Всероссийская школа математики и физики «Авангард»

Е. Н. ФИЛАТОВ

Ф И З И К А

11

Экспериментальный учебник

Часть 3

Механика: повторяем и углубляем

МОСКВА – 2006

Всероссийская школа математики и физики «Авангард»

Е. Н. ФИЛАТОВ

ФИЗИКА

11

Экспериментальный учебник

Часть 3

Механика: повторяем и углубляем

МОСКВА – 2006

Филатов Е.Н. **Физика–11. Часть 3. Механика: повторяем и углубляем**. Экспериментальный учебник для профильных физико-математических классов. – М.: ВШМФ «Авангард», 2006. – 400 с.

Эта часть является как бы заключительным аккордом авторского курса общей физики для 7–11 классов. Не случайно именно механика дается в самом конце курса непосредственно перед сдачей Единого государственного экзамена.

В этой книге, с одной стороны, повторяются основные законы механики, а с другой – приводятся методы решения наиболее сложных задач, не вошедших в курс механики для 9-го класса. Такое построение курса не случайно: ведь большинство задач ЕГЭ прямо или косвенно связаны с механикой, а именно механика является одной из наиболее сложных для понимания тем курса школьной физики.

Кроме того, именно к концу 11-го класса учащиеся наилучшим образом владеют аппаратом элементарной математики, в то время как в 9-м классе их познания в математике еще недостаточны для полноценного усвоения курса механики.

Автор не сомневается, что при успешном усвоении материала этой книги шансы ее читателей на поступление в выбранный ими вуз серьезно возрастут.

Итак, повторяем и углубляем *механику*!

© *Филатов Е.Н., 2006*
© *Всероссийская школа математики и физики «Авангард», 2006*

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

Механическим движением *называется изменение положения тела относительно других тел с течением времени.*

Если это положение с течением времени не меняется, значит, тело относительно других тел (тела) не движется. Например, если два автомобиля едут по шоссе друг за другом так, что расстояние между ними с течением времени не меняется, значит, они *покоятся относительно друг друга.*

А если дерево, растущее у дороги, удаляется относительно проехавшего мимо мотоциклиста, значит, *дерево движется относительно мотоциклиста.*

Траекторией называется линия, вдоль которой движется тело.

Например, линия, прочерченная мелом на доске, – это траектория кусочка мела; светящийся след, оставленный в ночном небе метеоритом, – это траектория метеорита; ломаная линия, по которой движется молекула газа, – это траектория молекулы газа.

Путь – это расстояние, пройденное телом, отсчитываемое вдоль траектории.

Путь – величина неотрицательная и измеряется в единицах длины: километрах (км), метрах (м), сантиметрах (см), миллиметрах (мм) и т.д.

Кинематика – это часть механики, которая *изучает движение тел без исследования причин*, вызывающих это движение. Такой подход позволяет выявить особенности различных видов движения и рассмотреть их физические характеристики. Однако более полное понимание движения возможно только при анализе взаимодействия движущегося тела с другими телами, что является предметом ***динамики***.

Движение происходит как в пространстве, так и во времени. Описать движение тела означает указать для каждого момента времени положение тела в пространстве и его скорость. Основная задача кинематики заключается в том, чтобы, зная положение тела в некоторый момент времени, а также законы движения, определить его положение в любой последующий момент времени.

Система отсчета. Для описания движения изучаемого тела (материальной точки) необходимо выбрать другое тело, называемое телом отсчета, а чтобы отмечать моменты времени, требуются часы. Однако выбор тела отсчета еще не дает возможность полностью описать движение материальной точки. Например, чтобы знать положение ракеты в воздухе в любой момент времени, недостаточно условиться рассматривать ее движение, положим, относительно Земли. Необходимо как-то математически описать движение, т.е. задать величины, позволяющие однозначно определить движение ракеты. Для этого с телом отсчета связывают систему координат. Таким образом, координатная система, связанная с каким-либо реальным телом (телом отсчета), а также часы для отсчета времени образуют систему отсчета, относительно которой и рассматривается движение материальной точки.

Следует отчетливо понимать различие между телом отсчета и системой координат. *Тело отсчета образуют реальные тела*, в то время как *система координат является математической абстракцией*. Обычно выбор системы координат определяется соображениями удобства. Мы знакомы с декартовой прямоугольной системой координат. С ней мы будем работать и в дальнейшем. Но существует полярные, сферические и другие системы координат, удобные для рассмотрения определенного класса задач.

Способы описания движения. В механике используют три способа аналитического описания движения материальной точки в пространстве (мы ограничимся движением точки на плоскости).

Первый способ – *векторный*. Он основан на том, что положение материальной точки A в момент времени t определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, идущим из начала координат к движущейся точке A (рис. 1.1,*а*). Кривая, которую при движении описывает точка A и, следовательно, конец радиуса-вектора $\vec{r}$, называется *траекторией*. Понятно, что траектория имеет различный вид в разных системах координат.

Второй способ описания – *координатный*. Положение точки на плоскости в момент времени t_1 определяется заданием двух координат x_1 и y_1 (рис. 1.1,*б*). При движении точки A ее координаты изменяются во времени: $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Если эти функции известны, то они определяют положение точки на плоскости в любой момент времени. Зависимость $x(t)$ называют законом движения точки по оси $0x$, $y(t)$ – законом движения по оси $0y$.

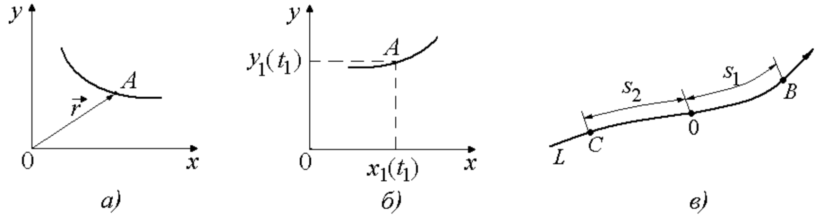


Рис. 1.1

Легко видеть, что между векторным и координатным способом существует простая связь. Как известно, любой вектор можно задать его проекциями на оси координат. В нашем случае проекции радиуса-вектора $\vec{r}$ совпадают с координатами точки. Если заданы функции $x(t)$ и $y(t)$, то, очевидно, известно положение радиуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называют векторным законом движения точки.

Третий способ описания получил название "*естественного*" или "траекторного". Этот способ применяют тогда, когда траектория точки известна заранее. Пусть задана линия L, по которой происходит движение (рис. 1.1,*в*). Укажем на этой линии *точку начала отсчета* (или *нулевую*) – точку 0 и зададим стрелкой положительное направление. Тогда противоположное направление будет считаться отрицательным.

Линию L с выбранным положительным направлением и точкой начала отсчета будем называть *координатной осью*. Положение точки на линии L будем задавать числом, которое будем называть *координатой точки.*

Координата точки на координатной оси равна расстоянию от начала координат до данной точки, отсчитанному вдоль координатной оси и взятому со знаком «плюс», если точка удалена от начала координат в положительном направлении, и со знаком «минус», если точка удалена от начала координат в отрицательном направлении. Например, координата точки B на рис. 1.1,*в* равна $+s_1$: $x_B = +s_1$, координата точки C равна $-s_2$: $x_C = -s_2$.

Если известна зависимость координаты точки от времени $x(t)$, то мы знаем положение точки в любой момент времени.

§ 2. СРЕДНЯЯ ПУТЕВАЯ СКОРОСТЬ. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Средней путевой скоростью *называется физическая величина, равная отношению величины пройденного телом пути ко времени, в течение которого этот путь был пройден.*

$$\text{СРЕДНЯЯ ПУТЕВАЯ СКОРОСТЬ} = \frac{\text{ПРОЙДЕННЫЙ ПУТЬ}}{\text{ВРЕМЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ПУТИ}}$$

Если обозначить путь буквой s, время – буквой t, а среднюю путевую скорость буквой υ, получим следующую формулу:

$$\upsilon = \frac{s}{t}\,. \tag{2.1}$$

Задача 2.1. Два легкоатлета совершали разминку. Первый легкоатлет первую треть всего пути пробежал со скоростью $\upsilon_1 = 10{,}0$ км/ч, а остальную часть пути шел со скоростью $\upsilon_2 = 5{,}0$ км/ч. Второй легкоатлет первую треть всего времени разминки бежал со скоростью $u_1 = 10{,}0$ км/ч, а остальное время шел со скоростью $u_2 = 5{,}0$ км/ч. Определите среднюю путевую скорость каждого легкоатлета.

$\upsilon_1 = 10{,}0$ км/ч,
$\upsilon_2 = 5{,}0$ км/ч,
$u_1 = 10{,}0$ км/ч
$u_2 = 5{,}0$ км/ч

$\upsilon_{ср} = ?$ $u_{ср} = ?$

Решение.

1. Пусть s – весь путь первого легкоатлета, тогда время его движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s/3}{\upsilon} + \frac{2s/3}{\upsilon} = \frac{s}{3}\left(\frac{1}{\upsilon_1} + \frac{2}{\upsilon_2}\right) = \frac{s(\upsilon_2 + 2\upsilon_1)}{3\upsilon_1\upsilon_2}\,.$$

Отсюда $$\upsilon_{ср} = \frac{s}{t} = s : \frac{s(\upsilon_2 + 2\upsilon_1)}{3\upsilon_1\upsilon_2} = \frac{3\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_2 + 2\upsilon_1} = \frac{3\cdot 10{,}0\cdot 5{,}0}{5{,}0 + 2\cdot 10{,}0} \approx 6{,}0 \text{ км/ч}.$$

2. Пусть t – все время движения второго легкоатлета, тогда пройденный им путь

$$s = s_1 + s_2 = u_1 \cdot \frac{t}{3} + u_2 \cdot \frac{2t}{3} = \frac{t}{3}(u_1 + 2u_2).$$

$$u_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{t}{3}(u_1 + 2u_2) : t = \frac{u_1 + 2u_2}{3} = \frac{10{,}0 + 2 \cdot 5{,}0}{3} \approx 6{,}7 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $\upsilon_{\text{ср}} = 6{,}0$ км/ч; $u_{\text{ср}} = 6{,}7$ км/ч.

СТОП! Решите самостоятельно: А1, А2, В2, С1.

Движение называется *равномерным*, если за любые равные промежутки времени тело проходит одинаковые пути.

Путевой скоростью равномерного движения называется величина, равная отношению пути s ко времени t, за которое этот путь был пройден

$$\upsilon = \frac{s}{t}. \qquad (2.2)$$

Если тело начало равномерное движение по заданной траектории из координаты x_0 в момент времени t_0 с путевой скоростью υ, то его координата x в момент времени $t > t_0$ будет равна

$$x(t) = x_0 + \upsilon(t - t_0), \qquad (2.3)$$

если движение происходит в положительном направлении, и

$$x(t) = x_0 - \upsilon(t - t_0), \qquad (2.4)$$

если движение происходит в отрицательном направлении.

Задача 2.2. Из одного города в другой вышел пешеход. Когда он прошел путь $s_1 = 27$ км, вслед ему выехал автомобиль со скоростью, в k раз большей, чем шел пешеход. Второго города они достигли одновременно. Каково расстояние s_x между городами?

Разобрать случай, когда $k = 10$. Построить график $s(t)$ для обоих тел.

Дано	
$s_1 = 27$ км $k = 10$	***Решение***. Запишем уравнения движения для пешехода и автомобиля:
$s_x = ?$	$x_1(t) = \upsilon_1 t; \qquad x_2(t) = \upsilon_2(t - \tau),$

где υ_1 – скорость пешехода; υ_2 – скорость автомобиля; τ – момент отправления автомобиля. По условию задачи

$$s_1 = \upsilon_1 \tau. \qquad (1)$$

В момент прибытия в пункт назначения $t_в$ координаты пешехода и автомобиля равны

$$v_1 t_в = v_2(t_в - \tau). \qquad (2)$$

Скорость автомобиля в k раз больше скорости пешехода:

$$v_2 = kv_1. \qquad (3)$$

Искомая величина s_x равна

$$s_x = v_1 t_в. \qquad (4)$$

Решим систему уравнений (1)–(4). Из (1) выделим $\tau = \dfrac{s_1}{v_в}$ и подставим τ и $v_2 = kv_1$ в (2), получим

$$v_1 t_в = kv_1\left(t_в - \frac{s_1}{v_1}\right) \Rightarrow v_1 t_в(k-1) = ks_1.$$

Заменим $v_1 t_в$ из (4) на s_x:

$$s_x(k-1) = ks_1 \Rightarrow s_x = \frac{ks_1}{k-1} = \frac{10 \cdot 27}{10-1} \approx 30\,\text{км}.$$

Заметим, что с помощью графика (рис. 2.1) задача решается значительно проще. Как видно из графика, за время Δt тела прошли пути:

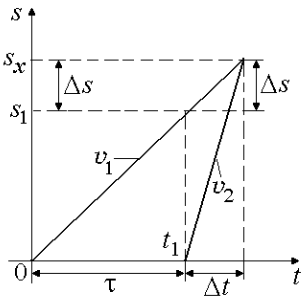


Рис. 2.1

1-е тело:

$$\Delta s = v_1 \Delta t \Rightarrow s_x - s_1 = v_1 \Delta t; \qquad (1)$$

2-е тело:

$$s_x = v_2 \Delta t \Rightarrow s_x = kv_1 \Delta t; \qquad (2)$$

$$(1):(2) \Rightarrow \frac{s_x - s_1}{s_x} = \frac{1}{k}; \quad s_x = s_1 \frac{k}{k-1};$$

$$s_x = 2{,}7\ \text{км} \cdot \frac{10}{9} \approx 30\ \text{км}.$$

Ответ: $s_x = s_1 \dfrac{k}{k-1} \approx 30$ км.

СТОП! Решите самостоятельно: С4, С5, С7.

В целом ряде задач на равномерное движение удобно записывать уравнение движения в системе отсчета, связанной с движущимися телами, например, водой в реке, эскалатором в метро, движущимся автомобилем и т.д.

Задача 2.3. Мимо пристани проходит плот. В этот момент в поселок, находящийся на расстоянии s_1 = 15 км от пристани, вниз по реке отправляется моторная лодка. Она дошла до поселка за время t = 3/4 ч и, повернув обратно, встретила плот на расстоянии s_2 = 9 км от поселка. Каковы скорость течения реки и скорость лодки относительно воды?

$s_1 = 15$ км
$s_2 = 9$ км
$t = 3/4$ ч
$u = ?$ $\upsilon = ?$

Решение. Выберем в качестве системы отсчета плот (воду). В этой системе отсчета лодка движется вниз и вверх по реке с одинаковой скоростью. Это означает, что время удаления лодки от плота равно времени приближения к нему. Таким образом, лодка возвращалась к плоту такое же время, какое она удалялась от него: 3/4 ч. За прошедшие 1,5 ч плот прошел расстояние $s_1 - s_2 = 6$ км. Следовательно, скорость течения (скорость плота относительно берега) u = 4 км/ч. Скорость лодки υ относительно воды найдем из уравнения $\upsilon + u = s_1/t \Rightarrow \upsilon = s_1/t - u = 16$ км/ч.

