняется от вертикали не более чем на 5° (рис. 3.1).

Рассмотрим силы, действующие на шарик массой m, совершающий колебания на нити длиной l. Пусть в данный момент нить составляет с вертикалью угол α, а скорость шарика равна υ (рис. 3.2). На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}\,, \qquad (1)$$

где $\vec{a}$ – ускорение шарика.

Поскольку шарик движется по окружности, то ускорение можно представить в виде векторной суммы двух составляющих векторов:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\,,$$

где $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение, направленное к центру окружности – точке *A*, а $\vec{a}_\tau$ – касательное ускорение (его еще называют тангенциальным), направленное по касательной к окружности.

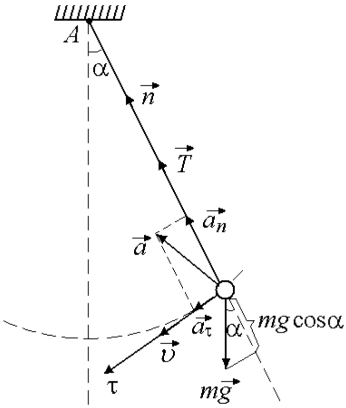


Рис. 3.2

Как известно из курса механики, $a_n = \dfrac{v^2}{l}$. Запишем теперь второй закон Ньютона в проекции на ось $\vec{n}$ (рис. 3.2), получим

$$T - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{l}\,.$$

Теперь на минуту остановимся и подумаем: чем можно *пренебречь* и что можно *упростить*, если ограничиться случаем *малых* колебаний, то есть колебаний, происходящих с очень небольшой скоростью вблизи положения равновесия?

Читатель: Если, как Вы говорите, скорость v мала, то *квадрат* скорости v^2, наверное, пренебрежимо мал, то есть им можно пренебречь. Тогда $m\dfrac{v^2}{l} \to 0$.

Автор: А значит, можно считать, что $T - mg\cos\alpha \approx 0 \Rightarrow T = mg\cos\alpha$! Вспомним, что при малых α $\sin\alpha \approx \alpha$. В этом легко убедиться с помощью рис. 3.3: по определению синус угла α равен отрезку *AB* – ординате конца единичного подвижного радиуса *OB*, а угол α, выраженный в радианах, численно равен длине дуги *A'B*.

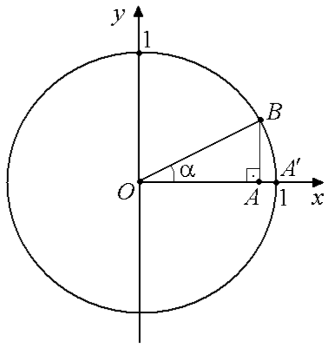


Рис. 3.3

Если угол α очень мал, то дуга $A'B$ и отрезок AB практически сливаются воедино: $A'B \approx AB$. Теперь заметим еще одно обстоятельство: при очень малых углах можно считать $\cos\alpha \approx 1$.

Читатель: Это не очень понятно.

Автор: Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx \sqrt{1-\alpha^2}\ .$$

Добавим под корнем величину $\alpha^4/4$. Она так мала по сравнению с α, что беспокоится не о чем! Получим

$$\cos\alpha \approx \sqrt{1-\alpha^2} \approx \sqrt{1-\alpha^2+\frac{\alpha^4}{4}} = \sqrt{1-2\cdot 1\cdot\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)^2} = 1-\frac{\alpha^2}{2}.$$

Запомним приближенную формулу:

$$\cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2}. \qquad (3.1)$$

Ясно, что при малых α величиной $\alpha^2/2$ можно пренебречь, и поэтому $\cos\alpha \approx 1$.

Итак, подытожим наши упрощения и приближения:

1) $T \approx mg\cos\alpha$;
2) $\sin\alpha \approx \alpha$;
3) $\cos\alpha \approx 1$.

Читатель: А с учетом третьего приближения можно упростить и первое: $T \approx mg\cos\alpha \approx mg\cdot 1 = mg$.

Автор: Совершенно верно! А теперь вспомним, что при малых углах α окружность мало отличается от прямой, и заменим рис. 3.2 на *упрощенный* рис. 3.4.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$-T\sin\alpha = ma_x, \qquad (2)$$

где a_x – проекция ускорения на ось x. Поскольку $T \approx mg$, а из ΔAOB $\sin\alpha = \frac{x}{l}$, где x – координата шарика, то из равенства (2) получим

$$-mg\frac{x}{l} = ma_x,$$

тогда

$$a_x + \frac{g}{l}x = 0. \qquad (3.2)$$

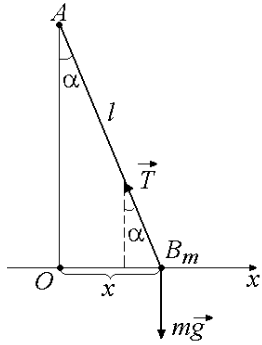


Рис. 3.4

А учитывая, что $a_x = x''(t)$, получим

$$x''(t) + \frac{g}{l}x(t) = 0. \qquad (3.3)$$

Сравним уравнение (3.3) с уже решенным нами уравнением (1.3):

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

Разница только в коэффициенте перед $x(t)$: было $\frac{k}{m}$, а стало $\frac{g}{l}$.

Если ввести обозначение $\frac{g}{l} = \omega^2$, то наше уравнение примет вид

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Его решением, как мы уже выяснили в § 1, является функция $x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$, где a – амплитуда, а α – начальная фаза.

Итак, мы нашли циклическую частоту колебаний математического маятника

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (3.4)$$

Тогда период колебаний составит

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Запомним: период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \,. \qquad (3.5)$$

Заметим, что период колебаний не зависит от массы шарика!

Из формулы (3.5) нетрудно получить формулу для частоты колебаний

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{l/g}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \,.$$

Запомним:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \,. \qquad (3.6)$$

СТОП! Решите самостоятельно: А1–А3, В1, С1, С2.

Задача 3.1. Как относятся длины двух математических маятников, если за одно и то же время один из них совершает $n_1 = 10$ колебаний, а второй $n_2 = 30$ колебаний?

$n_1 = 10$
$n_2 = 30$
$l_1/l_2 = ?$

Решение. Пусть оба маятника колеблются время t. Тогда

$$T_1 = \frac{t}{n_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \,, \qquad (1)$$

$$T_2 = \frac{t}{n_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \,. \qquad (2)$$

Разделим (1) на (2), получим

$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{30^2}{10^2} = 9 \,.$$

Ответ: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} = 9$.

СТОП! Решите самостоятельно: А4, В2–В5, В7.

Задача 3.2. Математический маятник длиной $l = 1$ м совершает колебания амплитудой $a = 0{,}02$ м. Найти проекции ускорения на ось x в крайних положениях и положении равновесия (см. рис. 3.4). Считать $g = 10$ м/с^2.

$l = 1$ м $x_1 = -0{,}02$ м $x_2 = 0{,}02$ м $x_3 = 0$	**Решение**. Воспользуемся уравнением (3.2):
$a_{x_1} = ?$ $a_{x_2} = ?$ $a_{x_3} = ?$	

$$a_x + \frac{g}{l}x = 0 \Rightarrow a_x = -\frac{g}{l}x,$$

тогда

$$a_{x_1} = -\frac{g}{l}x_1 = -\frac{10\ \text{м/с}^2}{1\ \text{м}}\cdot(-0{,}02\ \text{м}) = 0{,}2\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{x_2} = -\frac{g}{l}x_2 = -\frac{10\ \text{м/с}^2}{1\ \text{м}}\cdot 0{,}02\ \text{м} = -0{,}2\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{x_3} = -\frac{g}{l}x_3 = -\frac{10\ \text{м/с}^2}{1\ \text{м}}\cdot 0 = 0.$$

Ответ: $a_{x_1} = -\frac{g}{l}x_1 = 0{,}2\ \text{м/с}^2$; $a_{x_2} = -\frac{g}{l}x_2 = -0{,}2\ \text{м/с}^2$;

$$a_{x_3} = -\frac{g}{l}x_3 = 0.$$

СТОП! Решите самостоятельно: А5, А6, В6.

Энергия математического маятника

Автор: Смогли бы Вы определить кинетическую, потенциальную и полную энергию математического маятника, если известно, что его масса m, длина l, и он совершает колебания с амплитудой a.

Читатель: Если мы знаем l, значит, знаем и $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Пусть маятник колеблется по закону: $x = a\cos\omega t$, тогда его проекция скорости изменяется по закону

$$\upsilon_x = x'(t) = -a\omega\sin\omega t.$$

Тогда кинетическая энергия равна

$$K = \frac{m\upsilon_x^2}{2} = \frac{m(-a\omega\sin\omega t)^2}{2} \Rightarrow$$

$$K = \frac{ma^2\omega^2\sin^2\omega t}{2}. \qquad (3.7)$$

Автор: Верно. А как найти полную энергию?

Читатель: Я думаю, что она равна максимальному значению кинетической энергии:

$$E = K_{\text{макс}} = \frac{ma^2\omega^2}{2}. \tag{3.8}$$

Автор: Верно. Осталось найти потенциальную энергию.