Ответ: u = 4 км/ч, υ = 16 км/ч.

Это решение иллюстрирует, насколько важен в кинематике удачный выбор системы отсчета.

СТОП! Решите самостоятельно: В5–В7, С9, С11, С12.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью υ_1 = 40 км/ч, а вторую половину – со скоростью υ_2 = 60 км/ч. Найти среднюю скорость за время движения.

А2. Половину пути пешеход проходит со скоростью υ_1 = 5,0 км/ч, а вторую половину пути пробегает со скоростью υ_2 = 10 км/ч. Определить среднюю скорость пешехода.

А3. Из одного пункта в другой мотоциклист проехал со скоростью 60 км/ч. На обратном пути он двигался со скоростью 20 м/с. Определить среднюю скорость мотоциклиста за все время движения. Временем остановки во втором пункте пренебречь.

А4. Поезд половину пути проехал со скоростью υ = 72 км/ч, а вторую половину в n = 1,5 раза медленней. Найти среднюю скорость поезда $\upsilon_{ср}$ на всем участке.

А5. Две трети своего пути пешеход шел со скоростью 3,0 км/ч, а оставшуюся треть пути со скоростью 6,0 км/ч. Чему равна средняя скорость движения пешехода?

А6. Поезд движется на подъеме со скоростью 10 м/с и затем на спуске со скоростью 25 м/с. Какова средняя скорость поезда на всем пути, если длина спуска в 2 раза больше длины подъема?

Задачи средней трудности

В1. Когда моя любимая лошадь подворачивает ногу, я обычно взваливаю лошадь на себя, и мы продолжаем движение, но медленнее: когда я вверху, наша скорость υ_1 = 120 км/ч, а когда я внизу, υ_2 = 30 км/ч. Чему равна наша средняя скорость, если: а) я еду *полпути,* а потом несу лошадь? б) я еду половину *времени,* а потом несу лошадь?

В2. Спортсмен во время тренировки пробежал половину пути со скоростью 14 км/ч. Далее половину оставшегося пути он пробежал со скоростью 8,0 км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью 4,0 км/ч. Определите среднюю скорость спортсмена на всем пути.

В3. Бегун, стартовавший на дистанцию 5,00 км, первый километр пробежал за время T_0 = 200 с. Каждый следующий километр он пробегал на T секунд дольше. Определите T, если известно, что средняя скорость бегуна оказалась такой, как если бы он каждый километр пробегал за 202 с.

В4. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = at + bt^3$, где a и b – константы. Определите среднюю скорость точки в интервале времени от t_1 до t_2.

В5. Два катера, идущие по реке с разными скоростями, одновременно поравнялись с плывущим по течению плотом. Через полчаса катера повернули и с прежними относительно воды скоростями направились в обратном направлении. Какой катер дойдет до плота раньше? Решить эту задачу для случаев, когда катера до встречи плыли: 1) против течения, 2) навстречу друг другу.

В6. С катера, движущегося вниз по реке, спустили спасательный круг в тот момент, когда он проплывал под мостом. Через время t после этого катер повернул обратно и встретил спасательный круг на расстоянии l от моста. Определить скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал одинаково.

В7. Вагон длиной l = 30 м равномерно движется вдоль платформы со скоростью υ_1 = 1,0 м/с. Провожающий бежит по платформе со скоростью υ_2 = 3,0 м/с. Определить, на какое расстояние переместится провожающий, пробежав вдоль всего вагона.

B8. Теплоход, длина которого L, движется по прямому курсу в неподвижной воде с постоянной скоростью υ_1. Катер со скоростью υ_2 проходит расстояние от кормы движущегося теплохода до его носа и обратно за время t. Определить скорость υ_1 теплохода.

Задачи трудные

C1. Автомобиль проехал половину пути со скоростью υ_1 = 36 км/ч, оставшуюся часть пути он половину времени ехал со скоростью υ_2 = = 18 км/ч, а последний участок – со скоростью υ_3 = 90 км/ч. Найти среднюю скорость $\upsilon_{ср}$ автомобиля на всем пути.

C2. Первую четверть всего пути поезд прошел со скоростью 60 км/ч. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 40 км/ч. С какой средней скоростью двигался поезд на оставшейся части пути?

C3. Автомобиль проезжает первую треть пути со скоростью υ_1, а оставшуюся часть пути – со скоростью υ_2 = 50 км/ч. Определить скорость на первом участке пути, если средняя скорость на всем пути $\upsilon_{ср}$ = 37,5 км/ч.

C4. Переход пароходов из порта A в порт B длится ровно 12 суток. Каждый полдень из A в B и из B в A отходит по пароходу. Сколько пароходов встретит в открытом море каждый из вышедших пароходов?

C5. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу начали двигаться два тела. После того как они встретились, первое тело через t_1 = = 10 с прибыло в пункт B, а второе тело, пройдя путь s = 100 м за t_2 = 40 с, прибыло в пункт A. Определить скорости υ_1 и υ_2 движения тел, если тела двигались равномерно и прямолинейно. Построить график $x(t)$ для обоих тел.

C6. Одинаковое ли время потребуется для проезда расстояния l на катере туда и обратно по реке (скорость течения υ_1) и по озеру (в стоячей воде), если скорость катера относительно воды в обоих случаях υ_2.

C7. От пристани C к пристани T по реке плывет со скоростью υ_1 = = 3 км/ч относительно воды весельная лодка. От пристани T к пристани C одновременно с лодкой отходит катер, скорость которого относительно воды υ_2 = 10 км/ч. За время движения лодки между пристанями катер успевает пройти это расстояние четыре раза и прибывает к T одновременно с лодкой. Определить направление течения.

C8. Катер идет по течению реки из пункта A в пункт B 3,0 ч, обратно – 6,0 ч. Сколько времени потребовалось бы этому катеру для того, чтобы проплыть расстояние AB по течению при выключенном моторе?

C9. Идущая вверх по реке моторная лодка встретила сплавляемые по течению реки плоты. Через час после встречи лодочный мотор заглох. Ремонт мотора продолжался 30 мин. В течение этого времени лодка свободно плыла вниз по течению. После ремонта лодка поплыла вниз по течению с прежней относительно воды скоростью и нагнала плоты на расстоянии s = 7,5 км от места их первой встречи. Определить скорость течения реки, считая ее постоянной.

C10. Колонна из n = 20 автобусов движется со скоростью υ = 36 км/ч с дистанцией l = 25 м. К головному автобусу из конца колонны был послан легковой автомобиль. Передав на ходу указание водителю головного автобуса, шофер остановил автомобиль и через t = 5,0 мин после начала обгона начал движение в хвосте колонны. С какой скоростью u двигался автомобиль? Временем разгона и торможения автомобиля пренебречь. Длина автобуса l_0 = 5,0 м.

C11. Войсковая колонна во время следования к месту учений движется со скоростью $\upsilon_к$ = 5 км/ч, растянувшись по дороге на расстояние l = 400 м. Командир, находящийся в конце колонны, посылает велосипедиста к своему помощнику, находящемуся во главе ее. Велосипедист отправляется и едет со скоростью $\upsilon_в$ = 25 км/ч. Помощник принял извещение и написал ответ, стоя на обочине дороги, в течение Δt = 3 мин. После этого велосипедист вернулся к командиру с той же скоростью $\upsilon_в$. Каково общее время движения велосипедиста? Какова средняя скорость велосипедиста на всем пути его движения?

C12. Спортсмены бегут колонной длины l с одинаковой скоростью υ. Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u < \upsilon$). Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, бежит назад с той же скоростью υ. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

Задачи очень трудные

D1. Завод, на котором работает инженер, находится за городом. Каждый раз к приходу поезда на станцию приезжает заводская машина, которая доставляет инженера на место работы. Однажды инженер приехал на станцию на час раньше обычного и, не дожидаясь машины, пошел на завод пешком. По дороге он встретил автомашину и приехал на завод на 10 мин раньше обычного. Сколько времени шел инженер до встречи с заводской автомашиной? (Решить задачу графически.)

D2. Трое туристов, обладающих одним велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед может взять лишь двоих, поэтому третьему туристу приходится сначала идти пешком. Велосипедист довозит второго туриста до некоторой точки дороги, откуда тот продолжает движение пешком, и возвращается за третьим. Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода $\upsilon_1 = 4$ км/ч, а велосипедиста $\upsilon_2 = 20$ км/ч.

D3. Почтовая связь между речными пристанями M и K осуществляется двумя катерами. В условленное время катера отплывают от своих пристаней, встречаются, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Если катера отплывают от своих пристаней одновременно, то катер, выходящий из M, тратит на путь в оба конца 3 ч, а катер из K – 1,5 ч. Скорости обоих катеров относительно воды одинаковы. Определить графически, на сколько позже должен отплыть катер из M после отплытия катера из K, чтобы оба катера находились в пути одно и то же время.

§ 3. МГНОВЕННАЯ ПУТЕВАЯ СКОРОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПУТИ НА ГРАФИКЕ ЗАВИСИМОСТИ $\upsilon = \upsilon(t)$

Мгновенной путевой скоростью называется величина, равная отношению $\upsilon = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, где Δs – приращение пути, пройденного телом за время Δt.

Секущая к графику $s(t)$, проходящая через точки M $(t_1;s_1)$ и N $(t_2;s_2)$ представляет собой график равномерного движения (рис. 3.1), скорость которого равна средней путевой скорости на интервале времени $[t_1;\ t_2]$. Чем круче идет секущая MN, т.е. чем больший угол α она составляет с осью t, тем бóльшую среднюю скорость имеет тело на участке $[t_1;\ t_2]$.

Если устремить Δt к нулю, секущая превратится в *касательную* к графику $s(t)$.

Чем больше угол наклона касательной к графику $s(t)$, тем больше мгновенная путевая скорость в данный момент.

СТОП! Решите самостоятельно: А1, А2, В1–В3.

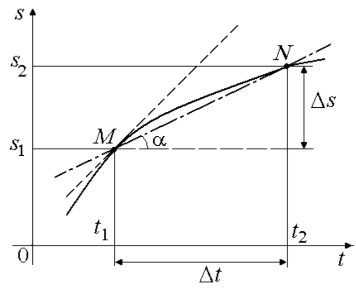


Рис. 3.1

Геометрический смысл пути на графике $\upsilon = \upsilon(t)$

Задача 3.1. Дан график зависимости $\upsilon = \upsilon(t) = \text{const}$ (рис. 3.2). Найти путь за промежуток времени $[t_1; t_2]$.

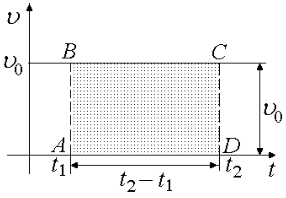


Рис. 3.2

Решение. Так как движение равномерное, то $s = \upsilon_0 \Delta t = \upsilon_0 (t_2 - t_1)$. С другой стороны, υ_0 – это высота, а $(t_2 - t_1)$ – основание прямоугольника $ABCD$ под графиком $\upsilon = \upsilon(t)$ (рис. 3.2). Поэтому получается, что путь можно вычислить так, как если бы мы определяли площадь прямоугольника $ABCD$ со сторонами υ_0 и $(t_2 - t_1)$.

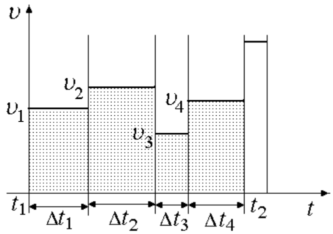


Рис. 3.3

Задача 3.2. По графику $\upsilon(t)$ (рис. 3.3) определить путь, пройденный за промежуток времени $[t_1; t_2]$. Величины Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4, υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 заданы.

Решение. Так как на каждом из промежутков Δt_i движение равномерное, то путь равен:

$$s = \upsilon_1 \Delta t_1 + \upsilon_2 \Delta t_2 + \upsilon_3 \Delta t_3 + \upsilon_4 \Delta t_4 = \sum_{i=1}^{4} \upsilon_i \Delta t_i \,.$$

Заметим, что путь вычисляется как сумма площадей прямоугольников со сторонами υ_i и Δt_i, и это есть площадь под графиком $\upsilon(t)$ на участке $[t_1; t_2]$.

Задача 3.3. По графику $\upsilon(t)$ (рис. 3.4) определить путь, пройденный за промежуток времени $[0; \tau]$.

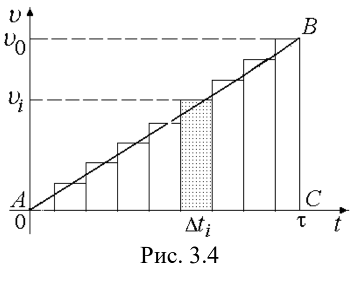


Рис. 3.4

Решение. Разобьем интервал времени $[0; \tau]$ на N малых интервалов Δt_i $\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = \tau \right)$, таких, что в пределах каждого Δt_i значение υ_i можно считать практически постоянным. Тогда согласно задаче 3.2 путь можно вычислить как сумму площадей прямоугольников со сторонами Δt_i и υ_i. Но если $N \to \infty$, то сумма этих площадей будет стремиться к площади под графиком $\upsilon(t)$, т.е. к площади прямоугольного треугольника ABC с катетами υ_0 и τ: $s = \frac{\upsilon_0 \tau}{2}$.

Вывод: путь можно вычислять как площадь под графиком $\upsilon(t)$.

СТОП! Решите самостоятельно: С3.

Читатель: По-моему, все-таки нельзя говорить, что путь равен площади под графиком. Это неверно хотя бы из соображений размерности: ведь путь измеряется в метрах, а площадь в квадратных сантиметрах!

Автор: Вы совершенно правы! Давайте разберемся: какая связь между площадью под графиком $\upsilon(t)$, выраженной в см^2, и пройденным путем, выраженным в м.

Что такое масштаб?

Масштабом называется величина, равная отношению длины отрезка, изображающего на графике (карте, чертеже) физическую величину, к реальному значению этой величины:

$$\text{М} = \frac{\text{Длина изображения величины}}{\text{Реальное значение величины}}$$

Пример 3.1. На географической карте отрезок 1 см изображает расстояние 1 км на местности. В этом случае масштаб равен

$$\text{М} = \frac{1\,\text{см}}{1\,\text{км}} = \frac{1\,\text{см}}{10^5\ \text{см}} = \frac{1}{100000} = 1 : 100\,000.$$

Пример 3.2. Отрезок 1 см изображает на графике промежуток времени t = 10 с. Тогда $\text{М}_t = \frac{1\,\text{см}}{10\,\text{с}} = \frac{1}{10}$ (см/с).

Пример 3.3. Отрезок 1 см изображает на графике скорость υ = = 2 м/с. Тогда $\text{М}_\upsilon = \frac{1\,\text{см}}{2\,\text{м/с}} = \frac{1}{2}$ (см/(м/с)).

Пример 3.4. Пусть отрезок Δx изображает время Δt, а M_t – масштаб времени на графике. Тогда $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = M_t$.

Пример 3.5. Пусть отрезок y изображает скорость υ, а M_υ – масштаб времени на графике. Тогда $\dfrac{y}{\upsilon} = M_\upsilon$.

Задача 3.4. Дан произвольный график $\upsilon = \upsilon(t)$ (рис. 3.5). Площадь под графиком на участке $[t_1;\ t_2]$ известна и равна $S_{гр}$ (см^2). Масштаб скорости M_υ (см/(м/с)) и масштаб времени M_t (см/с) заданы. Определить путь, пройденный за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$.

$S_{гр}$
M_υ (см/(м/с))
M_t (см/с)
$s = ?$

Решение. Разобьем отрезок $[t_1;\ t_2]$ на малые интервалы Δt_i ($i = 1, 2, \ldots N$; $N \to \infty$). Пусть υ_i – скорость, соответствующая интервалу Δt_i, тогда путь

$$s = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t_i . \qquad (1)$$

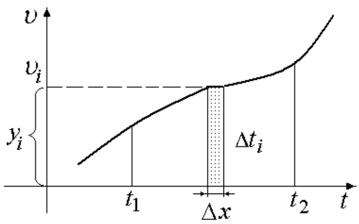


Рис. 3.5

Пусть Δx_i – отрезок (см), изображающий время Δt_i, а y_i – отрезок (см), изображающий скорость υ_i, тогда:

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = M_t \Rightarrow \Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{M_t};$$

$$\frac{y_i}{\upsilon_i} = M_\upsilon \Rightarrow \upsilon_i = \frac{y_i}{M_\upsilon}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем

$$s = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta x_i}{M_t} \cdot \frac{y_i}{M_\upsilon} = \frac{1}{M_t M_\upsilon} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i y_i = \frac{1}{M_t M_\upsilon} \cdot S_{гр}$$

Ответ: $s = \dfrac{1}{M_t M_\upsilon} \cdot S_{гр}$.

Итак, запомним, что путь равен:

$$s = \frac{S_{гр}}{M_t M_\upsilon}, \qquad (3.1)$$

где $S_{гр}$ – площадь под графиком.

Задача 3.5. Дан график $\upsilon = \upsilon(t)$, имеющий вид полуокружности с центром в точке $[\tau; 0]$ (рис. 3.6). Найти путь за промежуток времени $[0; 2\tau]$.

υ_0
τ
$s = ?$

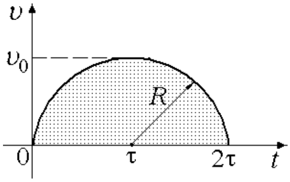


Рис. 3.6

Решение. Пусть R – радиус окружности, $[R]$ = см, M_t – масштаб времени, $[M_t]$ = см/с; M_υ – масштаб скорости, $[M_\upsilon]$ = см/(м/с). Тогда согласно формуле (3.1) находим путь:

$$s = \frac{S_{\text{гр}}}{M_t M_\upsilon} = \frac{\pi R^2/2}{M_t M_\upsilon} = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\frac{R}{M_t}}_{\tau} \cdot \underbrace{\frac{R}{M_\upsilon}}_{\upsilon_0} = \frac{\pi\tau\upsilon_0}{2}.$$

Ответ: $s = \dfrac{\pi\tau\upsilon_0}{2}$.

СТОП! Решите самостоятельно: С1, С2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. По данным графикам зависимостей $s = s(t)$ (рис. 3.7) определить, в какой из точек (1, 2, 3, 4) мгновенная путевая скорость: а) минимальна, б) максимальна.

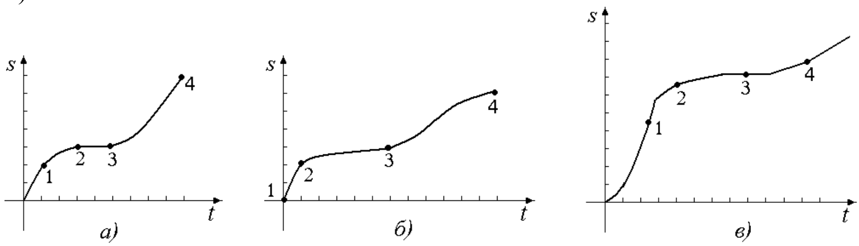


Рис. 3.7

А2. По данному графику $s = s(t)$ (рис. 3.8) указать, в каком случае средняя путевая скорость больше: а) за интервал времени $(0; \tau)$; б) за интервал времени $(0; 2\tau)$; в) за интервал времени $(\tau; 2\tau)$.

Задачи средней трудности

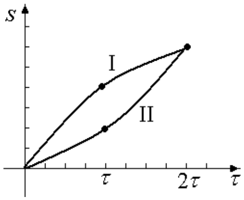


Рис. 3.8

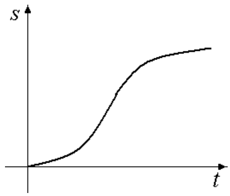


Рис. 3.9

В1. По графику зависимости пути от времени (рис. 3.9) определить момент времени t_0, в который мгновенная скорость равна средней скорости за первые t_0 секунд.

В2. Даны графики зависимостей пути от времени (рис. 3.10). Какие графики невозможны? Какой из графиков представляет собой движение, скорость которого по абсолютной величине уменьшается?

В3. На рис. 3.11 изображен график зависимости скорости тела от времени. Какое утверждение является верным: а) в точке *A* тело движется с ускорением; б) в точке *A* тело движется равномерно; в) в точке *A* тело движется по кривой; г) в точке *A* тело неподвижно?

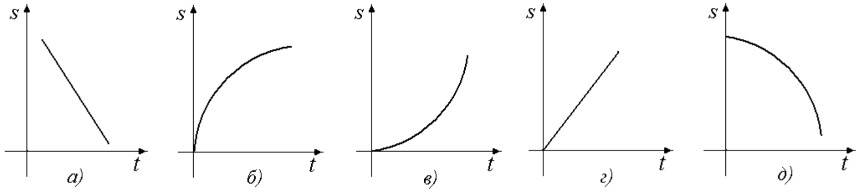


Рис. 3.10

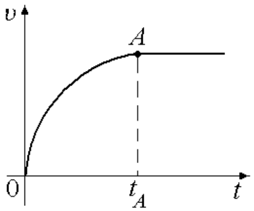


Рис. 3.11

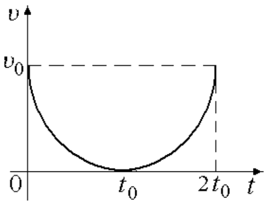


Рис. 3.12

Задачи трудные

С1. На рис. 3.12 представлена зависимость модуля скорости прямолинейного движения тела от времени, представляющая собой полуокружность. Какой путь *s* прошло за время $2t_0$? Значения υ_0 и t_0 считать известными.

С2. На графиках рис. 3.13 кривые представляют собой четверти окружностей. Найти по известным значениям υ_0 и τ_0 пути, пройденные за время: а) $[0; \tau_0]$; б) $[0; 2\tau_0]$; в) $[0; 2\tau_0]$.

С3. По графикам зависимости мгновенной путевой скорости от времени (рис. 3.14) найти пути, пройденные телом.

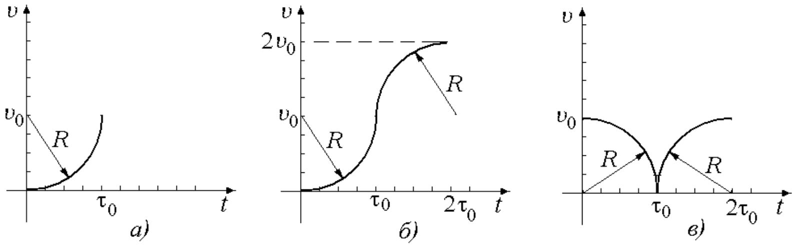


Рис. 3.13

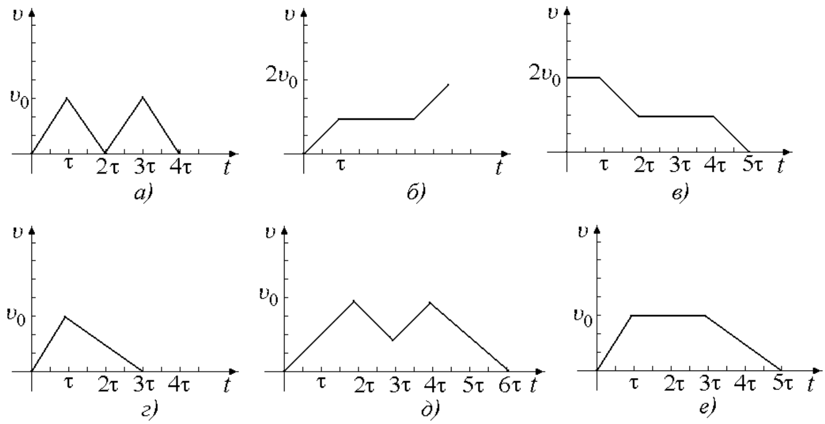


Рис. 3.14

§ 4. МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПУТИ НА ГРАФИКЕ ЗАВИСИМОСТИ $\boldsymbol{\upsilon_x = \upsilon_x(t)}$

Мгновенной скоростью по направлению (проекцией скорости) $\boldsymbol{\upsilon_x}$ называется величина, равная отношению $\upsilon_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, где Δx – изменение координаты, а Δt – промежуток времени, в течение которого это изменение произошло.

Связь между мгновенной путевой скоростью υ и мгновенной скоростью по направлению υ_x:

$$\upsilon = |\,\upsilon_x\,|. \tag{4.1}$$

Математическая справка: как по графику $y = f(x)$ построить график $y = |f(x)|$?

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Для того чтобы построить график $y = |f(x)|$ необходимо те части графика $y = f(x)$, которые лежат над осью x, оставить без изменения, а те части графика $y = f(x)$, которые лежат под осью x, зеркально отобразить на верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси x. Получившийся график, целиком лежащий в верхней полуплоскости, и будет графиком $y = |f(x)|$ (рис. 4.1).

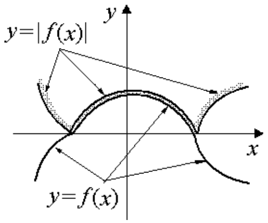


Рис. 4.1

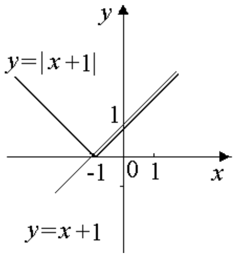


Рис. 4.2

Пример 4.1. Построить график $y = |x + 1|$.

1. Строим график $y = x + 1$.

2. Часть графика, находящуюся в верхней полуплоскости, оставляем без изменения (на рис. 4.2 эта часть показана двойной линией).

3. Часть графика, лежащую ниже оси x, зеркально отображаем на верхнюю полуплоскость (жирная линия на рис. 4.2).

СТОП! Решите самостоятельно: В1 (а, в, д).

Задача 4.1. По данному графику зависимости $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ (рис. 4.3) построить график зависимости мгновенной путевой скорости от времени $\upsilon = \upsilon(t)$.

Решение. Согласно формуле (4.1) $\upsilon(t) = |\upsilon_x(t)|$, поэтому построение необходимо провести так, как показано в Математической справке.

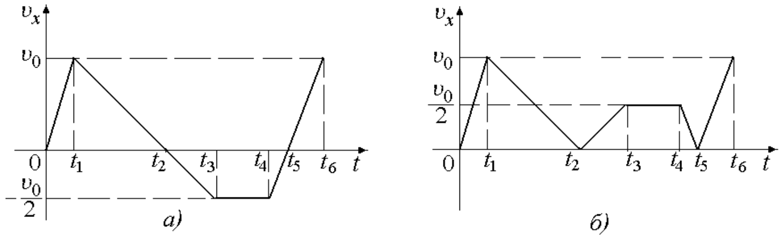


Рис. 4.3

Ответ: график на рис. 4.3,*б*.

Как по графику зависимости координаты от времени $x = x(t)$ построить график зависимости пути от времени $s = s(t)$?

Отметим следующие особенности графика $s = s(t)$:

1) график $s = s(t)$ всегда начинается из начала координат, так как в начальный момент пройденный путь всегда равен нулю;

2) график $s = s(t)$ всегда не убывает: он либо возрастает, если тело движется, либо не меняется, если тело стоит;

3) функция $s = s(t)$ не может принимать отрицательное значение.

Из сказанного следует, что график $x = x\ (t)$ совпадает с графиком $s = s(t)$ только в том случае, если $x(0) = 0$ и $x(t)$ все время не убывает, т.е. тело движется только в положительном направлении либо стоит на месте.

Приведем несколько примеров построения графиков $s = s(t)$ по данным графикам $x = x(t)$.

Пример 4.2. По графику $x = x(t)$ на рис. 4.4,*а* построить график $s = s(t)$.

График $x = x(t)$ возрастает, но начинается не в начале координат, а в точке $(0,\ x_0)$. Для того чтобы получить график $s = s(t)$ необходимо опустить график $x = x(t)$ на x_0 вниз (рис. 4.4,*б*).

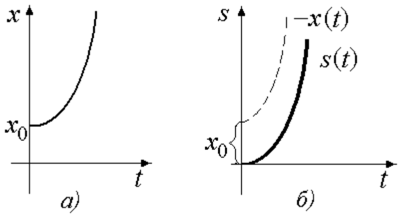


Рис. 4.4

Пример 4.3. По графику $x = x(t)$ на рис. 4.5,*а* построить график $s = s(t)$.

В данном случае $x(0) = 0$, но тело движется в отрицательном направлении оси x. В данном случае справедливо $s(t) = |x(t)|$, и для построения графика $s = s(t)$ достаточно отобразить график $x = x(t)$ зеркально на верхнюю полуплоскость (рис. 4.5,*б*).

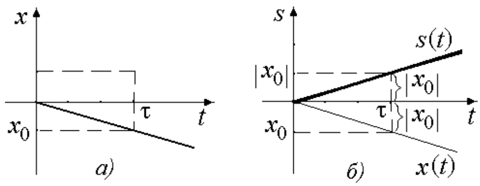


Рис. 4.5

Пример 4.4. По графику $x = x(t)$ на рис. 4.6,*а* построить график $s = s(t)$.

Сначала опустим график $x = x(t)$ на x_0 вниз, чтобы $x(0) = 0$, как мы это делали в примере 4.2, а затем прямую 2 (рис. 4.6,*б*) зеркально отобразим на верхнюю полуплоскость, как мы это сделали в примере 4.3.

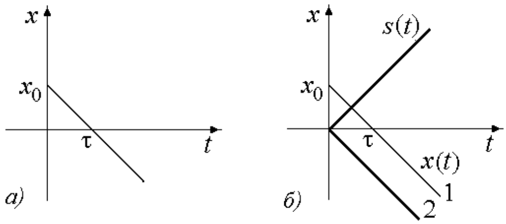


Рис. 4.6

Пример 4.5. По графику $x = x(t)$ на рис. 4.7,*а* построить график $s = s(t)$.