Читатель: Поскольку $П + К = Е$, то

$$П = E - K = \frac{ma^2\omega^2}{2} - \frac{ma^2\omega^2 \sin^2 \omega t}{2} \Rightarrow \frac{ma^2\omega^2}{2}(1 - \sin^2 \omega t) \Rightarrow$$

$$П = \frac{ma^2\omega^2 \cos^2 \omega t}{2}. \tag{3.9}$$

Автор: Я согласен с Вами. Но вот какой вопрос меня беспокоит: потенциальная энергия математического маятника, по идее, должна быть равна mgh, где h – высота подъема над положением равновесия (рис. 3.5).

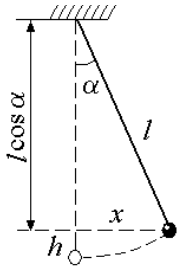


Рис. 3.5

Тогда потенциальная энергия маятника, отклоненного от положения равновесия на угол α, должна быть равна

$$П = mgl(1 - \cos\alpha). \tag{3.10}$$

Как это согласовать с формулой (3.9)?

Читатель: Странно… Формулы вроде бы разные…

Автор: Но если мы с Вами вспомним, что при малых углах α справедлива формула (3.1): $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, то…

Читатель: Тогда $П \approx mgl\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right) = mgl\frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{mgl}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 =$

$$= \frac{m}{2}\frac{g}{l}x^2 = \frac{m}{2}\omega^2(a\cos\omega t)^2 = \frac{m\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t}{2}.$$

Действительно, все совпадает!

Автор: Замечательно! Но следует помнить, что все наши формулы для математического маятника приближенные и «работают» только при малых углах.

СТОП! Решите самостоятельно: А7, А8, В8.

Автор: Как Вы думаете, изменится ли период колебаний математического маятника, если, кроме силы тяжести, на него действуют еще какие-нибудь силы – электрические или магнитные?

Читатель: Я думаю, да. Если силы будут направлены вниз, то получится, что g как бы увеличивается, а если вверх – то уменьшается. Если g увеличивается, то T уменьшается, а если g уменьшается, то T увеличивается согласно формуле (3.5).

СТОП! Решите самостоятельно: А9, А10.

Маятник во внешнем поле

Задача 3.3. Маленький шарик массы m = 0,10 г, несущий заряд $q = 2{,}0\cdot10^{-9}$ Кл, подвешен на невесомой изолирующей нити и совершает в поле тяжести колебания с периодом T_0 = 0,60 с. Каким будет период колебания T, если шарик поместить в электрическое поле, напряженность которого равна по модулю $E = 1{,}0\cdot10^5$ В/м и направлена: 1) вертикально вниз; 2) вертикально вверх.

m = 0,10 г
$q = 2{,}0\cdot10^{-9}$ Кл
T_0 = 0,60 с
$E = 1{,}0\cdot10^5$ В/м
T_1 = ? T_2 = ?

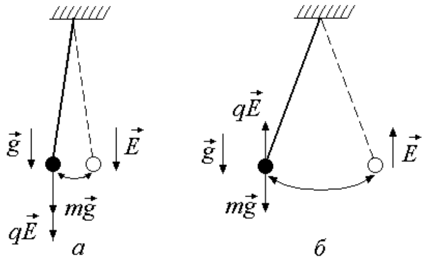


Рис. 3.6

Решение.

1. В первом случае на шарик действуют две сонаправленные вертикальные силы $m\vec{g}$ и $q\vec{E}$ (рис. 3.6,*а*). Если шарик отпустить, то под действием этих сил он падал бы с ускорением

$$g_1 = \frac{mg + qE}{m} = g + \frac{qE}{m}.$$

То есть он «вел бы себя» так же, как если бы находился в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g_1.

Назовем величину g_1 *эффективным ускорением* свободного падения. Тогда период колебания будет равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \dfrac{qE}{m}}}\,. \qquad (1)$$

С другой стороны, в отсутствие поля период колебаний был равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (2)$$

Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{T_1}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + \dfrac{qE}{m}}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g + \dfrac{qE}{m}}} \Rightarrow T_1 = T\sqrt{\frac{g}{g + \dfrac{qE}{m}}}\,.$$

Подставим численные значения:

$$T_1 = T\sqrt{\frac{g}{g + \dfrac{qE}{m}}} = 0{,}60\ \text{с}\sqrt{\frac{9{,}8\ \text{м/с}^2}{9{,}8\ \text{м/с}^2 + \dfrac{2{,}0\cdot 10^{-9}\ \text{Кл}\cdot 1{,}0\cdot 10^{5}\ \text{В/м}}{0{,}00010\ \text{кг}}}} \approx 0{,}55\ \text{с}.$$

2. Во втором случае ситуация аналогичная, только сила $q\vec{E}$ как бы «гасит» силу тяжести, поэтому эффективное ускорение свободного падения

$$g_2 = \frac{mg - qE}{m} = g - \frac{qE}{m}\,.$$

Проделав преобразования, аналогичные п. 1, получим

$$T_2 = T\sqrt{\frac{g}{g - \dfrac{qE}{m}}} = 0{,}60\ \text{с}\cdot\sqrt{\frac{9{,}8\ \text{м/с}^2}{9{,}8\ \text{м/с}^2 - \dfrac{2{,}0\cdot 10^{-9}\ \text{Кл}\cdot 1{,}0\cdot 10^{5}\ \text{В/м}}{0{,}00010\ \text{кг}}}} \approx 0{,}67\ \text{с}.$$

Ответ: $T_1 = T\sqrt{\dfrac{g}{g + \dfrac{qE}{m}}} \approx 0{,}55$ с; $T_2 = T\sqrt{\dfrac{g}{g - \dfrac{qE}{m}}} \approx 0{,}67$ с.

Читатель: У меня вопрос: а что произойдет, если $mg < qE/m$?

Автор: В этом случае «верх» и «низ» как бы меняются местами: шарик будет колебаться «вверх ногами» (рис. 3.7), а эффективное значение g будет равно $\dfrac{qE}{m} - g$.

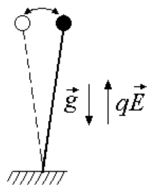


Рис. 3.7

Читатель: А что будет, если электрическое поле будет направлено горизонтально?

Автор: В этом случае шарик будет колебаться около нового положения равновесия (рис. 3.8). А величину эффективного ускорения свободного падения можно найти по теореме Пифагора:

$$g_э^2 = g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2.$$

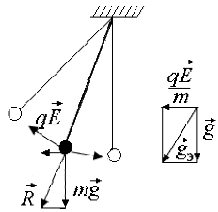


Рис. 3.8

СТОП! Решите самостоятельно: В11, В10, В9, С3, С4.

Маятник в ускоряющейся системе отсчета. Принцип эквивалентности

Задача 3.4. Шарик массы m подвешен внутри пустой цистерны на невесомой нити длиной l. В начальный момент $t = 0$ цистерна начинает двигаться в горизонтальном направлении с постоянным ускорением a (рис. 3.9). Найти период колебаний шарика.

m
l
a
$t = 0$
$T = ?$

Решение. Начнем с того, что сформулируем один важный физический закон – принцип эквивалентности. Чтобы сформулировать принцип эквивалентности, рассмотрим следующий мысленный эксперимент.

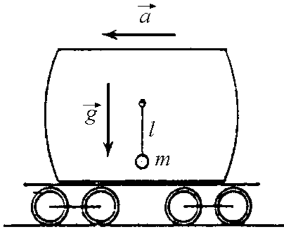


Рис. 3.9

Пусть закрытая лаборатория, например кабина лифта, движется с постоянным ускорением a относительно какой-либо инерциальной системы отсчета в области пространства, где отсутствует поле тяготения. Тогда все свободные тела в лифте, которые относительно инерциальной системы не имеют ускорения, будут относительно лифта иметь одинаковое ускорение $-\vec{a}$. Находящийся в закрытом лифте наблюдатель, который не имеет возможности «выглянуть наружу», по поведению этих тел не сможет решить, движется ли лифт с ускорением $-\vec{a}$ или он покоится в однородном поле тяжести, напряженность которого $\vec{g}$ равна $-\vec{a}$. В самом деле, при действии такого поля тяжести все свободные тела в покоящемся лифте будут двигаться с одинаковым ускорением $\vec{g} = -\vec{a}$.

Такая эквивалентность поля тяжести и ускоренного движения системы отсчета справедлива для любых механических явлений: все механические явления в движущемся с ускорением лифте происходят точно так же, как и в неподвижном лифте, но находящемся в поле тяжести. Сформулировав этот принцип, Эйнштейн распространил его, так же как и принцип относительности, не только на механические явления, но и на все физические явления вообще.

Применение принципа эквивалентности позволяет упростить рассмотрение многих физических явлений, а нашу задачу вообще превращает в тривиальную. Вместо того чтобы рассматривать ускоренно движущуюся цистерну, будем считать, что она неподвижна, но на все тела в ней действует дополнительное гравитационное поле с напряженностью $\vec{g}_1 = -\vec{a}$ (рис. 3.10,*а*). Это поле, складываясь с истинным полем *тяжести* Земли, дает эффективное поле *тяжести*, напряженность которого $\vec{g}_2 = \vec{g} + \vec{g}_1 = \vec{g} - \vec{a}$. Вектор $\vec{g}_2$ отклонен от истинной вертикали на угол α_0, тангенс которого *определяется соотношением*

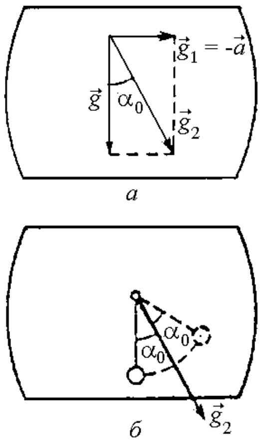


Рис. 3.10

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{a}{g}. \qquad (1)$$

Величина напряженности эффективного поля тяжести находится по теореме Пифагора

$$g_2 = \sqrt{g^2 + a^2}. \qquad (2)$$

Ясно, что в положении равновесия нить маятника направлена вдоль вектора $\vec{g}_2$. В начальный момент, когда цистерна начинает двигаться с ускорением $\vec{a}$, шарик неподвижен, а нить вертикальна, т.е. маятник отклонен от нового положения равновесия на угол α_0, влево (рис. 3.10,*б*). Поэтому маятник в пустой цистерне будет совершать относительно нового положения равновесия колебания с угловой амплитудой α_0. Если ускорение цистерны $\vec{a}$ мало по сравнению с ускорением свободного падения $\vec{g}$, то амплитуда колебаний мала и колебания будут гармоническими.