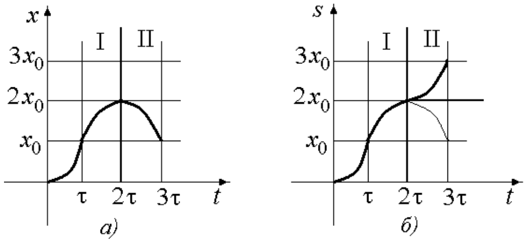


Рис. 4.7

График $x = x(t)$ состоит из двух участков: на первом участке $[0; 2\tau]$ $x(t)$ возрастает, а на втором участке $[2\tau; 3\tau]$ – убывает, т.е. тело движется в отрицательном направлении оси x. Поэтому для построения графика $s = s(t)$ первую часть графика $x = x(t)$ мы оставляем без изменения, а вторую часть зеркально отражаем относительно прямой, проходящей через точку поворота $(2\tau, 2x_0)$ параллельно оси t (рис. 4.7,б).

СТОП! Решите самостоятельно: С2 (а, б, в).

Утверждение. Пусть дан график зависимости $\upsilon_x(t)$, $x(t_1) = x_0$ (рис. 4.8). Значения площадей над графиком s^+ и под графиком s^-, выраженные с учетом масштабов в единицах длины, известны. Тогда путь, пройденный за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен:

$$s = s^{-} + s^{+}. \qquad (4.2)$$

Координата в момент времени t_2 равна:

$$x(t_2) = x_0 - s^{-} + s^{+}. \qquad (4.3)$$

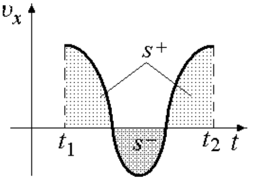


Рис. 4.8

Задача 4.2. По графику зависимости координаты от времени (рис. 4.9,*а*) построить графики зависимостей $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ и $\upsilon = \upsilon(t)$.

Решение. Рассмотрим промежуток времени [0; 1]. На этом промежутке $\Delta x =$ $= 1$ м, $\Delta t = 1$ с, отсюда $\upsilon_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 1$ м/с, $\upsilon =$ $= |\upsilon_x| = 1$ м/с.

Рассмотрим промежуток времени [1; 2]. На этом промежутке $\Delta x = 0$, значит, $\upsilon_x = \upsilon = 0$.

Рассмотрим промежуток времени [2; 3]. На этом промежутке $\Delta x = (-2) - 1 =$ $= -3$ м, $\Delta t = 1$ с, значит, $\upsilon_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-3\,\text{м}}{1\,\text{с}} =$ $= -3$ м/с, $\upsilon = |\upsilon_x| = 3$ м/с.

Рассмотрим промежуток времени [3; 4]. На этом промежутке $\Delta x = 0$, следовательно, $\upsilon_x = \upsilon = 0$.

Графики приведены на рис. 4.9,*б* и 4.9,*в*.

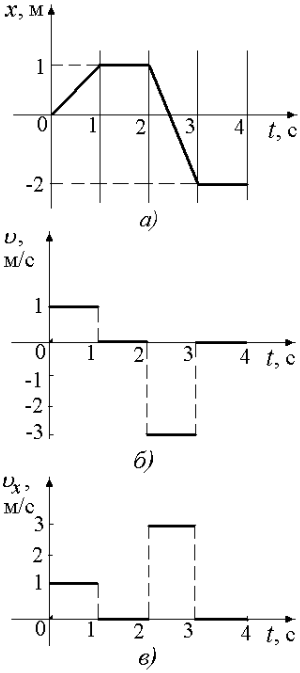


Рис. 4.9

СТОП! Решите самостоятельно: В3 (а,б,в).

Задача 4.3. По графику зависимости $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ (рис. 4.10) найти значения пройденного пути и координаты в моменты времени 1с, 2 с, 3 с, 4 с, 5 с, если $x(0) =$ 2,0 м.

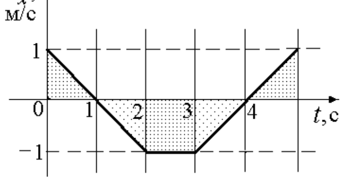


Рис. 4.10

Решение.

1. Рассмотрим промежуток времени [0; 1]. На этом промежутке $\upsilon_x(t)$ убывала от 1 м/с до 0, т.е. тело двигалось вдоль оси x замедленно и в момент $t = 1$ с остановилось. Пройденный путь равен площади под графиком на участке

[0, 1]: $s_{01} = \dfrac{1\,\text{м/с} \cdot 1\,\text{с}}{2} = 0{,}5\,\text{м}$. Координата в момент t = 1 с равна $x(1) = x(0) + s_{01}$ = 2,0 м + 0,5 м = 2,5 м.

2. Рассмотрим промежуток времени [1; 2]. На этом промежутке υ_x уменьшалась от 0 до –1 м/с, т.е. тело разгонялось из состояния покоя в направлении, противоположном направлению оси x. Путь, пройденный за этот промежуток времени, равен площади над графиком $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ на промежутке [1; 2]: $s_{12} = \dfrac{1\,\text{м/с} \cdot 1\,\text{с}}{2} = 0{,}5\,\text{м}$. Следовательно, общий путь, пройденный телом в момент t = 2 с, равен $s(2) = s(1) + s_{12}$ = 0,5 м + 0,5 м = 1,0 м. Координата в момент t = 1 с равна $x(2) = x(1) - s_{12}$ = 2,5 м – 0,5 м = 2,0 м.

3. Рассмотрим промежуток времени [2; 3]. На этом промежутке тело движется равномерно в отрицательном направлении оси x с путевой скоростью υ = 1 м/с. Пройденный путь равен s_{23} = (1 м/с)× ×(1 с) = 1,0 м. Следовательно, путь, пройденный к моменту t = 3 с, равен $s(3) = s(2) + s_{23}$ = 1,0 м + 1,0 м = 2,0 м.

Координата же за этот промежуток времени уменьшалась на величину пройденного пути, так как тело двигалось в обратную сторону: $x(3) = x(2) - s_{23}$ = 2,0 м – 1,0 м = 1,0 м.

4. Рассмотрим промежуток времени [3; 4]. На этом промежутке тело продолжало двигаться в отрицательном направлении, но путевая скорость уменьшалась от 1 м/с до нуля, т.е. в момент t = 4 с тело остановилось. Пройденный путь равен площади над графиком на участке [3; 4]: $s_{34} = \dfrac{1\,\text{м/с} \cdot 1\,\text{с}}{2} = 0{,}5\,\text{м}$. Путь, пройденный к моменту t = 4 с, равен $s(4) = s(3) + s_{34}$ = 2,0 м + 0,5 м = 2,5 м.

Координата уменьшилась на величину s_{34}: $x(4) = x(3) - s_{34}$ = = 1,0 м – 0,5 м = 0,5 м.

5. Рассмотрим, промежуток времени [4; 5]. На этом промежутке тело двигалось в положительном направлении оси x, путевая скорость тела при этом возрастала от нуля до 1 м/с. Путь, пройденный телом за промежуток времени [4; 5], равен: $s_{45} = \dfrac{1\,\text{м/с} \cdot 1\,\text{с}}{2} = 0{,}5\,\text{м}$. Общий путь, пройденный к моменту t = 5 с, $s(5) = s(4) + s_{45}$ = 2,5 м + 0,5 м = 3 м.

Координата увеличилась на величину пути s_{45} = 0,5 м и стала равна: $x(5)= x(4) + s_{45}$ = 0,5 м + 0,5 м = 1 м.

Ответ: $s(1)$ = 0,5 м, $s(2)$ = 1 м, $s(3)$ = 2 м, $s(4)$ = 2,5 м, $s(5)$ = 3 м;
$x(1)$ = 2,5 м, $x(2)$ = 2 м, $x(3)$ = 1 м, $x(4)$ = 0,5 м, $x(5)$ = 1 м;

СТОП! Решите самостоятельно: С3 (а, б, в).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи средней трудности

В1. Построить графики функций: а) $y = |x + 2|$; б) $y = |-x + 2|$; в) $y = |-x^2|$; г) $y = |x^2 + 2x|$; д) $y = |x^2 - 3x + 2|$.

В2. По данным графикам $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ (рис. 4.11) построить графики $\upsilon(t)$. Графики строить на одном чертеже разными цветами.

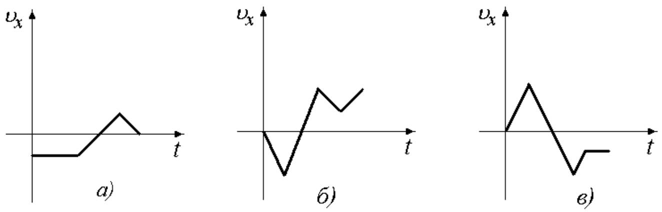


Рис. 4.11

В3. По данным графикам $x(t)$ (рис. 4.12) построить графики $\upsilon_x(t)$. Графики строить один под другим.

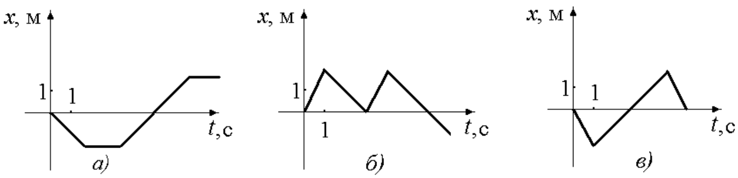


Рис. 4.12

Задачи трудные

С1. На рис. 4.13 показан график $\upsilon_x(t)$ некоторого тела, двигавшегося прямолинейно. Опишите качественно это движение.

С2. По данным графикам $x = x(t)$ (рис. 4.14) построить графики $s = s(t)$. Графики строить на одном чертеже, но разными цветами.

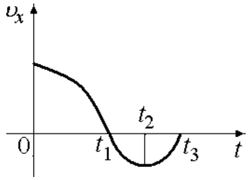


Рис. 4.13

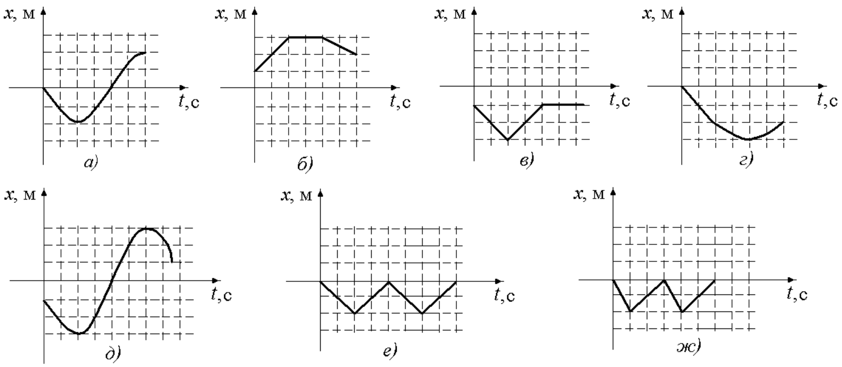


Рис. 4.14

С3. По графику $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ (рис. 4.15) найти значения функций $x = x(t)$ и $s = s(t)$ в моменты времени 1 с, 2 с, 3 с, 4 с.

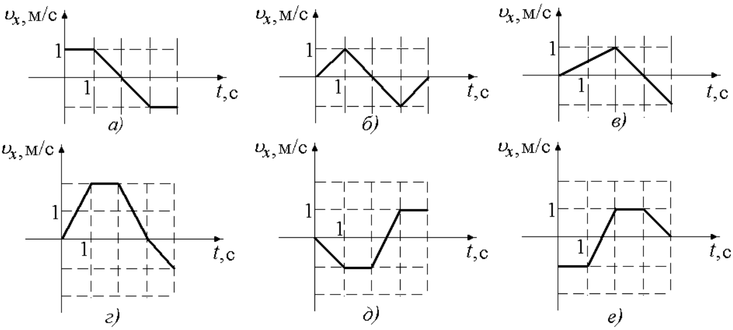


Рис. 4.15

С4. По графику $\upsilon_x(t)$ (рис. 4.16) определить путь, пройденный за время τ и координату $x(\tau)$, среднюю путевую скорость и среднюю проекцию скорости υ_x за время τ. Начальная координата равна нулю: $x(0) = 0$.

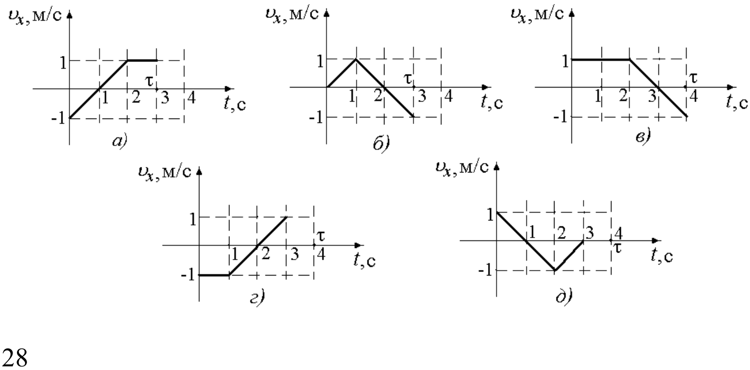


Рис. 4.16

С5. По графикам $\upsilon_x(t)$ (рис. 4.17) определить путь, пройденный за время τ и координату $x(\tau)$, среднюю путевую скорость υ и среднюю проекцию скорости υ_x за время τ. Начальная координата равна нулю: $x(0) = 0$.

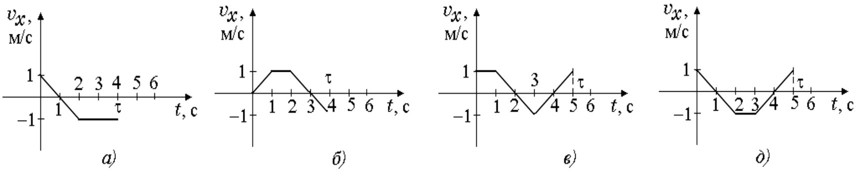


Рис. 4.17

С6. Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t(t - 1)$, где α – константа. Найти путь, пройденный частицей за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$.

§ 5. РАВНОМЕРНОЕ, РАВНОЗАМЕДЛЕННОЕ И РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. ПУТЕВОЕ УСКОРЕНИЕ. УСКОРЕНИЕ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Средним путевым ускорением называется величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени, в течение которого это изменение произошло:

$$a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}\,. \qquad (5.1)$$

Мгновенным путевым ускорением называется величина, равная отношению: $a = \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, где $\Delta \upsilon$ – изменение мгновенной путевой скорости, а Δt – промежуток времени, в течение которого это изменение произошло.

Если тело движется так, что его мгновенное путевое ускорение положительно: $a > 0$, то такое движение называется *ускоренным*.

Если тело движется так, что его мгновенное путевое ускорение отрицательно: $a < 0$, то такое движение называется *замедленным*.

Ускоренное движение называется *равноускоренным*, если среднее путевое ускорение $a = \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ одинаково за любой промежуток времени Δt.

Замедленное движение называется *равнозамедленным*, если среднее путевое ускорение $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ одинаково за любой промежуток времени Δt.

Задача 5.1. По графику зависимости $a = a(t)$ (рис. 5.1) определить, в какие промежутки времени тело двигалось: а) ускоренно; б) замедленно. Направление движения не менялось.

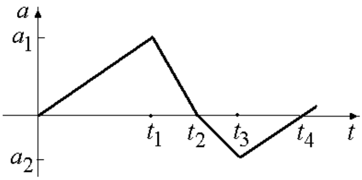


Рис. 5.1

Решение. На участке $(0;\ t_2)$ ускорение положительно, значит, скорость тела увеличивается.

На участке $(t_2;\ t_4)$ ускорение отрицательно, значит, скорость тела уменьшается.

Следовательно, на участке $(0;\ t_2)$ движение ускоренное, на участке $(t_2;\ t_4)$ движение замедленное. Наибольшее значение скорость достигает в момент времени t_2.

СТОП! Решите самостоятельно: А1, А2.

Пусть тело движется равноускоренно или равнозамедленно и пусть начальная скорость тела равна $v_н$, а конечная $v_к$, тогда средняя путевая скорость тела за данное время равна:

$$v_{ср} = \frac{v_н + v_к}{2}. \qquad (5.2)$$

Докажем эту формулу**.** Рассмотрим на рис. 5.2 графики зависимостей равноускоренного (*а*) и равнозамедленного (*б*) движений.

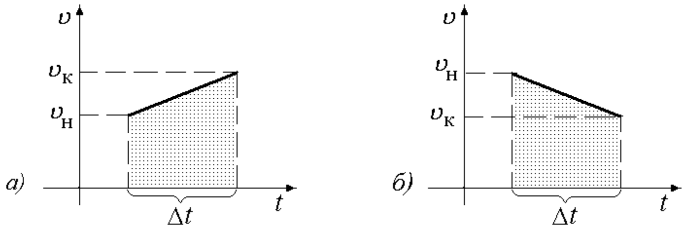


Рис. 5.2

В обоих случаях площадь под графиком $v(t)$ представляет собой трапецию с основаниями $v_{нач}$ и $v_{кон}$ и высотой Δt. Пройденный путь можно вычислить как площадь под графиком $S = \frac{\upsilon_{\text{нач}} + \upsilon_{\text{кон}}}{2}\Delta t$, где Δt – время движения. Тогда $\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{\Delta t} = \frac{\upsilon_{\text{нач}} + \upsilon_{\text{кон}}}{2}\Delta t : \Delta t = \frac{\upsilon_{\text{нач}} + \upsilon_{\text{кон}}}{2}$, что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно: В1, В2.

Средней проекцией ускорения на данное направление или ***средним ускорением по направлению*** за время Δt называется величина, равная отношению изменения проекции скорости $\Delta\upsilon_x$ ко времени Δt, за которое это изменение произошло:

$$a_x = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}. \tag{5.3}$$

Мгновенной проекцией ускорения на данное направление или ***мгновенным ускорением по направлению*** называется величина, равная:

$$a_x = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t \to 0, \tag{5.4}$$

где $\Delta\upsilon_x$ – изменение мгновенной скорости по направлению за время Δt.

Автор: Как Вы считаете, справедливо ли равенство $a = a_x$?

Читатель: Я думаю, что нет. Пусть, например, $\upsilon_x^{\text{нач}} = 0$, а $\upsilon_x^{\text{кон}} = -1$ м/с и $\Delta t = 1$ с. Тогда $a_x = \frac{\upsilon_x^{\text{кон}} - \upsilon_x^{\text{нач}}}{\Delta t} = \frac{-1-0}{10} = -1$ м/с^2, а $a = \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}| - |\upsilon_x^{\text{нач}}|}{\Delta t} = \frac{1-0}{1} = 1$ м/с^2. Видимо, верно $a = |a_x|$.

Автор: Это утверждение также неверно. Пусть, например, $\upsilon_x^{\text{кон}} = 0$, а $\upsilon_x^{\text{нач}} = 10$ м/с, $\Delta t = 10$ с. Тогда

$$a_x = \frac{\upsilon_x^{\text{кон}} - \upsilon_x^{\text{нач}}}{\Delta t} = \frac{0-10}{10} = -1 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}| - |\upsilon_x^{\text{нач}}|}{\Delta t} = \frac{0-10}{10} = -1 \text{ м/с}^2.$$

Ясно, что $|a_x| = |-1 \text{ м/с}^2| = 1 \text{ м/с}^2 \neq a = -1 \text{ м/с}^2$!

Разберемся с этим вопросом подробно.

1. Пусть тело движется в положительном направлении по оси x, тогда $\upsilon_x > 0$, $\upsilon_x^{\text{нач}} = \upsilon_{\text{нач}}$, $\upsilon_x^{\text{кон}} = \upsilon_{\text{кон}}$, отсюда

$$\Delta\upsilon_x = \upsilon_x^{\text{кон}} - \upsilon_x^{\text{нач}} = \upsilon_{\text{кон}} - \upsilon_{\text{нач}} = \Delta\upsilon \Rightarrow \quad a_x = a.$$

2. Пусть тело движется в отрицательном направлении по оси x, тогда $\upsilon_x < 0$, $\upsilon_x^{\text{нач}} = -\upsilon_{\text{нач}}$, $\upsilon_x^{\text{кон}} = -\upsilon_{\text{кон}}$, отсюда

$$\Delta\upsilon_x = \upsilon_x^{\text{кон}} - \upsilon_x^{\text{нач}} = -\upsilon_{\text{кон}} - (-\upsilon_{\text{нач}}) = -(\upsilon_{\text{кон}} - \upsilon_{\text{нач}}) = -\Delta\upsilon \;\Rightarrow\; \quad a_x = -a.$$

Отсюда вытекает, что справедливо соотношение:

$$a_x = \begin{cases} a, \text{ если } \upsilon_x > 0, \\ -a, \text{ если } \upsilon_x < 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Задача 5.2. По данному графику зависимости проекции скорости от времени (рис. 5.3) постройте графики зависимостей проекции ускорения от времени $a_x = a_x(t)$ и путевого ускорения от времени $a = a(t)$.

Решение.

1. Сначала вычислим значения a_x на каждом из промежутков времени: (0; 2), (2; 4), (4; 5). В пределах каждого из этих промежутков наклон графика $\upsilon_x(t)$ не меняется, поэтому в пределах каждого из этих промежутков a_x – величина постоянная.

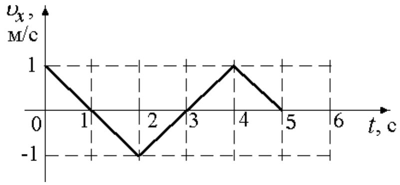


Рис. 5.3

Промежуток (0; 2):

$$a_x = \frac{-1\,\text{м/с} - 1\,\text{м/с}}{2\text{с}} = -1 \text{ м/с}^2.$$

Промежуток (2; 4):

$$a_x = \frac{1\,\text{м/с} - (-1\,\text{м/с})}{2\,\text{с}} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Промежуток (4; 5): $a_x = \dfrac{0 - 1\,\text{м/с}}{1\,\text{с}} = -1 \text{ м/с}^2.$

Теперь по формуле (5.2) вычислим значения a для каждого из временных интервалов: (0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4;5).

Промежуток (0; 1): $\upsilon_x > 0$ $a = a_x = -1\text{м/с}^2$.

Промежуток (1; 2): $\upsilon_x < 0$ $a = -a_x = -(-1 \text{ м/с}^2) = 1 \text{ м/с}^2$.

Промежуток (2; 3): $\upsilon_x < 0$ $a = -a_x = -1\text{м/с}^2$.

Промежуток (3; 4): $\upsilon_x > 0$ $a = a_x = 1\text{м/с}^2$.

Промежуток (4; 5): $\upsilon_x > 0$ $a = a_x = -1\text{м/с}^2$.

Графики зависимости $a_x(t)$ и $a(t)$ представлены на рис. 5.4.

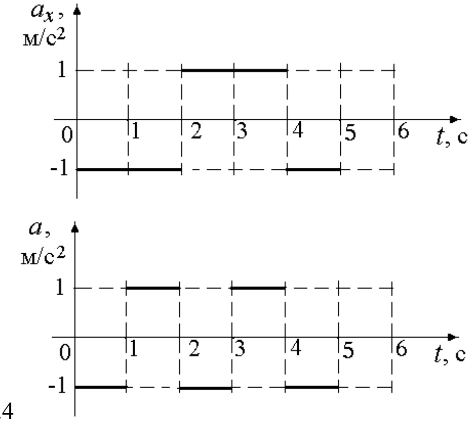


Рис. 5.4

СТОП! Решите самостоятельно: В3, В4, С3.

Равнопеременное движение тела

Движение по данной траектории называется *равнопеременным*, если среднее ускорение по направлению $a_x = \dfrac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}$ одно и то же за любой промежуток времени Δt.

Пусть тело движется равнопеременно по направлению x с ускорением a_x = const. Пусть в момент времени t_0 скорость по направлению равна υ_{x0}. Тогда скорость по направлению в произвольный момент времени t будет равна

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{x0} + a_x(t - t_0). \qquad (5.6)$$

Задача 5.3. По графикам зависимостей $a_x = a_x(t)$ (рис. 5.5) определить $\Delta \upsilon_x$ за время Δt и значение $\upsilon_x(t_1)$, если $\upsilon_x(t_0) = \upsilon_{x0}$.

Δt
υ_{x0}
a_{x0}

$\Delta \upsilon_x = ?$
$\upsilon_x(t_1) = ?$

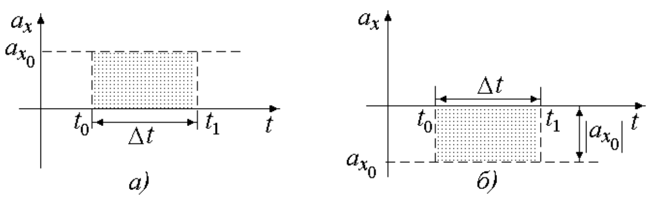


Рис. 5.5

Решение.

1. На рис. 5.5,*а*, с одной стороны, движение равнопеременное, $a_{x0} > 0$, $\Delta\upsilon_x = a_{x0}\Delta t > 0$. С другой стороны, получаем, что $\Delta\upsilon_x$ можно вычислить как площадь заштрихованного прямоугольника под графиком $a_x(t)$ со сторонами a_{x0} и Δt. Тогда $\upsilon_x(t_1) = \upsilon_{x0} + \Delta\upsilon_x = \upsilon_{x0} + a_{x0}\Delta t$.

2. На рис. 5.5,*б*, с одной стороны, движение равнопеременное, $a_{x0} < 0$, $\Delta\upsilon_x = a_{x0}\Delta t < 0$. С другой стороны, получаем, $\Delta\upsilon_x = -|a_{x0}|\Delta t < 0$, т.е. $\Delta\upsilon_x$ можно посчитать как *минус* площадь заштрихованного прямоугольника над графиком $a_x(t)$ со сторонами $|a_{x0}|$ и Δt. Тогда $\upsilon_x(t_1) =$
$= \upsilon_{x0} + a_{x0}\Delta t$.

Из решения задачи следует важный вывод: площадь под графиком $a_x(t)$ на участке Δt равна $\Delta\upsilon_x > 0$ за время Δt; площадь над графиком $a_x(t)$ на участке Δt равна $-\Delta\upsilon_x$ за время Δt, где $\Delta\upsilon_x < 0$.

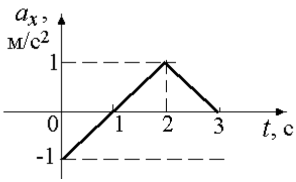


Рис. 5.6

Задача 5.4. Дан график зависимости $a_x = a_x(t)$ (рис. 5.6). Известно, что $\upsilon_x(0) =$
$= -2$ м/с. Определите значения $\upsilon_x(t)$ в моменты времени: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с, $t_3 = 3$с.

Решение.

1. На участке (0; 1) изменение проекции скорости $\Delta\upsilon_{x1}$ равно площади над графиком $a_x(t)$, взятой со знаком "минус": $\Delta\upsilon_{x1} = -0{,}5$ м/с. Тогда $\upsilon_x(1) = \upsilon_x(0) + \Delta\upsilon_{x1} = (-2$ м/с$) + (-0{,}5$ м/с$) = -2{,}5$ м/с.

2. На участке (1; 2) изменение проекции скорости $\Delta\upsilon_{x2}$ равно площади под графиком $a_x(t)$, взятой со знаком "плюс": $\Delta\upsilon_{x2} = 0{,}5$ м/с. Тогда $\upsilon_x(2) = \upsilon_x(1) + \Delta\upsilon_{x2} = (-2{,}5$ м/с$) + 0{,}5$ м/с $= -2$ м/с.

3. На участке (2; 3) изменение проекции скорости $\Delta\upsilon_{x3}$ равно площади под графиком $a_x(t)$, взятой со знаком "плюс": $\Delta\upsilon_{x3} = 0{,}5$ м/с. Тогда $\upsilon_x(3) = \upsilon_x(2) + \Delta\upsilon_{x3} = (-2$ м/с$) + 0{,}5$ м/с $= -1{,}5$ м/с.

Ответ: $\upsilon_x(1) = -2{,}5$ м/с, $\upsilon_x(2) = -2$ м/с, $\upsilon_x(3) = -1{,}5$ м/с.

СТОП! Решите самостоятельно: В5 (а), В6 (а,б), В8, С1.

Пусть тело движется равнопеременно и пусть в начальный момент мгновенная скорость по направлению равна $\upsilon_x^{\text{нач}}$, а в конечный момент $\upsilon_x^{\text{кон}}$. Тогда средняя скорость по направлению за данный промежуток времени равна:

$$v_x^{\text{ср}} = \frac{v_x^{\text{нач}} + v_x^{\text{кон}}}{2}. \quad (5.7)$$

Докажем эту формулу.

1. Рассмотрим случай, когда $v_x^{\text{нач}} > 0$ и $v_x^{\text{кон}} > 0$. Тогда скорости по направлению равны путевым скоростям: $v_x^{\text{нач}} = v_{\text{нач}}$, $v_x^{\text{кон}} = v_{\text{кон}}$, движение является либо равноускоренным, либо равнозамедленным, а $v_x^{\text{ср}} = v_{\text{ср}}$. Отсюда согласно формуле (5.2)

$$v_x^{\text{ср}} = v_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{нач}} + v_{\text{кон}}}{2} = \frac{v_x^{\text{нач}} + v_x^{\text{кон}}}{2}$$

что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим случай, когда $v_x^{\text{нач}} < 0$ и $v_x^{\text{кон}} < 0$. Тогда $v_x^{\text{нач}} = -v_{\text{нач}}$, $v_x^{\text{кон}} = -v_{\text{кон}}$, движение является либо равноускоренным $|v_x^{\text{кон}}| > |v_x^{\text{нач}}|$, либо равнозамедленным $|v_x^{\text{кон}}| < |v_x^{\text{нач}}|$. Отсюда справедливо

$$v_x^{\text{ср}} = -v_{\text{ср}} = -\left(\frac{v_{\text{нач}} + v_{\text{кон}}}{2}\right) = \frac{(-v_{\text{нач}}) + (-v_{\text{кон}})}{2} = \frac{v_x^{\text{нач}} + v_x^{\text{кон}}}{2},$$

что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим случай, когда в процессе движения $v_x(t)$ меняет знак. Пусть $v_x^{\text{нач}} < 0$ и $v_x^{\text{кон}} > 0$ (рис. 5.7).