Тогда период можно вычислить по формуле (3.5):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

Читатель: В этой задаче Вы называете $\vec{g}$ *напряженностью гравитационного поля*, но ведь $\vec{g}$ – это ускорение свободного падения.

Автор: Да, но, так сказать, по совместительству. Ведь $\vec{g}$ – это величина, численно равная силе тяжести, действующей в данной точке поля на *единичную* массу: $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_т}{m}$. Поэтому она характеризует «силовые возможности» данного поля и (по аналогии с напряженностью электрического поля) называется напряженностью гравитационного поля.

СТОП! Решите самостоятельно: В12, В13, С5, С6.

Маятник в горах

Задача 3.5. На сколько отстанут маятниковые часы в горах на высоте h над поверхностью Земли за время τ? Радиус Земли равен R.

h R τ	***Решение.*** Отставание маятниковых часов в горах связано с тем, что период колебаний маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
$\Delta t = ?$	зависит от ускорения свободного падения. При подъеме

$\vec{g}$ уменьшается. В самом деле, согласно закону всемирного тяготения на тело массой m на поверхности Земли действует сила тяжести, равная

$$mg = G\frac{mM_З}{R^2} \Rightarrow g = G\frac{M_З}{R^2}, \qquad (1)$$

а на высоте h

$$mg_1 = G\frac{mM_З}{(R+h)^2} \Rightarrow g_1 = G\frac{M_З}{(R+h)^2}, \qquad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим $\frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow$.

$$g_1 = g\frac{R^2}{(R+h)^2}. \qquad (3.11)$$

Поскольку с высотой g_1 уменьшается, то T увеличивается, значит, период колебаний T_1 на высоте h будет больше T: $T_1 > T$. Тогда за каждый период T_1 часы в горах будут отставать на время $(T_1 - T)$.

За время τ часы совершают $N_1 = \tau/T_1$ колебаний, поэтому общее отставание составит

$$\Delta t = N_1(T_1 - T) = \frac{\tau}{T_1}(T_1 - T) = \tau\left(1 - \frac{T}{T_1}\right) = \tau\left(1 - \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{2\pi\sqrt{l/g_1}}\right) =$$

$$= \tau\left(1 - \sqrt{\frac{g_1}{g}}\right) = \tau\left(1 - \sqrt{\frac{g(R/(R+h))^2}{g}}\right) = \tau\left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = \tau\frac{h}{R+h}.$$

Итак, мы получили *ответ*: часы отстанут на время

$$\Delta t = \tau\frac{h}{R+h}. \qquad (3.12)$$

СТОП! Решите самостоятельно: B14, C8–C10.

Как период колебаний зависит от температуры?

Читатель: По-моему, в формулу $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ температура не входит, значит, период от температуры не зависит.

Автор: Да, но длина маятника l, вообще говоря, зависит от температуры: все тела при нагревании расширяются, а их линейные размеры увеличиваются по закону

$$l_t = l(1 + \alpha t), \tag{3.13}$$

где l_t – длина при температуре t: l – длина при температуре $t = 0$ °С; α – температурный коэффициент линейного расширения данного материала.

Задача 3.6. Часы, маятник которых состоит из груза малых размеров и легкой латунной нити, идут правильно при 0 °С. Найти коэффициент линейного расширения латуни, если при повышении температуры до $t = +20$ °С часы отстанут за сутки на 16 с.

$t = +20$ °С
$\Delta t = 16$ с
$\tau = 24$ ч
$\alpha = ?$

Решение. При 0 °С: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, при $t = 20$ °С $T_1 = 2\pi\sqrt{l(1+\alpha t)/g}$. Отставание за сутки, как мы выяснили в предыдущей задаче, равно

$$\Delta t = \tau\left(1 - \frac{T}{T_1}\right),$$

отсюда $$\Delta t = \tau\left(1 - \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l(1+\alpha t)}{g}}}\right) = \tau\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha t}}\right).$$

Учитывая, что величина α очень мала $\sim 10^{-5}$ 1/°С, выражение $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha t}}$ можно заменить более простым приближенным выражением

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha t)}} = \frac{\sqrt{1-\alpha t}}{\sqrt{1+\alpha t}\cdot\sqrt{1-\alpha t}} = \frac{\sqrt{1-\alpha t}}{\sqrt{1-(\alpha t)^2}} \approx \sqrt{1-\alpha t} \approx$$

$$\approx \sqrt{1 - 2\cdot 1\cdot\frac{\alpha t}{2} + \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{2}t\right)^2} = 1 - \frac{\alpha}{2}t.$$

Мы вывели *две* приближенные формулы, которые стоит запомнить:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha t}} \approx \sqrt{1-\alpha t}\,, \tag{3.14}$$

$$\sqrt{1-\alpha t} \approx 1-\frac{\alpha}{2}t\,. \tag{3.15}$$

С учетом формулы (3.15) получим

$$\Delta t \approx \tau\left(1-\left(1-\frac{\alpha}{2}t\right)\right)=\tau\frac{\alpha t}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{2\Delta t}{\tau t}=\frac{2\cdot 16\text{ с}}{(24\cdot 3600)\text{ с}\cdot 20\text{ °C}} \approx 1{,}9\cdot 10^{-5}\ 1/\text{°C}.$$

Ответ: $\alpha=\dfrac{2\Delta t}{\tau t} \approx 1{,}9\cdot 10^{-5}\ 1/\text{°C}$.

СТОП! Решите самостоятельно: B15, B16, C11, C12.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ[1]

Задачи легкие

А1. Каким образом с помощью математического маятника можно определить ускорение силы тяжести в данном месте?

А2. Сохранится ли период колебаний часов-ходиков, если их с Земли перенести на Луну?

А3. Как изменится ход часов с маятником на металлическом стержне: а) при повышении температуры; б) при поднятии на гору; в) при перемещении от полюса к экватору?

А4. Какое значение получил для ускорения свободного падения учащийся при выполнении лабораторной работы, если маятник длиной 80 см совершил за 3 мин 100 колебаний?

А5. Маленький шарик, подвешенный на нити длиной 0,50 м, совершает колебания с амплитудой, много меньшей длины нити. Написать формулу зависимости $a_x(x)$, считая движение прямолинейным ($g \approx 10$ м/с^2). Каково ускорение шарика при смещениях 0,50 и –1,0 см?

[1] В задачах этого параграфа, если нет специальных оговорок, считать, что колебательное движение задается уравнением $x = x_m \cos\omega t$.

А6. Математический маятник длиной 2,5 м совершает колебания с амплитудой 10 см. Написать уравнение движения $x = x\ (t)$.

А7. Маятник состоит из тяжелого шарика массой 100 г, подвешенного на нити длиной 50 см. Определить период колебаний маятника и энергию, которой он обладает, если наибольший угол его отклонения от положения равновесия 15°.

А8. Во сколько раз изменилась полная механическая энергия колеблющегося маятника при уменьшении его длины в 3 раза и увеличении амплитуды в 2 раза.

А9. Изменится ли период колебаний маятника от того, что мы поместим его в воду? Маятнику придана идеально обтекаемая форма, и можно принять, что трение о воду равно нулю.

А10. Как изменится частота колебаний стального шарика, подвешенного на нити, если под ним поместить сильный магнит?

А11. Во сколько раз изменится период колебания маятника в ракете, стартующей с поверхности Земли вертикально вверх с ускорением 30 м/с^2?

Задачи средней трудности

В1. Два одинаковых полых шара с отверстиями наполнены один водой, другой песком и подвешены на нитях одинаковой длины. Шары отклонены на одинаковые углы. Будут ли у них одинаковыми периоды колебаний? Одинаково ли долго будут они колебаться?

В2. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают по вертикали до точки подвеса, второй раз отклоняют на небольшой угол. В каком из этих случаев шарик быстрее возвратится к начальному положению, если его отпустить? $t_1/t_2 = ?$

В3. Маятник представляет собой упругий шарик, прикрепленный к концу нити, имеющей длину l. При колебаниях шарик сталкивается с упругой массивной стенкой в моменты, когда нить занимает вертикальное положение. Найти период T колебаний маятника. Длительностью столкновения пренебречь.

В4. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника, на расстоянии $a = l/2$ от нее в стенку вбит гвоздь (рис. 3.11). Найти период T колебаний маятника.

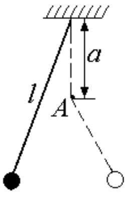


Рис. 3.11

В5. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны. Как изменится период колебании маятника при перенесении его с Земли на Луну?

B6. Математический маятник длиной 1,0 м колеблется с амплитудой 1,0 см. За какое время он пройдет путь в 1,0 см, если начнет движение из положения равновесия? За какое время он пройдет: а) первую половину этого пути; б) вторую половину этого пути?

B7. Один из маятников за некоторое время совершил n_1 = 10 колебаний. Другой за то же время совершил n_2 = 6 колебаний. Разность длин маятников Δl = 16 см. Найти длины маятников l_1 и l_2.

B8. Найти потенциальную энергию U математического маятника массы m = 200 г в положении, соответствующем углу отклонения нити от вертикали $\alpha = 10°$, если частота колебаний маятника ν = 0,5 с$^{-1}$. Считать потенциальную энергию маятника в положении равновесия равной нулю.

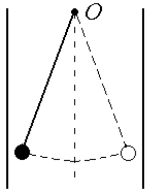


Рис. 3.12

B9. Металлический шарик на длинной нити помещен между обкладками конденсатора, как показано на рис. 3.12. Как изменится характер колебаний этого маятника, если шарик и пластины конденсатора зарядить? Маятник совершал колебания в плоскости, перпендикулярной к пластинам.

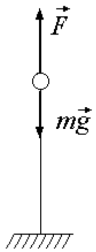


Рис. 3.13

B10. Шарик массы m = 0,10 г закреплен на нити, длина которой l велика по сравнению с размерами шарика. Шарику сообщают заряд q = 10 нКл и помещают в однородное электрическое поле с напряженностью E, направленной вверх. С каким периодом будет колебаться шарик, если сила, действующая на него со стороны электрического поля, больше силы тяжести ($F > mg$)? Какой должна быть напряженность поля E, чтобы шарик колебался с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ (рис. 3.13)?

B11. Шарик массой m, подвешенный на нити, совершает колебания. Как изменится частота колебаний, если шарику сообщить положительный заряд q и поместить его в однородное электрическое поле напряженностью E, силовые линии которого направлены вертикально вниз?

B12. В кабине лифта, находящегося на верхнем этаже небоскреба, раскачивается подвешенный на нити шарик. Нить привязана к гвоздю, вбитому в стену кабины. Трос лифта обрывается, и лифт начинает падать. Опишите движение шарика относительно лифта на протяжении всего движения лифта. Учтите при этом, что сила сопротивления воздуха быстро растет с увеличением скорости.

B13. Космический корабль при включении двигателей движется с некоторым ускорением. Каким образом, используя математический маятник, подвешенный в кабине корабля, можно определить ускорение корабля?

В14. Определить, на сколько отстанут маятниковые часы за сутки, если их поднять на высоту 5,0 км над поверхностью Земли.

В15. В некоторых старинных часах, предназначенных для работы на открытом воздухе, маятник изготовлялся в виде длинной трубки, заканчивающейся сосудом с ртутью. С какой целью использовалась такая конструкция маятника?

В16. При температуре $\theta_1 = 20$ °С период колебаний маятника $T_1 = 2,0$ с. Как изменится период колебаний, если температура возрастет до $\theta_2 =$ $= 30$ °С? Коэффициент линейного расширения материала маятника $\alpha =$ $= 1,85 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Задачи трудные

С1. Доказать, что период колебаний математического маятника увеличивается с увеличением максимального угла отклонения от положения равновесия.

С2. Груз на длинной нити может совершать колебания в вертикальной плоскости, отклоняясь на угол α от вертикали (математический маятник). Этот же груз может вращаться по окружности так, что описывает конус (конический маятник). В каком случае натяжение нити, отклоненной на угол α от вертикали, будет больше?

С3. Положительно заряженный шарик массой $m = 30$ г (математический маятник) совершает гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью. При этом сила электрического взаимодействия шарика с плоскостью $F = 0,10$ Н, а период его колебаний $T_1 = 2,0$ с. Затем шарик перезарядили так, что его заряд стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определите период гармонических колебаний шарика в новом состоянии. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

С4. Математический маятник (длина нити l) помещен в однородное электрическое поле напряженностью E. Грузу маятника сообщен заряд q. Определите заряд, при котором периоды колебаний маятника в поле и в отсутствие его будут одинаковы. Масса груза равна m.

С5. С каким ускорением a и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник за время $t =$ $= 2$ мин 30 с совершил $n = 100$ колебаний?

С6. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T = 1,0$ с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний этого маятника стал равным T_1 = 1,1 с? В каком направлении движется лифт?

С7. На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли?

С8. Как-то, гуляя, я невзначай забрался в горы. Мне, конечно, захотелось узнать, на какой я высоте. В моей сумке случайно оказались маятни-

ковые часы. Держа их в правой руке, я начал сравнивать их ход с ходом электронных часов на левом запястье. Ровно через час я обнаружил, что маятниковые часы отстали на пять секунд, и сразу понял, на какой высоте нахожусь. Попробуйте и вы узнать эту высоту. Маятник моих часов сделан из такого сплава, что длина его от температуры не зависит, а мои электронные часы, как известно, самые точные в мире. Радиус Земли R = 6400 км.

С9. В ракете, поднимающейся вверх с ускорением a, находится математический маятник. Объясните характер колебаний маятника в движущейся ракете и определите, на какой высоте период его колебаний станет таким же, как в ракете, стоящей на Земле.

С10. Часы с маятником на поверхности земли идут точно. В каком случае эти часы больше отстанут за сутки: если их поднять на высоту 200 м или же опустить в шахту на глубину 200 м? (Землю считать однородным шаром.)

С11. На сколько часы будут уходить вперед за сутки при t_0 = 0 °С, если они выверены при t = 20 °С, и материал, из которого сделан маятник, имеет коэффициент линейного расширения α = 0,000012 $К^{-1}$?

С12. При t_0 = 0 °С часы спешат в сутки на τ = 20 с. При какой температуре часы будут идти точно? Коэффициент линейного расширения материала маятника $\alpha = 1{,}9\cdot10^{-5}$ $К^{-1}$.

§ 4. Свободные, собственные и вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания

Свободные и собственные колебания

Тела или совокупности тел, которые сами по себе могут совершать колебания, называются колебательными системами. Примерами таких систем являются уже рассмотренные нами пружинный и математический маятники, а также вода в стакане, качели, вагон на рессорах, струна и т.д.

Колебания, совершающиеся в этих системах без воздействия внешних сил, называются *свободными.*

Заметим, что все свободные колебания рано или поздно прекращаются: их амплитуда постепенно убывает и в конце концов становится равной нулю. Это явление называется *затуханием* колебаний. Причина затухания заключается в том, что во всякой колебательной системе, кроме возвращающей силы, всегда действуют всякого рода силы трения, сопротивление воздуха и т.п., которые тормозят движение.

Но если мы мысленно устраним трение из колебательной системы, то колебания станут *незатухающими*. Незатухающие свободные колебания, которые происходили бы в колебательной системе в отсутствие трения, называются *собственными* колебаниями системы.

Мы с вами пока рассматривали именно собственные колебания пружинного и математического маятников.

Ясно, что каждое собственное колебание имеет свою *собственную частоту.* Например, пружинный маятник массой m при жесткости пружины k имеет собственную частоту $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденными называют колебания, вызванные периодически меняющейся внешней силой. Примером таких колебаний являются колебания фундамента, на котором установлен двигатель, колебания железнодорожных вагонов при ударах о стыки рельсов, колебания корпуса теплохода под действием периодических толчков со стороны двигателей или под действием набегающих волн, колебания мембраны в слуховой трубке телефона и т. д.

При свободных колебаниях период колебаний определяется только свойствами колебательной системы. При вынужденных колебаниях это не так. Только после первых толчков система начинает колебаться с собственной частотой, но эти собственные колебания постепенно затухают, и через некоторое время внешняя сила «навязывает» системе свою частоту. Например, у мембраны телефона есть собственная частота, но она колеблется не так, как «ей самой хочется», а так, как приказывает электромагнит.

2. Если частота внешней силы, действующей на колебательную систему, изменится, то изменится не только частота вынужденных колебаний, но и их амплитуда. Наибольшая амплитуда будет в том случае, когда частота внешней силы совпадает с собственной частотой системы. Каждый знает, как легко раскачать качели даже малой силой, если раскачивать их в такт собственным колебаниям. В этом случае каждый толчок помогает качелям раскачиваться, и только наличие вредных сопротивлений и особенности конструкции качелей мешают амплитуде расти беспредельно. Если же ударять по качелям с той же силой, но с другой частотой, то только часть толчков будет делаться вовремя, помогая качелям раскачиваться. Другая часть придется на те моменты, когда качели летят навстречу. Такие толчки не помогают, а мешают качелям раскачиваться. Ясно, что амплитуда колебаний будет меньше, чем в первом случае.