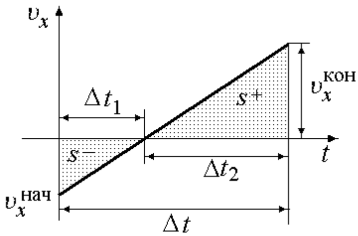


Рис. 5.7

Тогда $v_x^{\text{ср}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$,

$$\Delta x = s^+ - s^- =$$

$$= \frac{|v_x^{\text{кон}}|\,\Delta t_2}{2} - \frac{|v_x^{\text{нач}}|\,\Delta t_1}{2}. \quad (1)$$

Пусть a_x – ускорение по направлению, тогда

$$a_x = \frac{|v_x^{\text{кон}}|}{\Delta t_1} = \frac{|v_x^{\text{кон}}|}{\Delta t_2} > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Delta t_1 = \frac{|v_x^{\text{нач}}|}{a_x}, \qquad \Delta t_2 = \frac{|v_x^{\text{кон}}|}{a_x}.$$

Подставим значения Δt_1 и Δt_2 в (1) и получим

$$\Delta x = \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}|}{2} \cdot \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}|}{a_x} - \frac{|\upsilon_x^{\text{нач}}|}{2} \cdot \frac{|\upsilon_x^{\text{нач}}|}{a_x} = \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}|^2 - |\upsilon_x^{\text{нач}}|^2}{2a_x} =$$

$$= \frac{(|\upsilon_x^{\text{кон}}| - |\upsilon_x^{\text{нач}}|)}{2} \cdot \frac{(|\upsilon_x^{\text{кон}}| + |\upsilon_x^{\text{нач}}|)}{a_x},$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{|\upsilon_x^{\text{нач}}|}{a_x} + \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}|}{a_x} = \frac{|\upsilon_x^{\text{нач}}| + |\upsilon_x^{\text{кон}}|}{a_x},$$

$$\upsilon_x^{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left[\frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}| - |\upsilon_x^{\text{нач}}|}{2} \cdot \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}| + |\upsilon_x^{\text{нач}}|}{a_x}\right] : \frac{|\upsilon_x^{\text{нач}}| + |\upsilon_x^{\text{кон}}|}{a_x} =$$

$$= \frac{|\upsilon_x^{\text{кон}}| - |\upsilon_x^{\text{нач}}|}{2}.$$

Поскольку $|\upsilon_x^{\text{кон}}| = +\upsilon_x^{\text{кон}}$, $|\upsilon_x^{\text{нач}}| = -\upsilon_x^{\text{нач}}$, то $\upsilon_x^{\text{ср}} = \dfrac{\upsilon_x^{\text{кон}} + \upsilon_x^{\text{нач}}}{2}$, что и требовалось доказать.

Случай $\upsilon_x^{\text{нач}} > 0$ и $\upsilon_x^{\text{кон}} < 0$ доказывается аналогично.

Задача 5.5. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 19{,}6$ м/с. На какой высоте от земли будет находиться тело через $\tau = 3$ с, если известно, что скорость тела в этот момент равна $\upsilon_1 = 9{,}8$ м/с и направлена вниз? Движение считать равнопеременным.

$\upsilon_0 = 19{,}6$ м/с
$\upsilon_1 = 9{,}8$ м/с
$\tau = 3$ с

$h = ?$

Решение. Направим ось x вверх (рис. 5.8).

Пусть тело было брошено из точки с координатой $x = 0$. Тогда $\upsilon_x^{\text{нач}} = +\upsilon_0$, $\upsilon_x^{\text{кон}} = -\upsilon_1$. Отсюда

$$h = \Delta x = \upsilon_x^{\text{ср}}\tau = \frac{\upsilon_x^{\text{нач}} + \upsilon_x^{\text{кон}}}{2}\tau = \frac{\upsilon_0 + (-\upsilon_1)}{2}\tau =$$

$$= \frac{(19{,}6 - 9{,}8)\text{ м/с}}{2} \cdot 3\text{ с} = 14{,}7\text{ м}.$$

Ответ: $h == \dfrac{\upsilon_0 + (-\upsilon_1)}{2}\tau = 14{,}7$ м.

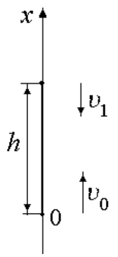


Рис. 5.8

СТОП! Решите самостоятельно: С4–С6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. По графикам зависимости мгновенного путевого ускорения от времени (рис. 5.9) указать промежутки времени, в течение которых движение: 1) ускоренное; 2) замедленное. Движение происходит вдоль естественной траектории в одном направлении.

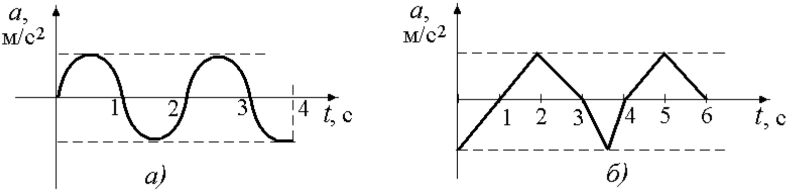


Рис. 5.9

А2. Даны графики зависимости мгновенной путевой скорости от времени $\upsilon = \upsilon(t)$ (рис. 5.10). Указать промежутки времени, в течение которых мгновенное путевое ускорение: 1) отрицательное; 2) положительное; 3) равно нулю.

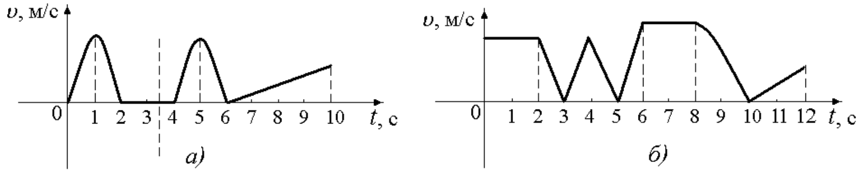


Рис. 5.10

Задачи средней трудности

В1. От движущегося поезда отцепляют последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью. Сравните пути, пройденные поездом и вагоном к моменту остановки вагона. Ускорение вагона можно считать постоянным.

В2. В момент, когда тронулся поезд, провожающий начал равномерно бежать по ходу поезда со скоростью υ_0 = 3,5 м/с. Принимая движение поезда равноускоренным, определить скорость поезда υ в тот момент, когда провожаемый поравняется с провожающим.

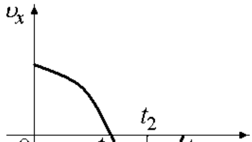


Рис. 5.11

В3. Тело двигалось вдоль оси x в соответствии с графиком, показанном на рис. 5.11. В какие моменты времени путевое ускорение a и ускорение по направлению a_x положительны и в какие отрицательны? В какие моменты времени движение этого тела ускоренное и в какие – замедленное?

В4. По графикам $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ (рис. 5.12) построить графики: $a_x = a_x(t)$ и $a = a(t)$, где a – мгновенное путевое ускорение.

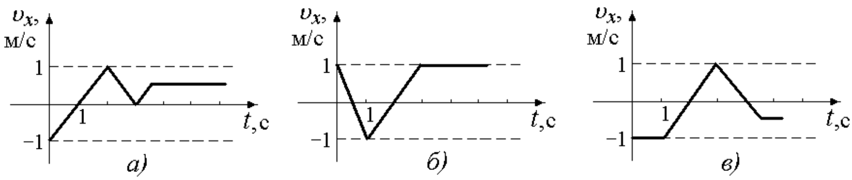


Рис. 5.12

В5. Дан график зависимости $a_x = a_x(t)$ (рис. 5.13). Считая, что в начальный момент времени: $\upsilon_x(0) = 0$, определить момент времени, в который: а) υ_x максимальна, б) υ_x минимальна, в) мгновенная путевая скорость υ максимальна, г) υ минимальна.

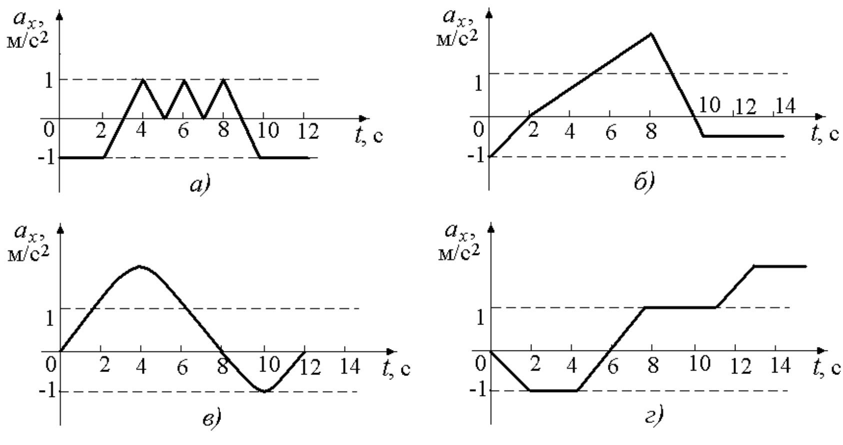


Рис. 5.13

В6. Дан график зависимости $a_x = a_x(t)$ (рис. 5.14). Определить значение $\upsilon_x(t)$ в моменты времени 1 с, 2 с, 3 с, 4 с, $\upsilon_x(0) = 0$.

В7. По данному графику $a_x(t)$ (рис. 5.15) определить υ_x в моменты времени t, равные 1с, 3с, 5с, 7с. Начальная скорость $\upsilon_x(0) = 0$.

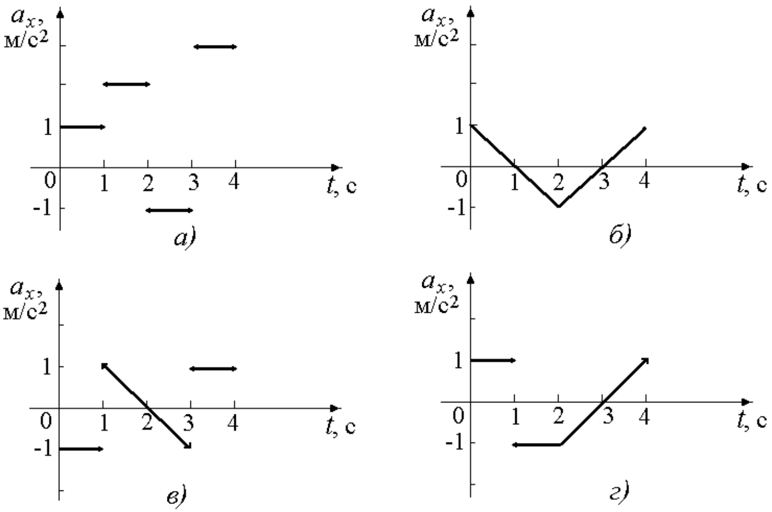


Рис. 5.14

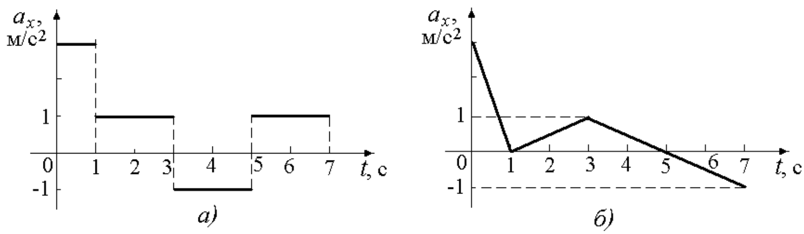


Рис. 5.15

B8. На графике представлена зависимость проекции ускорения тела от времени (рис. 5.16). В момент времени $t = 0$ начальная скорость тела равнялась $\upsilon_0 = 12$ м/с. Найти скорость тела в момент времени $t = 4$ с. Тело движется по оси x.

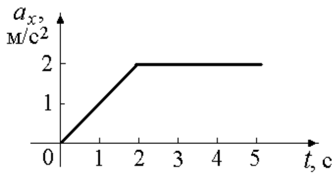
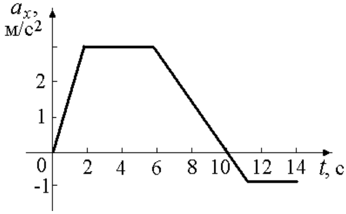


Рис. 5.16

Задачи трудные

C1. Тело в момент времени $t = 0$ начинает двигаться вдоль оси x из состояния покоя. Ускорение тела задано графиком $a(t)$, изображенным на рис. 5.17. Каково максимальное значение скорости этого тела? Считать, что скорость в момент времени $t = 0$ равна нулю.



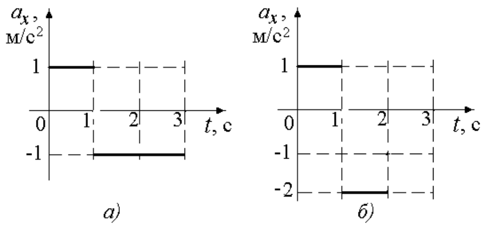


Рис. 5.17 Рис. 5.18

С2. По графикам $a_x(t)$ (рис. 5.18) построить графики $\upsilon_x(t)$, считая, что в начальный момент времени (t = 0) скорость движения материальной точки равна нулю.

С3. В какой из указанных на графике $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ (рис. 5.19) точек проекция ускорения a_x: а) максимальна, 2) минимальна?

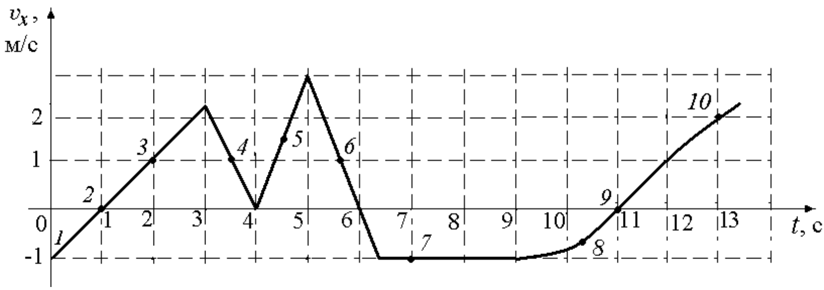


Рис. 5.19

С4. Тело пущено вверх по гладкой наклонной плоскости. Считая движение равнопеременным, определить начальную скорость тела, если через время t = 2 с тело двигалась вниз по наклонной плоскости со скоростью $\upsilon_{кон}$ = 2 м/с и находилось на расстоянии s = 4 м выше того места, откуда оно начало свое движение.