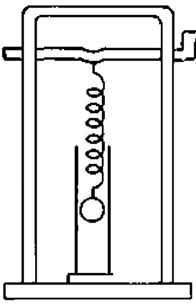


Рис. 4.1

Чтобы установить количественные закономерности (зависимость амплитуды от частоты), можно собрать установку, показанную на рис. 4.1. Она состоит из пружинного маятника, верхняя часть которого подвешена к коленчатому валику. Если вращать ручку валика с некоторой постоянной частотой, то грузик начнет совершать вынужденные колебания такой же частоты. Если вращать ее с другой частотой, то изменится не только частота колебаний груза, но и амплитуда этих колебаний. Измеряя каждый раз установившуюся амплитуду колебаний, мы сможем выяснить интересующую нас зависимость. Результаты одной серии опытов сведены в таблицу:

Частота внешней силы, Гц	1	2	3	4	5	6	7
Амплитуда колебаний, мм	2	4	10	40	15	8	5

Собственная частота колебаний этого маятника составляла 4 Гц. По данным этой таблицы построен график (рис. 4.2). На нем отчетливо видно, что при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой маятника амплитуда резко возрастает. *Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний в результате совпадения частоты внешнего воздействия с собственной частотой колебаний данной системы называется* ***резонансом***. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы называют кривой резонанса. Чем меньше трение (сопротивление движению), тем более острой получается кривая резонанса.

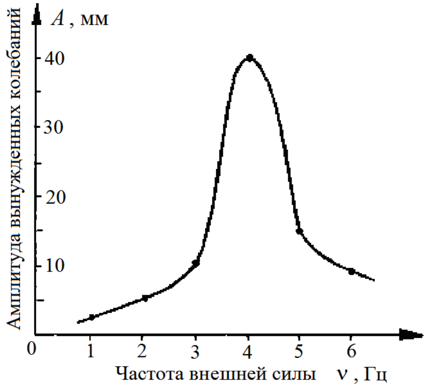


Рис. 4.2

Резонанс играет важную роль в технике, иногда вредную, иногда полезную. Бывали случаи, когда в результате резонанса разрушались самолеты, мосты и другие сооружения. Объясняется это тем, что отдельные части сооружений могут колебаться с определенными собственными частотами. Например, у самолетов могут возникать колебания крыльев, хвостового оперения, фюзеляжа и т.д. Если в результате работы двигателя самолета или других причин возникнут толчки, частота которых совпадет с одной из этих частот, они могут стать опасными. Чтобы избежать резонанса, выбирают такие размеры машин и их частей, при которых частота их собственных колебаний далека от частоты толчков. В Петербурге в начале прошлого столетия разрушился мост, по которому проходил эскадрон конницы ("Египетский мост" через Фонтанку обрушился в 1906 г., восстановлен в 1955 г.). Четкий шаг лошадей, отлично обученных парадному маршу, попал в резонанс с частотой собственных колебаний моста. Мост рухнул, хотя был рассчитан на нагрузку, в сто раз превышающую вес эскадрона. Подобные случаи были и в других странах, поэтому при переходе войск через мосты (и на верхних этажах зданий) им запрещено ходить "в ногу".

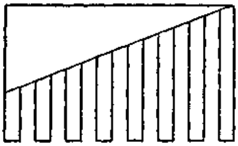


Рис. 4.3

Явление резонанса используется в частотометре. Он состоит из набора стальных пластинок, закрепленных с одного конца. Над каждой пластинкой указана частота ее собственных колебаний (рис. 4.3). Если поставить прибор на колеблющееся тело, то все пластинки начнут колебаться. Амплитуда колебаний одной из пластинок будет во много раз больше, чем у остальных. Ясно, что частота колебаний испытуемого тела совпадает с собственной частотой колебаний этой пластинки.

СТОП! Решите самостоятельно: А1–А6, В1, В2, В4, В5, С1.

Автоколебания

Незатухающие вынужденные колебания требуют для своего поддержания внешней периодической силы. Однако колебания в системе могут быть незатухающими и без действия внешней периодической силы. Если внутри системы, способной совершать свободные колебания, имеется источник энергии и сама система может регулировать поступление энергии к колеблющемуся телу для компенсации потерь на трение, то в ней могут возникнуть незатухающие колебания.

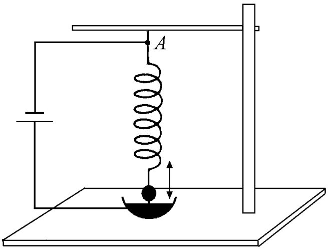


Рис. 4.4

Пример 1. Груз висит на пружине, нижний конец которой погружается при колебаниях в чашку с ртутью (рис. 4.4). Один полюс батарейки присоединен к пружине в точке *A*, другой – к чашке с ртутью. При опускании груза электрическая цепь замыкается, и по пружине проходит ток. Витки пружины благодаря магнитному полю тока начинают притягиваться друг к другу, пружина сжимается, груз получает толчок вверх.

Когда контакт разрывается, витки перестают притягиваться, груз опять опускается вниз, цепь замыкается, и весь процесс начинается снова.

Пример 2. Рассмотрим обыкновенные часы с маятником. Система обладает определенным запасом энергии – потенциальной энергией гири, поднятой над землей. Гиря приводит во вращение храповое колесо с косыми зубцами (рис. 4.5). С маятником скреплена дугообразная планка *ab* – анкер[1] с двумя выступами по краям. С помощью анкера маятник управляет вращением храпового колеса и связанной с ним стрелки часов. При этом энергия от гири порциями поступает к маятнику. В изображенном на рисунке положении зубец давит на скос выступа *b* анкера и толкает маятник влево. После прохождения маятником положения равновесия выступ *b* соскальзывает с зубца, но почти сразу же анкер внешним скосом выступа *a* упирается в другой зубец храповика, и маятник испытывает толчок в другую сторону. В результате дважды за период маятник получает энергию, сам открывая и закрывая доступ энергии от источника.

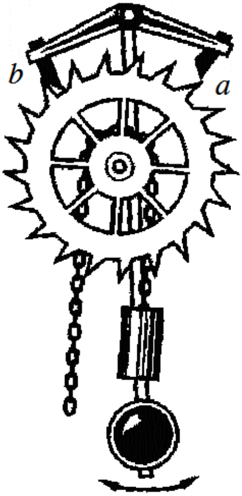


Рис. 4.5

Системы, подобные часам, в которых генерируются незатухающие колебания за счет поступления энергии от источника, называются *автоколебательными системами.*

Незатухающие колебания, которые могут существовать в системе без воздействия на нее внешних периодических сил, называются автоколебаниями.

В то время как частота вынужденных колебаний совпадает с частотой внешней силы, а амплитуда колебаний зависит от амплитуды этой силы, частота и амплитуда автоколебаний определяются свойствами самой системы. Автоколебания отличаются и от свободных колебаний тем, что, во-первых, они не затухают с течением времени и, во-вторых, их амплитуда не зависит от начального кратковременного воздействия («толчка»), которое возбуждает колебания.

---

[1] Немецкое слово *анкер* означает *якорь*.

К автоколебательным системам относятся электрический звонок с прерывателем, органная труба, свисток и многое другое. Наше сердце и легкие тоже можно рассматривать как автоколебательные системы.

СТОП! Решите самостоятельно: В3, В6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. Чтобы отвести качели с сидящим на них человеком на большой угол, необходимо приложить значительную силу. Почему же раскачать качели до такого же угла отклонения можно с помощью значительно меньшего усилия?

А2. Для того чтобы удержать в равновесии открытую дверь в вестибюле метро (дверь открывается в обе стороны и возвращается в положение равновесия пружинами), нужно приложить к ручке двери силу 50 Н. Можно ли открыть дверь силой 1 Н, приложенной к той же ручке? Трением в петлях двери можно пренебречь.

А3. Подвесьте на нити маленький груз и раскачайте его дуновением. Объясните явление.

А4. Чтобы помочь шоферу вывести автомобиль, застрявший в грязи, несколько человек «раскачивают» автомобиль, причем толчки, как правило, производятся по команде. Безразлично ли, через какие промежутки времени подавать команду?

А5. Если нести ведра на коромысле, то при определённом темпе ходьбы они начинают сильно раскачиваться. Чем объяснить это явление? Как уменьшить раскачивание вёдер?

А6. Почему в автобусе при определённой частоте оборотов двигателя начинают дребезжать стёкла?

А7. С какой целью все вибрирующие установки высотных зданий (электродвигатели, дизельные установки и др.) ставятся на специальные резиновые или металлические амортизаторы?

Задачи средней трудности

В1. Как раскачать стрелку заряженного электрометра, не имея заряженного тела? Проверьте на опыте и объясните явление.

В2. На некоторых участках дороги встречаются расположенные на приблизительно одинаковых расстояниях выбоины (это обычно отмечается соответствующим дорожным знаком). Водитель вел автомобиль по такому участку один раз порожним, а другой раз нагруженным. Сравнить скорости движения машины, при которых наступит резонансное раскачивание на рессорах.

В3. За счет какой энергии поддерживаются незатухающие колебания при качании на качелях? Можно ли назвать эту систему автоколебательной?

В4. Мальчик несет на коромысле ведра с водой, период собственных колебаний которых 1,6 с. При какой скорости движения вода начнет особенно сильно выплескиваться, если длина шага мальчика 60 см.

В5. При какой максимальной скорости движения поезда может возникнуть резонанс вертикальных колебаний вагона вследствие периодических ударов колёс на стыках рельсов, если длина рельса между стыками 25 м, а период собственных вертикальных колебаний вагона примерно равен 1,25 с?

В6. За счет какой энергии поддерживаются незатухающие колебания системы (см. рис. 4.4)?

Задача трудная

С1. Маленький шарик подвешен на нити длиной 1,0 м к потолку вагона. При какой скорости вагона шарик будет особенно сильно колебаться под действием ударов колес о стыки рельсов? Длина рельса 12,5 м.

§ 5. Нестандартные задачи на механические колебания

Основной вопрос, который возникает при рассмотрении той или иной колебательной системы – это определение *периода* колебаний. Мы рассмотрим два основных способа вычисления периода: *динамический метод* и *метод полной энергии.*

Динамический метод

Суть метода состоит в том, чтобы определить величину квазиупругой силы, возникающей в системе при отклонении колеблющегося тела от положения равновесия на малое смещение x: $F_x = -kx$. Самое главное – определить коэффициент k. Как только он найден, задача практически решена:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Покажем, как «работает» этот метод на конкретных примерах.

Задача 5.1. В жидкости плотностью $\rho_ж$ плавает цилиндр высотой h. Если цилиндр глубже погрузить в жидкость или, напротив, немного вытащить из жидкости, то после того как его отпустят, цилиндр начинает колебаться. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, $\rho_м$. Определите частоту колебаний цилиндра.

$\rho_ж$
$\rho_м$
h
$\nu = ?$

Решение. Условие плавания тела: сила Архимеда равна силе тяжести (рис. 5.1):

$$F_{выт} = F_т \quad \text{или} \quad \rho_ж S x_0 g = \rho_м S h g,$$

где S – площадь поперечного сечения цилиндра, x_0 – глубина его погружения.

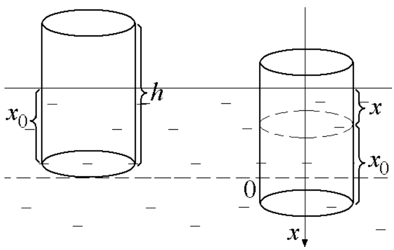


Рис. 5.1

Если увеличить глубину погружения цилиндра, то сила тяжести не будет компенсировать выталкивающую силу и второй закон Ньютона для цилиндра (в проекции на направление оси x, вдоль которой совершаются колебания) будет иметь вид

$$ma_x = -\rho_ж S g x, \qquad (1)$$

Таким образом, мы определили значение квазиупругой силы

$$F_x = -kx = -(\rho_ж S g)x.$$

Поскольку масса цилиндра $m = \rho_м V = \rho_м S h$, получим:

$$\rho_м S h a_x = -\rho_ж S g x \;\Rightarrow\; a_x + \frac{\rho_ж \cancel{S} g}{\rho_м \cancel{S} h}x = 0 \Rightarrow$$

$$a_x + \frac{\rho_ж g}{\rho_м h}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\rho_ж g}{\rho_м h}x = 0. \qquad (2)$$

Сравнивая уравнение (2) с известным нам уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, получаем, что

$$\omega^2 = \frac{\rho_ж g}{\rho_м h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\rho_ж g}{\rho_м h}} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho_ж g}{\rho_м h}}.$$

Задача решена.

Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho_ж g}{\rho_м h}}$.

СТОП! Решите самостоятельно: B1, B2, C1, C2, D1.

Задача 5.2. На два быстро вращающихся одинаковых валика положили горизонтально доску с массой m (рис. 5.2). Расстояние между осями валиков равно L, коэффициент трения между доской и валиками равен μ. Какое движение будет совершать доска? Как изменится ответ, если оба валика изменят направление вращения?

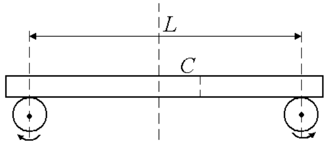


Рис. 5.2

m	
L	
μ	
$T = ?$	

Решение. Очевидно, если центр доски расположен на равных расстояниях от обоих валиков, то доска будет оставаться в равновесии. В любом другом случае доска придет в движение. Поскольку в условии говорится о *быстром* вращении валиков, между ними и доской происходит проскальзывание, и сила трения скольжения, действующая на доску со стороны каждого из валиков, направлена внутрь (рис. 5.3).

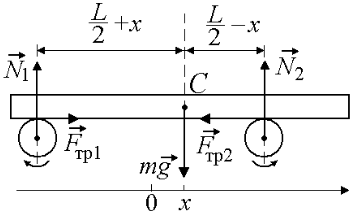


Рис. 5.3

Из второго закона Ньютона и формулы для силы трения скольжения следует, что

$$ma_x = F_{тр1} - F_{тр2} = \mu(N_1 - N_2),$$

где N_1 и N_2 – силы нормальной реакции первого и второго валиков соответственно.

Найдем силы N_1 и N_2. Для этого запишем второе условие равновесия твердого тела (условие равенства нулю моментов всех сил, действующих на тело относительно любой оси вращения). Это условие выполняется, так как хотя доска движется ускоренно вдоль оси x, но при этом не вращается.

На доску действуют пять сил: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $m\vec{g}$, $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$. Запишем их моменты относительно точки C. Напомним, что *моментом силы* относительно оси вращения называется произведение величины силы на плечо.

Плечо – это расстояние от точки приложения силы до направления действия силы.

Момент берется со знаком «плюс», если данная сила вращает тело вокруг данной оси по часовой стрелке, и со знаком «минус», если против.

Отметим, что плечи сил $m\vec{g}$, $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ равны нулю, так как направления действия этих сил проходят через точку C (см. рис. 5.3). Плечо силы N_1 равно $(L/2 + x)$, а плечо силы N_2 равно $(L/2 - x)$. Отсюда

$$N_1(L/2 + x) - N_2\,(L/2 - x) = 0. \quad (1)$$

Поскольку в вертикальном направлении ускорение равно нулю, то

$$N_1 + N_2 - mg = 0. \quad (2)$$

Из (2) находим $N_2 = mg - N_1$ и подставим в (1):

$$N_1(L/2 + x) - (mg - N_1)(L/2 - x) = 0 \;\Rightarrow$$

$$N_1\frac{L}{2} + \cancel{N_1 x} - mg\frac{L}{2} + mgx + N_1\frac{L}{2} - \cancel{N_1 x} = 0 \;\Rightarrow$$

$$N_1 L = mg\left(\frac{L}{2} - x\right) \Rightarrow N_1 = mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right),$$

тогда

$$N_2 = mg - N_1 = mg - mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right).$$

Теперь запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x, подставив в него найденные значения N_1 и N_2:

$$ma_x = \mu\left[mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) - mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right)\right] \Rightarrow ma_x = \mu mg\left(-\frac{2x}{L}\right) \Rightarrow$$

$$ma_x = -\frac{2\mu mg}{L}x.$$

Мы записали выражение для нашей квазиупругой силы $F_x = -kx$. Дальше все просто:

$$a_x + \frac{2\mu g}{L} x = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2\mu g}{L} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}},$$

т.е. доска будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}}.$$

Читатель: А что будет, если валики будут вращаться в обратную сторону?

Автор: Если каждый валик станет вращаться в обратную сторону, то обе силы трения будут направлены «наружу». Смещение доски от положения равновесия увеличит (за счет перераспределения нагрузки на валики) как раз ту силу трения, которая действует в сторону смещения (и уменьшит силу трения о другой валик). Поэтому вместо возвращающей силы возникает сила, уводящая доску еще дальше от положения равновесия. Равновесие в этом случае неустойчиво, колебаний вокруг него не возникает. Доска будет сброшена с валиков.

СТОП! Решите самостоятельно: С3, D2.

Задача 5.3. Два одинаковых груза массой m, скрепленные пружинами, как показано на рис. 5.4, лежат на абсолютно гладком горизонтальном столе. Пружины растянуты с силой F. Грузы смещают в направлении, перпендикулярном длине пружин, на одинаковое малое расстояние x в одну сторону от положения равновесия. Определить период колебаний грузов.

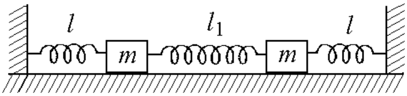


Рис. 5.4

Дано
m
l
F
$T = ?$

Решение. Рассмотрим малое смещение грузов на расстояние x вдоль оси X (рис. 5.5).

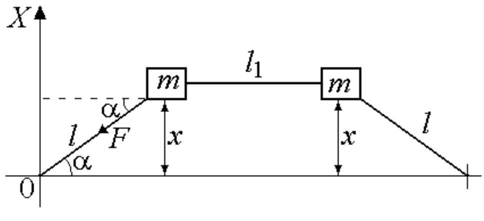


Рис. 5.5

Поскольку x мало, можно считать, что величина силы F увеличилась незначительно. В проекции на ось X запишем второй закон Ньютона для левого тела:

$$ma_x = -F\sin\alpha = -F\frac{x}{l} \Rightarrow a_x = -\frac{F}{ml}x.$$

Следовательно, $\omega^2 = \dfrac{F}{ml}$, отсюда $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{F}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{F}}$.

СТОП! Решите самостоятельно: В3, С4.

Задача 5.4. Определить период малых колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E = 3\cdot10^4$ В/м. Полярную молекулу схематически представить в виде «гантельки» длиной λ ($\lambda = 1\cdot10^{-8}$ см), на концах которой находятся равные точечные массы m ($m = 4\cdot10^{-24}$ г), несущие заряды $+q$ и $-q$ соответственно ($q = 15{,}7\cdot10^{-20}$ Кл).