С5. С балкона дома подбросили вертикально вверх теннисный мяч с начальной скоростью $\upsilon_{нач}$ = 2 м/с. Определить величину и направление скорости мяча через τ = 2 с, если к этому времени он находился ниже исходной точки на h = 16 м. Движение считать равнопеременным.

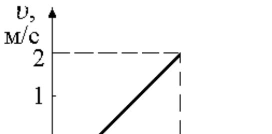


Рис. 5.20

С6. По данному графику $\upsilon_x(t)$ (рис. 5.20) определить $\upsilon_x^{ср}$ и Δx за время τ = 3 с, а также пройденный путь и среднюю путевую скорость за это время.

Задачи очень трудные

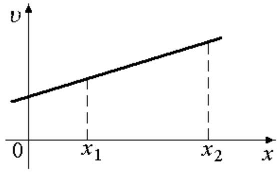


Рис. 5.21

D1. На рис. 5.21 показана зависимость скорости тела от его координаты (тело двигалось вдоль оси x). Где оно имело большее ускорение: в точке $x = x_1$ или в точке $x = x_2$?

D2. Тело в начальный момент времени двигалось вдоль оси x со скоростью υ_0. Проекция ускорения на ось x – величина постоянная, причем $a_x < 0$. Значение a_x неизвестно. Через некоторое время тело двигалось со скоростью υ в направлении, противоположном оси x. Найти среднюю путевую скорость тела.

D3. Покоящаяся в начальный момент времени частица начинает двигаться вдоль оси x. Проекция ускорения a_x на ось x изменяется с течением времени так, как показано на рис. 5.22. Через какое время T тело удалится на максимальное расстояние от исходной точки? После решения задачи в общем виде разобрать случай, когда $a = 10$ м/с^2, $\Delta t = 2$ с.

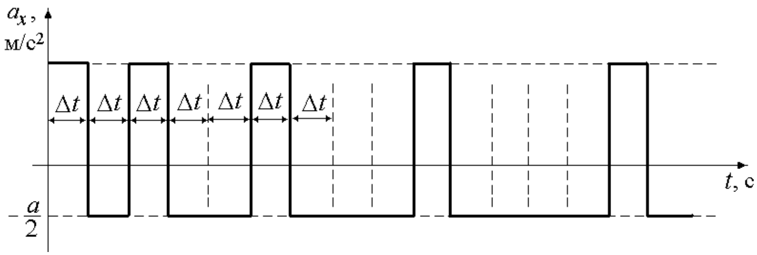


Рис. 5.22

§ 6. ЗАВИСИМОСТЬ КООРДИНАТЫ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ РАВНОПЕРЕМЕННОМ ДВИЖЕНИИ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Основное уравнение равнопеременного движения

Пусть материальная точка движется по заданной траектории равнопеременно. Известно, что $a_x = \text{const}$, $\upsilon_x(t_0) = \upsilon_{0x}$, $x(t_0) = x_0$. Тогда в момент времени t координата $x(t)$ будет равна

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}(t - t_0) + \frac{a_x(t - t_0)^2}{2}. \qquad (6.1)$$

Доказательство.

$$x(t) = x_0 + \Delta x,$$

где

$$\Delta x = v_x^{\text{ср}} \Delta t = v_x^{\text{ср}} (t - t_0) = \frac{v_{0x} + v_x(t)}{2}(t - t_0) =$$

$$= \frac{v_{0x} + (v_{0x} + a_x(t - t_0))}{2}(t - t_0) = v_{0x}(t - t_0) + \frac{a_x(t - t_0)^2}{2}.$$

Отсюда $x(t) = x_0 + \Delta x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \dfrac{a_x(t - t_0)^2}{2}$, что и требовалось доказать.

Частные случаи:

1) если $t_0 = 0$, то

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \tag{6.2}$$

2) если $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$, то

$$x(t) = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \tag{6.3}$$

3) если $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ и $v_{0x} = 0$, то

$$x(t) = \frac{a_x t^2}{2}; \tag{6.4}$$

4) если направление движения не меняется, то путь, пройденный телом за время t, равен $s = x(t) - x_0$, т.е.

$$s = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{6.5}$$

Задача 6.1. Тело, двигаясь равноускоренно, за первые $\tau_1 = 5$ с своего движения прошло путь $l_1 = 100$ м, а за первые $\tau_2 = 10$ с своего движения прошло путь $l_2 = 300$ м. Определите начальную скорость тела.

$\tau_1 = 5$ с
$\tau_2 = 10$ с
$l_1 = 100$ м
$l_2 = 300$ м
$v_0 = ?$

Решение. Согласно формуле (6.2) имеем:

$$l_1 = v_0\tau_1 + \frac{a\tau_1^2}{2}; \tag{1}$$

$$l_2 = v_0\tau_2 + \frac{a\tau_2^2}{2}, \tag{2}$$

где a – путевое ускорение, а υ_0 – начальная путевая скорость.

Выразим a из уравнения (1): $\dfrac{a\tau_1^2}{2} = l_1 - \upsilon_0\tau_1$, $a = \dfrac{2(l_1 - \upsilon_0\tau_1)}{\tau_1^2}$.

Подставим значение a в уравнение (2), получим:

$$l_2 = \upsilon_0\tau_2 + \frac{\tau_2^2}{2}\cdot\frac{2(l_1 - \upsilon_0\tau_1)}{\tau_1^2} = \upsilon_0\tau_2 + \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}(l_1 - \upsilon_0\tau_1),$$

$$l_2 - \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}l_1 = \upsilon_0\left(\tau_2 - \frac{\tau_2^2}{\tau_1}\right).$$

Из последнего равенства получим значение υ_0:

$$\upsilon_0 = \frac{l_2 - \dfrac{\tau_2^2}{\tau_1^2}l_1}{\tau_2 - \dfrac{\tau_2^2}{\tau_1}} = \frac{(l_2\tau_1^2 - l_1\tau_2^2)\tau_1}{\tau_1^2(\tau_2\tau_1 - \tau_2^2)} = \frac{l_2\tau_1^2 - l_1\tau_2^2}{\tau_1\tau_2(\tau_1 - \tau_2)}.$$

Подставим численные значения:

$$\upsilon_0 = \frac{l_2\tau_1^2 - l_1\tau_2^2}{\tau_1\tau_2(\tau_1 - \tau_2)} = \frac{(300\,\text{м})\cdot(5\,\text{с})^2 - (100\,\text{м})\cdot(10\,\text{с})^2}{(5\,\text{с})\cdot(10\,\text{с})\cdot(5\,\text{с} - 10\,\text{с})} = 10\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = \dfrac{l_2\tau_1^2 - l_1\tau_2^2}{\tau_1\tau_2(\tau_1 - \tau_2)} = 10$ м/с.

Стоп! Решите самостоятельно: А2, В1, В2, С1, С14.

Задача 6.2. Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью υ_1 = 108 км/ч, заметил на расстоянии l_0 = 180 м впереди движущийся в ту же сторону со скоростью υ_2 = 32,4 км/ч товарный поезд. Машинист сразу же начал торможение с ускорением, по модулю равным $|a|$ =1,2 м/с^2. Достаточно ли этого для того, чтобы поезда не столкнулись? Если столкновение произойдет, то через какое время?

υ_1 = 108 км/ч = 30,0 м/с
υ_2 = 32,4 км/ч = 9,00 м/с
l_0 = 180 м
$|a|$ =1,2 м/с^2

$t_в$ = ?

Решение.

1. Так как пассажирский поезд движется равнозамедленно, то $a_x = -|a|$.

2. Пусть x_1 – координата локомотива пассажирского поезда, а x_2 – координата

конца последнего вагона товарного поезда. Тогда, считая $t_0 = 0$, согласно формуле (6.3) можем записать уравнения:

$$x_1(t) = \upsilon_1 t - \frac{|a|\,t^2}{2}; \qquad x_2(t) = l_0 + \upsilon_2 t\,.$$

Условие столкновения: $\upsilon_1 t_\text{в} - \frac{|a|\,t_\text{в}^2}{2} = l_0 + \upsilon_2 t_\text{в}$. Преобразуем это уравнение: $\frac{|a|\,t_\text{в}^2}{2} + (\upsilon_2 - \upsilon_1)t_\text{в} + l_0 = 0 \Rightarrow t_\text{в}^2 + \frac{2(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{|a|}t_\text{в} + \frac{2l_0}{|a|} = 0$.

Решим данное квадратное уравнение относительно искомой величины $t_\text{в}$:

$$t_\text{в} = -\frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{|a|} \pm \sqrt{\left[\frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{|a|}\right]^2 - \frac{2l_0}{|a|}}\,.$$

Подставим численные значения:

$$t_\text{в} = -\frac{9{,}00\ \text{м/с} - 30{,}0\ \text{м/с}}{1{,}2\ \text{м/с}^2} \pm \sqrt{\left[\frac{9{,}00\ \text{м/с} - 30{,}0\ \text{м/с}}{1{,}2\ \text{м/с}^2}\right]^2 - \frac{2\cdot 180\ \text{м}}{1{,}2\ \text{м/с}^2}}\,,$$

$$t_{\text{в}1} \approx 15\ \text{с}, \quad t_{\text{в}2} \approx 20\ \text{с}.$$

Что означают два значения $t_\text{в}$? Если бы поезда шли по параллельным путям, то передняя точка локомотива пассажирского поезда и задняя точка последнего вагона товарного поезда встретились бы дважды: сначала пассажирский поезд (через $t_{\text{в}1} = 15$ с) обогнал бы последний вагон товарного поезда, а затем (в момент $t_{\text{в}2} =$ $= 20$ с) товарный поезд обогнал бы пассажирский. Следовательно, столкновения избежать не удастся и произойдет оно через $t_\text{в} = 15$ с после начала торможения.

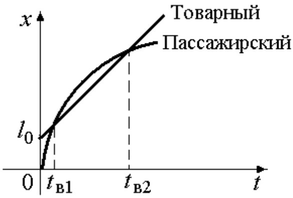


Рис. 6.1

На рис. 6.1 представлен примерный график зависимостей координат товарного и пассажирского поезда от времени.

Ответ:

$$t_\text{в} = -\frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{|a|} - \sqrt{\left[\frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{|a|}\right]^2 - \frac{2l_0}{|a|}} = 15\ \text{с}.$$

СТОП! Решите самостоятельно: А1, В5, В6, С3.

Задача 6.3. *Закон нечетных чисел*. Тело движется равноускоренно без начальной скорости. За первую секунду тело прошло путь $s_1 = 1$ м. Какой путь пройдет тело за 33-ю секунду своего движения?

$s_1 = 1$ м $\tau_1 = 1$ с $n = 33$ $\upsilon_0 = 0$	***Решение.*** Пусть a – путевое ускорение тела. Вычислим путь, который тело пройдет за n-ю секунду движения. Этот путь равен разности между путем, пройденным за первые n секунд движения, и путем, пройденным за $(n – 1)$ секунд движения:
$s_{33} = ?$	

$$s_n = s_{\text{пройденный за } n \text{ с}} - s_{\text{пройденный за } (n-1) \text{ с}},$$

$$s_n = s(\tau n) - s[\tau(n-1)] =$$

$$= \frac{a(\tau n)^2}{2} - \frac{a[\tau(n-1)]^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2}[n^2 - (n-1)^2] =$$

$$= \frac{a\tau^2}{2}[n^2 - n^2 + 2n - 1] = \frac{a\tau^2}{2}(2n-1)\,.$$

Итак,

$$s_n = \frac{a\tau^2}{2}(2n-1)\cdot \qquad (1)$$

За первую секунду тело прошло путь $s_n = \dfrac{a\tau^2}{2}$. Подставляя значение s_1 в формулу (1), получим:

$$s_n = s_1(2n - 1). \qquad (6.6)$$

Формула (6.6) получила название *Закона нечетных чисел*.

Вернемся к нашей задаче. Подставим в формулу (6.6) значения $n = 33$, получим:

$$s_n = s_1(2\cdot 33 - 1) = s_1 \cdot 65 = (1 \text{ м}) \cdot 65 = 65 \text{ м}.$$

Ответ: $s_n = s_1(2n - 1) = 65$ м.

СТОП! Решите самостоятельно: А3, В7, В9, С9.

Задача 6.4. Тело начинает двигаться из точки O вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью $\upsilon_0 = 2$ м/с. Какой путь прошло тело за время $\tau = 3$ с? Движение равнопеременное, ускорение по модулю равно $|a| = 1$ м/с^2.

$\upsilon_0 = 2$ м/с $\tau = 3$ с $\lvert a\rvert = 1$ м/с^2	***Решение***. Пусть ось x направлена вверх по наклонной плоскости, тогда
$s = ?$	

$$\upsilon_{x0} = +\,\upsilon_0 = 2 \text{ м/с},$$

$$a = -\lvert a\rvert = -1 \text{ м/с}^2.$$

Читатель: Наверное, мы можем в данном случае вычислить путь по формуле (6.5):

$$s = \upsilon_0\tau + \frac{a\tau^2}{2} = (2\text{ м/с})\cdot(3\text{ с}) + \frac{(-1\text{ м/с}^2)\cdot(3\text{ с})^2}{2} = 1{,}5 \text{ м}.$$

Автор: Эта формула справедлива только в том случае, если направление движения не меняется. А так ли это?

В момент остановки скорость равна нулю. Пусть $t_{\text{ост}}$ – время остановки тела, тогда согласно формуле (5.6) $0 = \upsilon_0 + at_{\text{ост}}$, отсюда

$$t_{\text{ост}} = -\,\upsilon_0/a = -(2\text{ м/с}) : (-1\text{ м/с}^2) = 2 \text{ с}.$$

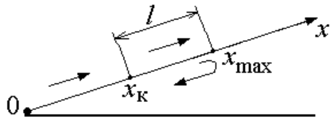


Рис. 6.2

По условию задачи время движения $\tau = 3$ с > 2 с. Это значит, что, достигнув за 2 с верхней точки своего движения, тело остановилось, а затем в течение еще 1 с двигалось в обратном направлении (рис. 6.2).

Пусть $x_{\max}$ – координата точки поворота тела, $x_{\text{к}}$ – конечная координата, а $l = (x_{\max} - x_{\text{к}})$ – путь, пройденный телом в обратном направлении, тогда общий путь, пройденный телом, равен

$$s = x_{\max} + l = x_{\max} + (x_{\max} - x_{\text{к}}) = 2x_{\max} - x_{\text{к}}. \quad (1)$$

Для вычисления $x_{\max}$ и $x_{\text{к}}$ воспользуемся формулой (6.3). В нашем случае $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$, тогда

$$x(t) = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad (2)$$

где $\upsilon_{0x} = +\upsilon_0$, $a_x = -a$.