$E = 3\cdot10^4$ В/м
$\lambda = 1\cdot10^{-8}$ см
$m = 4\cdot10^{-24}$ г
$q = 15{,}7\cdot10^{-20}$ Кл

$T = ?$

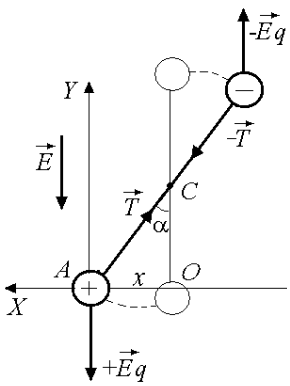


Рис. 5.6

Решение. В силу симметрии молекулы оба атома, составляющие молекулу, будут совершать колебания относительно центра масс системы – точки C (рис. 5.6). Оба атома находятся в совершенно одинаковых условиях, поэтому достаточно рассмотреть движение одного из них.

Пусть нижний атом совершил малое смещение x от положения равновесия и оказался в точке A. Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси X и Y:

X: $-T\sin\alpha = ma_x$, (1)

Y: $T\cos\alpha - Eq = 0$. (2)

Поскольку $x \ll \lambda$, то $\alpha \to 0$, $\cos\alpha \approx 1$ и $T \approx Eq$. Из ΔAOC имеем

$$\sin\alpha = \frac{x}{AC} = \frac{x}{\lambda/2} = \frac{2x}{\lambda}.$$

Подставляя в (1) значения T и $\sin\alpha$, получим

$$-Eq\frac{2x}{\lambda}=ma_x \;\Rightarrow\; a_x+\frac{2Eq}{m\lambda}x=0 \;\Rightarrow\; \omega^2=\frac{2Eq}{m\lambda} \;\Rightarrow$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m\lambda}{2Eq}}\,.$$

Подставим численные значения

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m\lambda}{2Eq}}=2\pi\sqrt{\frac{4\cdot10^{-27}\ \text{кг}\cdot1\cdot10^{-10}\ \text{м}}{2\cdot3\cdot10^{4}\ \text{В/м}\cdot15{,}7\cdot10^{-20}\ \text{Кл}}}\approx4\cdot10^{-11}\ \text{с}.$$

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m\lambda}{2Eq}}\approx4\cdot10^{-11}$ с.

СТОП! Решите самостоятельно: С5, D3–D5.

Задача 5.5. Определить период малых колебаний маленького кубика массой m в сферической чаше радиусом R. Трения нет.

m	
R	
$T = ?$	

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси X и Y (рис. 5.7). Как и раньше в таких задачах, движение по окружности при малых углах α можно заменить на движение по прямой – оси X. Тогда

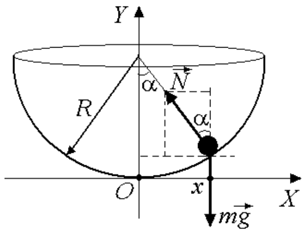


Рис. 5.7

$$\begin{cases} N-mg\cos\alpha=0, & (1)\\ -N\sin\alpha=ma_x. & (2)\end{cases}$$

Учтем, что $N\approx mg$ (так как $\cos\alpha\approx1$) и $\sin\alpha=\dfrac{x}{R}$. Подставим значения N и $\sin\alpha$ в (2) и получим

$$-mg\frac{x}{R}=ma_x\Rightarrow a_x+\frac{g}{R}x=0\,.$$

Следовательно,

$$\omega^2=\frac{g}{R}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Заметим, что период получился таким же, как и для математического маятника с длиной $l = R$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

СТОП! Решите самостоятельно: B4–B6, D6.

Метод полной энергии

Пусть имеется некоторая колебательная система. Пусть смещение колеблющегося тела от положения равновесия равно x. Тогда скорость тела в момент времени t: $v_x = x'(t)$.

Допустим, что нам удалось записать выражение для полной механической энергии системы в виде

$$E = Ax^2 + B(x')^2. \qquad (5.1)$$

Тогда циклическая частота ω такой системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{B}}\,. \qquad (5.2)$$

Докажем наше утверждение.

Если в системе отсутствует трение, то полная механическая энергия системы остается постоянной: $E(t) = \text{const}$, а значит, производная энергии по времени равна нулю: $E'(t) = 0$.

Продифференцируем выражение (5.1) и приравняем его производную к нулю:

$$E'(t) = (Ax^2(t) + B(x'(t)^2)' = A\cdot 2x(t)x'(t) + B\cdot 2\cdot x'(t)\cdot x''(t) = 0 \Rightarrow$$

$$2\cdot x'(t)\cdot(Ax(t) + Bx''(t)) = 0 \;\Rightarrow\; x''(t) + \frac{A}{B}x(t) = 0.$$

Мы получили уже хорошо знакомое нам уравнение, решением которого является функция $x(t) = a\cos(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$.

Наше утверждение доказано.

Попробуем применить формулы (5.1) и (5.2) для решения задач.

Задача 5.6. Плоская Т-образная конструкция из трёх небольших шариков может свободно поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси O (рис. 5.8) (плоскость рисунка перпендикулярна оси O). Длина каждой спицы L, а масса пренебрежимо мала по сравнению с массой шариков. Определите период малых колебаний конструкции.

L
$T = ?$

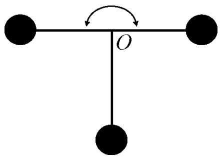


Рис. 5.8

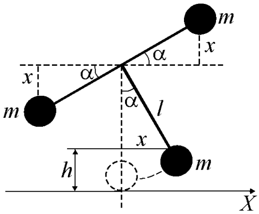


Рис. 5.9

Решение. Пусть масса каждого шарика равна m, и вся система повернулась на малый угол α. Тогда левый шарик опустился на x вниз, а правый поднялся на x вверх, следовательно, общая потенциальная энергия этих двух шариков не изменилась.

Нижний шарик поднялся вверх на величину $h = l(1 - \cos\alpha)$. С учетом того, что при малых α $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, получим

$$h = l\frac{\alpha^2}{2} = l \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 .$$

Значит, если потенциальную энергию в положении равновесия считать равной нулю, то при отклонении системы на малый угол α потенциальная энергия будет равна

$$П = mgh = mgl \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{mgx^2}{l} .$$

Скорости у всех трех шариков одинаковы и равны $\upsilon_x = x'(t)$. Тогда кинетическая энергия системы равна

$$K = 3\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{3}{2}m(x'(t))^2 .$$

Находим полную энергию:

$$E = П + K = \frac{mg}{2l}x^2 + \frac{3m}{2}(x'(t))^2 .$$

Сравнивая полученную формулу с (5.1), получим

$$A = \frac{mg}{2l}, \quad B = \frac{3m}{2}.$$

Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{mg/2l}{3m/2}} = \sqrt{\frac{g}{3l}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3l}{g}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3l}{g}}$.

СТОП! Решите самостоятельно: C6, C7, D7.

Задача 5.7. Два математических маятника длиной l каждый связаны невесомой пружиной с жесткостью k. На рис. 5.10 показано положение равновесия системы. Маятники отклоняют в плоскости рисунка на одинаковые углы и отпускают. Определите период T малых колебаний связанных маятников, если: а) маятники отклонены в одну сторону (колебания в одной фазе); б) маятники отклонены в противоположные стороны (колебания в противофазе). Масса каждого шарика равна m.

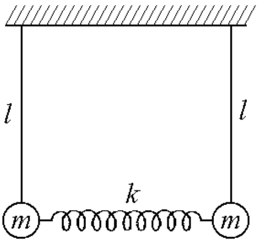


Рис. 5.10

m
k
l
$T = ?$

Решение. а) Пружина не деформируется при колебаниях, так что сила упругости не возникает (связь между маятниками «не работает») (рис. 5.11,*а*). Поэтому оба маятника колеблются независимо друг от друга с одним и тем же периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

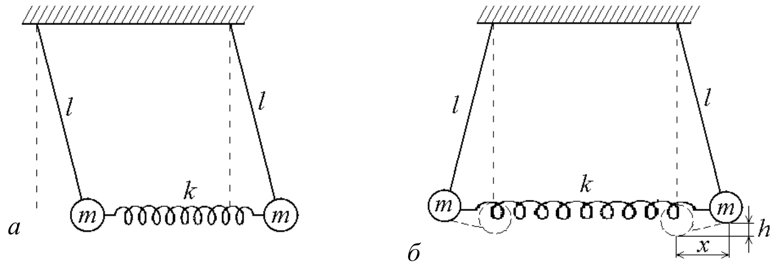


Рис. 5.11

б) Во втором случае (рис. 5.11,*б*) каждый шар отклонили на расстояние x, следовательно, пружина удлинилась на $2x$, и ее потенциальная энергия стала равна

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{k}{2}(2x)^2 = 2kx^2 .$$

Каждый шарик поднялся на высоту

$$h = l(1 - \cos\alpha) \approx l\frac{\alpha^2}{2} = \frac{l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{x^2}{2l} .$$

Потенциальная энергия шариков в поле силы тяжести стала равна

$$\Pi_{\text{т}} = 2mgh = 2mg\left(\frac{x^2}{2l}\right) = \frac{mgx^2}{l} .$$

Кроме того, каждый шарик приобрел скорость $\upsilon_x = x'$, а значит, и кинетическую энергию. Общая кинетическая энергия системы стала равна

$$K = 2\cdot\frac{m\upsilon_x^2}{2} = 2\cdot\frac{m(x')^2}{2} = m(x')^2 .$$

Находим полную механическую энергию системы

$$E = \Pi_{\text{пр}} + \Pi_{\text{т}} + K = 2kx^2 + \frac{mgx^2}{l} + m(x')^2 \Rightarrow$$

$$E = \left(2k + \frac{mg}{l}\right)x^2 + m(x')^2 .$$

Следовательно, $A = 2k + \dfrac{mg}{l}$, $B = m$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{2k + mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2k}{m} + \dfrac{g}{l}}} = 2\pi\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)^{-1/2} .$$

Ответ: $T = 2\pi\left(\dfrac{2k}{m} + \dfrac{g}{l}\right)^{-1/2}$.

СТОП! Решите самостоятельно: С8, С9, С10.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи средней трудности

B1. Определить отношение частот колебаний для трех молекул: водорода, дейтерия и трития.

Примечание. Равновесному положению двух протонов в молекуле отвечает определенное расстояние между ними. Если эти два протона несколько сблизить или удалить от равновесного положения, то возникает сила, возвращающая их в это положение. Она пропорциональна величине отклонения.

B2. Однажды, путешествуя вблизи Северного полюса, я очутился один на отколовшейся плоской льдине площадью S = 5 м^2. От огорчения я подпрыгнул, и льдина вместе со мной начала колебаться, совершая одно колебание в секунду. Это меня сразу успокоило: зная свою массу (m = 80 кг), я тут же определил, что льдина достаточно толстая. Какова ее толщина?

B3. Закрепленная на концах струна растянута с силой f. К середине струны прикреплен точечный груз массы m (рис. 5.12). Определить период малых колебаний прикрепленного груза. (Массой струны пренебречь. Силу тяжести не учитывать.)

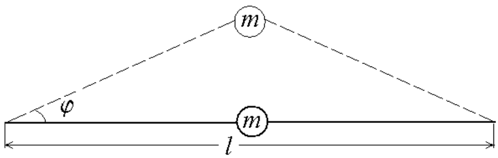


Рис. 5.12

B4. Тело находится в некоторой точке A на внутренней поверхности сферы. В каком случае оно быстрее достигнет нижней точки сферы B: если будет скользить по поверхности сферы или по наклонной плоскости AB? Трение в обоих случаях пренебрежимо мало, начальная скорость тела равна нулю, расстояние AB много меньше радиуса сферы.

B5. Как изменится период колебаний кубика в чаше, если на чашу кроме силы тяжести будет действовать сила F, направленная вертикально вверх? Масса чаши M много больше массы m кубика.

B6. Как изменится период колебаний кубика в чаше, если чаша стоит на гладкой горизонтальной поверхности, по которой она может перемещаться без трения?

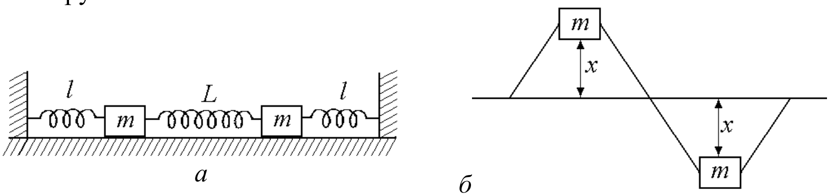
Задачи трудные

С1. Санки длиной $l = 80$ см скользят горизонтально по снегу и останавливаются, частично выехав на асфальт. Определите время торможения, если трение о снег отсутствует, а коэффициент трения об асфальт $\mu = 0{,}4$. Масса санок распределена по их длине равномерно.

С2. Когда я наконец добрался по льду до самого Северного полюса, меня ожидало открытие: из глубокого колодца торчала земная ось! Я ухватился за нее, как за шест, и быстро заскользил вниз — ось оказалась очень гладкой. К счастью, я не расшибся: колодец оказался без дна, и скоро я вынырнул вверх ногами на Южном полюсе! Жестокий антарктический мороз не помешал мне тут же вычислить время t, которое понадобилось для такого удивительного путешествия с одного полюса на другой, а также скорость υ, с которой я пролетал через центр Земли. Определите их и вы, считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха.

С3. Два заряда $+Q$ неподвижны и расположены на расстоянии a друг от друга. Вдоль оси, соединяющей эти заряды, может перемещаться третий заряд $+q$, обладающий массой m. Считая амплитуду колебаний малой, определить период колебаний заряда $+q$.

С4. Грузы массой m, скрепленные пружинами, как показано на рис. 5.13,*а*, лежат на абсолютно гладком горизонтальном столе. Пружины растянуты с силой F. Грузы смещают на одинаковое малое расстояние x в направлении, перпендикулярном длине пружин, в разные стороны от положения равновесия и отпускают (рис. 5.13,*б*). Определить период колебаний грузов.



а *б*

Рис. 5.13

С5. На концах невесомого стержня длиной $d = 1{,}0$ м укреплены два маленьких шарика с массами $m = 1{,}0$ г. Стержень подвешен на шарнире так, что может вращаться без трения около вертикальной оси, проходящей через его середину. На одной прямой со стержнем укреплены два больших шара с массами $M = 20$ кг. Расстояние между центрами большого и малого шаров $l = 16$ см (рис. 5.14). Вычислить период малых колебаний описанного крутильного маятника.

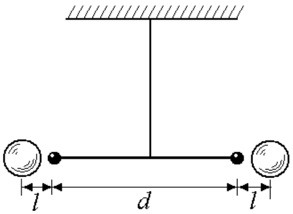


Рис. 5.14

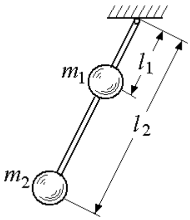


Рис. 5.15

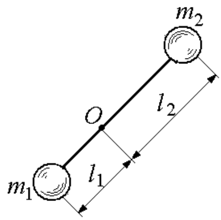


Рис 5.16

С6. Найдите период T малых колебаний изображенного на рис. 5.15 маятника. Массой стержня можно пренебречь. Воспользоваться методом полной энергии.

С7. Невесомый стержень с закрепленными на нем грузами (рис. 5.16) может вращаться вокруг горизонтальной оси O. Определите период T его малых колебаний.

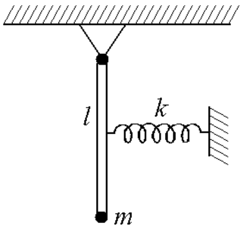


Рис. 5.17

С8. Во сколько раз изменится частота малых колебаний небольшого груза на легком стержне (рис. 5.17), если к середине стержня прикрепить горизонтальную пружину с жесткостью k? В равновесии стержень занимает вертикальное положение.

С9. Найдите период колебаний жидкости в U-образном сосуде постоянного сечения. Длина всего столба жидкости равна $2H$.

С10. В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Найдите период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда $S = 0{,}30$ см^2, а масса ртути $m =$ $= 484$ г. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

Задачи очень трудные

D1. Тонкое проволочное кольцо радиуса R имеет электрический заряд $+Q$. Как будет двигаться точечное тело массы m, имеющее заряд $-q$, если в начальный момент времени оно покоилось в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $x << R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

D2. Два плоских слоя толщины d каждый равномерно заряжены объемным зарядом с плотностями $-\rho$ и $+\rho$. Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью υ, направленной под углом α к поверхности слоя (рис. 5.18). Определить:

а) при какой скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой?

б) через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?

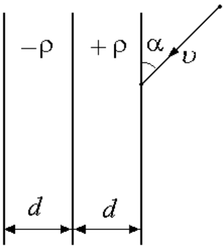


Рис. 5.18

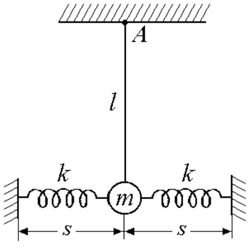


Рис. 5.19

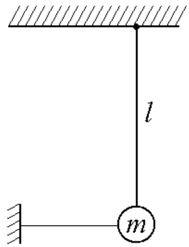


Рис. 5.20

D3. **Комбинированный маятник**. Рассмотрим маятник, изображенный на рис. 5.19. Легкий стержень длины l подвешен на оси в точке A таким образом, что он может двигаться в плоскости чертежа. К грузу массы m на конце стержня прикреплены одинаковые пружины жесткости k, расположенные горизонтально в этой же плоскости. Другие концы пружин закреплены неподвижно. Найти частоту малых собственных колебаний такого маятника в отсутствие трения. Массами стержня и пружин пренебречь.

D4. Несимметричный маятник. С одной стороны к грузу прикреплена гибкая резинка, проявляющая упругие свойства только при растяжении (рис. 5.20). Когда маятник расположен вертикально, резинка не натянута. Смещение груза вправо приводит к растяжению резинки, которое удовлетворяет закону Гука: $F = -kx$. При смещении груза влево резинка просто провисает. Найти период собственных колебаний такого несимметричного маятника.

D5. Найдите частоту малых колебаний математического маятника относительно его нижнего положения равновесия, если непосредственно под равновесным положением шарика на расстоянии h от него закреплен заряд Q. Длина нити l, масса шарика m, заряд q.

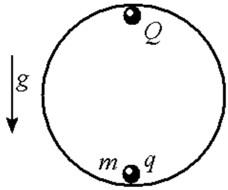


Рис. 5.21

D6. Найдите период малых колебаний тела массы m, заряд которого q, внутри гладкой сферы радиуса R, если в верхней точке сферы закреплен заряд Q (рис. 5.21). Заряды q и Q разных знаков: $qQ < 0$.

D7. Обруч массы m и радиуса r может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиуса R (рис. 5.22). Определить период колебаний обруча, считая угол φ малым.

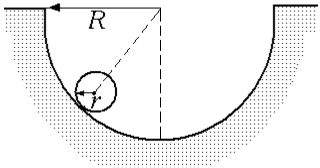


Рис. 5.22