Подставив в формулу (2) время $t_{\text{ост}}$, получим $x_{\max}$, а подставив τ, получим $x_{\text{к}}$. Тогда согласно формуле (1) получим:

$$s = 2x_{\max} - x_{\text{к}} = 2\left(\upsilon_0 t_{\text{ост}} - \frac{at_{\text{ост}}^2}{2}\right) - \left(\upsilon_0\tau - \frac{a\tau^2}{2}\right).$$

Подставим численные значения:

$$s = 2\left[(2\,\frac{\text{м}}{\text{с}})\cdot(2\,\text{с}) - \frac{(-1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2})\cdot(2\,\text{с})^2}{2}\right] - \left[(2\,\frac{\text{м}}{\text{с}})\cdot(3\,\text{с}) - \frac{(-1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2})\cdot(3\,\text{с})^2}{2}\right] \approx$$

$$\approx 2{,}5\ \text{м}.$$

Ответ: $s \approx 2{,}5$ м.

СТОП! Решите самостоятельно: С10–С12.

Связь между координатой, скоростью и ускорением

Если тело движется равнопеременно и проекция его ускорения a_x, начальная скорость $\upsilon_{x\text{нач}}$, конечная скорость $\upsilon_{x\text{кон}}$, начальная координата $x_{\text{нач}}$, а конечная координата $x_{\text{кон}}$, то справедлива формула

$$x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = \frac{\upsilon_{x\text{кон}}^2 - \upsilon_{x\text{нач}}^2}{2a_x}. \qquad (6.7)$$

Доказательство.

$$a_x = \frac{\upsilon_{x\text{кон}} - \upsilon_{x\text{нач}}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon_{x\text{кон}} - \upsilon_{x\text{нач}}}{a_x}, \qquad (1)$$

$$x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = \Delta x = \upsilon_x^{\text{ср}}\Delta t, \qquad (2)$$

$$\upsilon_x^{\text{ср}} = \frac{\upsilon_{x\text{кон}} + \upsilon_{x\text{нач}}}{2}. \qquad (3)$$

Подставим Δt из (1) и $\upsilon_x^{\text{ср}}$ из (3) в (2) и получим

$$x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = \frac{\upsilon_{x\text{кон}} + \upsilon_{x\text{нач}}}{2}\cdot\frac{\upsilon_{x\text{кон}} - \upsilon_{x\text{нач}}}{a_x} = \frac{\upsilon_{x\text{кон}}^2 - \upsilon_{x\text{нач}}^2}{2a_x},$$

что и требовалось доказать.

Частные случаи:

1) при равноускоренном движении $a = a_x > 0$, $\upsilon_{x\text{кон}} = \upsilon > 0$, $\upsilon_{x\text{нач}} = \upsilon_0 > 0$, $x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = s$, тогда путь равен

$$s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}; \qquad (6.8)$$

2) при равнозамедленном движении $a = -|a_x| < 0$, $\upsilon_{x\text{кон}} = \upsilon$, $\upsilon_{x\text{нач}} = \upsilon_0$, тогда путь равен

$$s = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2|a|}; \tag{6.9}$$

3) если при равнозамедленном движении $\upsilon = 0$, то

$$s = \frac{\upsilon_0^2}{2|a|}. \tag{6.10}$$

Задача 6.5. Поезд начинает движение из состояния покоя и, двигаясь равноускоренно, увеличивает свою скорость. На первом километре скорость возросла на 10 м/с. На сколько возрастет она на втором километре?

$s_1 = s_2 = s = 1$ км
$\Delta\upsilon_1 = 10$ м/с
$\upsilon_0 = 0$
$\Delta\upsilon_2 = ?$

Решение. Пусть поезд движется с путевым ускорением a, υ_1 – скорость в конце первого километра, υ_2 – в конце 2-го. Тогда согласно формуле (6.8):

$$\upsilon_1^2 = 2as, \qquad (1)$$

$$\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 = 2as, \qquad (2)$$

$$\Delta\upsilon_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1, \qquad (3)$$

$$\Delta\upsilon_1 = \upsilon_1 - 0 = \upsilon_1. \qquad (4)$$

Приравняем левые части равенств (1) и (2), получим $\upsilon_1^2 = \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2$, отсюда $\upsilon_2 = \upsilon_1\sqrt{2}$. Подставим значение υ_2 в уравнение (3):

$$\Delta\upsilon_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon_1\sqrt{2} - \upsilon_1 = \upsilon_1(\sqrt{2} - 1) = \Delta\upsilon_1(\sqrt{2} - 1).$$

Подставим численные значения:

$$\Delta\upsilon_2 = 10 \text{ м/с} \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}1 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\Delta\upsilon_2 = \Delta\upsilon_1(\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}1$ м/с.

СТОП! Решите самостоятельно: А4, В10, В11, В15.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться два тела: одно – равномерно со скоростью $\upsilon_0 = 980$ см/с, а другое – равноускоренно без начальной скорости с ускорением $a = 9{,}80$ см/с^2. Через какое время второе тело догонит первое?

А2. Первый вагон трогающегося от остановки поезда проходит за 3 с мимо наблюдателя, находившегося до отправления поезда у начала этого вагона. За сколько времени пройдет мимо наблюдателя весь поезд, состоящий из 9 вагонов? Промежутками между вагонами пренебречь.

А3. За какую секунду от начала движения путь, пройденный телом в равноускоренном движении, втрое больше пути, пройденного в предыдущую секунду, если движение происходит без начальной скорости?

А4. Во сколько раз скорость пули в середине ствола ружья меньше, чем при вылете из ствола?

Задачи средней трудности

В1. Шарик, скатываясь с наклонного желоба из состояния покоя, за первую секунду прошел путь 10 см. Какой путь он пройдет за 3 с?

В2. При равномерно ускоренном движении точка проходит в первые два равных последовательных промежутка времени, по $t = 4{,}0$ с каждый, пути $s_1 = 24$ м и $s_2 = 64$ м. Определить начальную скорость и ускорение движущейся точки.

В3. Движения двух мотоциклистов заданы уравнениями $x_1 = 15 + t^2$ и $x_2 = 8t$. Описать движение каждого мотоциклиста, найти время и место их встречи.

В4. В момент начала наблюдения расстояние между двумя телами равно 6,9 м. Первое тело движется из состояния покоя с ускорением 0,20 м/с^2. Второе движется вслед за ним, имея начальную скорость 2 м/с и ускорение 0,40 м/с^2. Написать уравнения $x = x(t)$ в системе отсчета, в которой при $t = 0$ координаты тел принимают значения, соответственно равные $x_1 = 6{,}9$ м, $x_2 = 0$. Найти время и место встречи тел.

В5. Спустя 40 с после отхода теплохода вдогонку за ним был послан глиссер, который, отправившись от пристани, двигался все время с ускорением 0,50 м/с^2. Через какое время и на каком расстоянии от пристани глиссер догонит теплоход, если теплоход движется равномерно со скоростью 18 км/ч? Начертить на одних осях графики скорости теплохода и глиссера.

В6. Движения двух автомобилей по шоссе заданы уравнениями $x_1 = 2t + 0{,}2t^2$ и $x_2 = 80 - 4t$. Описать картину движения. Найти: а) время и место встречи автомобилей; б) расстояние между ними через 5 с от начала отсчета времени; в) координату первого автомобиля в тот момент времени, когда второй находился в начале отсчета.

B7. Тело движется с постоянным ускорением прямолинейно и в шестую секунду проходит 12 м. Определить ускорение и путь, пройденный в шестнадцатую секунду, если начальная скорость была равна нулю.

B8. Шарик начинает движение по наклонному желобу из состояния покоя с постоянным ускорением 2 см/с^2. Определить модули перемещений за 1, 2 и 3 с, а также за первую, вторую и третью секунды. Каково отношение перемещений в каждом из этих двух случаев?

B9. Тело, начальная скорость которого была равна нулю, прошло за первую секунду 1 м, за вторую – 2 м, за третью – 3 м, за четвертую – 4 м и т.д. Является ли такое движение равноускоренным?

B10. Мотоциклист и велосипедист одновременно начинают движение из состоянием покоя. Ускорение мотоциклиста в три раза больше, чем велосипедиста. Во сколько раз бо́льшую скорость разовьет мотоциклист: а) за одно и то же время; б) на одном а том же пути?

B11. При скорости υ_1 = 15 км/ч тормозной путь автомобиля равен s = = 1,5 м. Каким будет тормозной путь s_2 при скорости υ_2 = 90 км/ч? Ускорение в обоих случаях одно и то же.

B12. Тело, имея начальную скорость υ_0 = 1 м/с, двигалось равноускоренно и приобрело, пройдя некоторое расстояние, скорость $\upsilon_{кон}$ = = 7 м/с. Какова была скорость тела на половине этого расстояния?

B13. Тело, двигаясь равноускоренно без начальной скорости, пройдя некоторый путь, достигло скорости υ_2 = 14 м/с. Чему была равна скорость υ_1 тела, когда оно прошло только k-ю часть этого пути? Разобрать случай, когда $k = 2$.

B14. Тормозной путь поезда перед остановкой на станции составляет 1000 м. Определить тормозное ускорение и тормозное время, если в начале торможения скорость поезда была 72 км/ч. Какова была скорость поезда у светофора, находящегося в средней точке тормозного пути?

B15. При торможении от скорости υ_1 = 40 км/ч до полной остановки автомобиль прошёл путь s_1 = 16 м. Какой путь пройдёт этот автомобиль при снижении скорости от υ_2 = 100 км/ч до υ_3 = 60 км/ч? Считать, что величина ускорения в обоих случаях одинакова и постоянна.

Задачи трудные

C1. Тело, вышедшее из некоторой точки O, двигалось с постоянным по величине и направлению ускорением. Скорость его в конце 5-й секунды была 1,5 м/с, в конце 6-й секунды тело остановилось и затем стало двигаться обратно. Найти путь, пройденный телом до остановки. Определить скорость, с которой тело вернулось обратно в точку O.

С2. Двигаясь равноускоренно, тело проходит за промежуток времени Δt_1 = 4с путь Δs_1 = 2 м, а за следующий промежуток времени Δt_2 = 5 с путь Δs_2 = 4 м. Определить ускорение тела и его начальную скорость.

С3. Водитель автомашины, нарушив правила движения, промчался по шоссе мимо поста ГАИ со скоростью υ_0 = 72 км/ч и продолжал далее ехать с такой же скоростью. Через время t_0 = 20 с вслед за нарушителем отправился на мотоцикле инспектор и, двигаясь равноускоренно, догнал нарушителя на расстоянии s = 12 км от поста. На какой скорости υ_x инспектор догнал нарушителя? Задачу решить графически.

С4. Пассажир первого вагона поезда длины l прогуливался по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд начал двигаться с ускорением a. Пассажир сразу же побежал со скоростью υ. Через какое время он догонит свой вагон?

С5. Два автомобиля движутся навстречу друг другу один – с начальной скоростью υ_1 = 36 км/ч и ускорением a_1 = 0,30 м/с^2, а второй – с начальной скоростью υ_2 = 54 км/ч и ускорением a_2 = 0,50 м/с^2. Начальное расстояние между ними L = 250 м. Через какое время встретятся автомобили и какое расстояние пройдёт каждый из них до встречи? Какую скорость будет иметь каждый из автомобилей в момент встречи?

С6. Два мотоциклиста выезжают навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый из пункта A равнозамедленно поднимается в гору с начальной скоростью υ_1 = 72 км/ч и с ускорением a = 2,0 м/с^2, второй – с начальной скоростью υ_2 = 36 км/ч равноускоренно спускается с горы из пункта B с таким же по величине ускорением.

Определить время движения и расстояние, пройденное первым мотоциклистом до встречи, если расстояние между пунктами A и B равно s = 300 м. Указать, как будет меняться со временем расстояние между мотоциклистами. Построить график изменения расстояния между мотоциклистами с течением времени. Как определить по этому графику момент встречи мотоциклистов?

С7. Из точки A выходит тело, движущееся с начальной скоростью υ_1 = 3 м/с и ускорением a_1 = 2 м/с^2. Спустя секунду из точки B выходит другое тело, движущееся навстречу первому с постоянной скоростью υ_2 = = 5 м/с. Расстояние AB равно s = 100 м. Сколько времени будет двигаться первое тело до встречи со вторым?

С8. Тело, трогаясь с места, за k-ю секунду равноускоренного движения проходит путь Δs_k. Рассчитать скорость тела в конце k-й секунды υ_k и путь, пройденный телом за k секунд s_k. Разобрать случай, когда k = 5, Δs_k = 45 м.

С9. За пятую секунду движения с постоянным ускорением тело проходит путь $\Delta s_5 = 5{,}0$ м и останавливается. Какой путь Δs_2 проходит это тело за вторую секунду этого движения?

Указание: задача имеет, по крайней мере, три способа решения.

С10. Тело начинает двигаться из точки A со скоростью υ_0 и через некоторое время попадает в точку B (рис. 6.3). Какой путь прошло тело, если оно двигалось равнопеременно с ускорением, численно равным a? Расстояние между точками A и B равно l. Найти среднюю скорость тела.

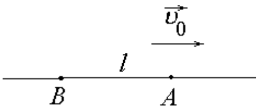


Рис. 6.3

С11. На наклонную плоскость после начального толчка снизу вверх вкатывается шарик. На расстоянии $l = 30$ см от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1 = 1{,}0$ с и $t_2 = 2{,}0$ с после начала движения. Считая движение равнопеременным, определите начальную скорость υ_0 и ускорение a.

С12. Мальчик бросил колесо, которое покатилось вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью υ_0 и сразу же побежал за ним с постоянной скоростью u. Через какое время τ мальчик поймал колесо, если оно двигалось с постоянным по модулю ускорением и через время t_0 повернуло в обратную сторону? Задачу решить графически.

С13. Тело двигалось по оси x с постоянным ускорением. В точке $x_2 = 2$ м оно имело скорость $\upsilon_2 = 2$ м/с, а в точке $x_3 = 3$ м имело скорость $\upsilon_3 = 3$ м/с. (Обе скорости направлены в положительную сторону оси x.) Было ли это тело в точке $x_1 = 1$ м?

С14. Доска, разделенная на пять равных отрезков, начинает скользить по наклонной плоскости. Первый отрезок прошел мимо отметки, сделанной на наклонной плоскости в том месте, где находился передний край доски в начале движения, за $\tau = 2{,}0$ с. За какое время пройдет мимо этой отметки последний отрезок доски? Движение доски считать равноускоренным.

С15. Тело, трогаясь с места, движется равноускоренно. Путь, проходимый телом, разбит на равные участки Δs. Во сколько раз время Δt_1, затраченное на прохождение первого участка Δs_1, больше времени Δt_k, затраченного на прохождение k-го участка?

Задачи очень трудные

D1. Реактивный самолет летит со скоростью $\upsilon_0 = 720$ км/ч. С некоторого момента самолет движется с ускорением в течение $t = 10$ с и в последнюю секунду проходит путь $s = 295$ м. Определить ускорение a и конечную скорость υ самолета.