Всероссийская школа математики и физики «Авангард»

Е. Н. ФИЛАТОВ

ФИЗИКА

10

Экспериментальный учебник

Часть 2

Электростатика

МОСКВА – 2006

Филатов Е.Н. **Физика–10. Часть 2. Электростатика.** Экспериментальный учебник для профильных физико-математических классов. М.: ВШМФ «Авангард», 2006. – 244 с.

Учебник предназначен для учащихся 10-х профильных физико-математических классов. Главная цель учебника – научить учащихся самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения.

Все задачи условно разбиты на четыре категории сложности: легкие, средней трудности, трудные, очень трудные. Легкие задачи – это стандартные задачи из традиционных школьных учебников, а очень трудные соответствуют уровню вступительных экзаменов в наиболее престижные вузы Москвы: МФТИ, МГУ, МИФИ.

К большинству задач приведены ответы.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 4. ЗАКОН ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Векторное поле

Если каждой точке пространства поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{u}$, *то говорят, что задано* ***векторное поле****.*

Примерами векторного поля могут служить поле скоростей частиц жидкости в трубе (рис. 4.1); поле вектора напряженности точечного заряда +*q* (рис. 4.2); поле вектора ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли (однородное поле) (рис. 4.3).

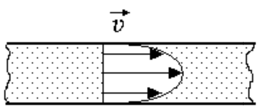


Рис. 4.1

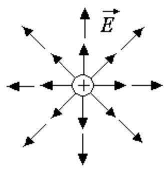


Рис. 4.2

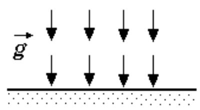


Рис. 4.3

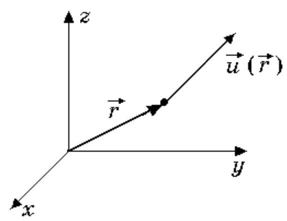


Рис. 4.4

Пусть дано векторное поле $\vec{u}(\vec{r})$ (здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор данной точки пространства) (рис. 4.4). Рассмотрим площадку ΔS, маленькую настолько, что в пределах ее вектор $\vec{u}(\vec{r})$ можно считать постоянным.

Для того чтобы определить, какая сторона у площадки «внутренняя», а какая «наружная», удобно ввести вспомогательный единичный вектор $\vec{n}$, который перпендикулярен к площадке и указывает «наружу». Этот вектор называют *нормалью* к площадке (рис. 4.5).

Потоком векторного поля $\vec{u}$ *через площадку* ΔS*, имеющую нормаль* $\vec{n}$, *называется величина*

$$\Phi = |\,\vec{u}(\vec{r})\,|\cdot\Delta S\cos\theta, \qquad (1)$$

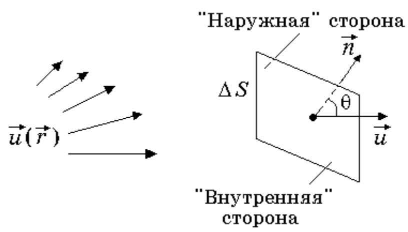


Рис. 4.5

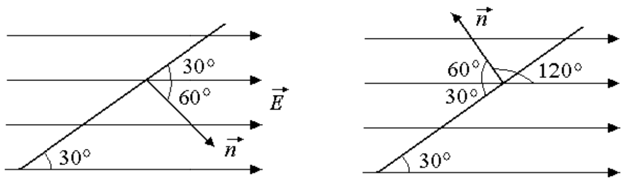
где $\theta = \widehat{\vec{n},\, \vec{u}(\vec{r})}$ – угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{u}(\vec{r})$.

Выражение (1) можно также представить в виде

$$\Phi = (\vec{u}(\vec{r}), \vec{n})\cdot\Delta S,$$

где $(\vec{u}(\vec{r}), \vec{n})$ – скалярное произведение векторов $\vec{u}(\vec{r})$ и $\vec{n}$.

Задача 4.1. Напряженность однородного электрического поля равна $\vec{E}$. Чему равен поток векторного поля напряженности (или просто поток напряженности) через квадрат со стороной *l*, плоскость которого расположена под углом α = 30° к направлению поля. Направление нормали указано на рис. 4.6.



а *б*

Рис. 4.6

Решение.

а) $\Phi = \Delta S \cdot E \cdot \cos(\vec{E}\,\hat{;}\,\vec{n}) =$ $= l^2 E \cos 60° = \dfrac{l^2 E}{2}$;

б) $\Phi = \Delta S \cdot E \cdot \cos(\vec{E}\,\hat{;}\,\vec{n}) =$ $= l^2 E \cos 120° = -\dfrac{l^2 E}{2}$.

Ответ: а) Ф = $\dfrac{l^2 E}{2}$; б) Ф = $-\dfrac{l^2 E}{2}$.

Физический смысл потока векторного поля

Пример. Введем векторное поле $\vec{u}(\vec{r})$, у которого модуль $\vec{u}$ в точке $\vec{r}$ есть число дробинок, пересекающих за единицу времени единичную площадку, перпендикулярную вектору $\vec{u}$, а направление $\vec{u}$ совпадает с направлением скорости дробинок в данной точке (рис. 4.7).

Покажем, что в данном случае поток вектора $\vec{u}$ через площадку Δ*S* – это число дробинок, пересекающих площадку в направлении нормали в единицу времени.

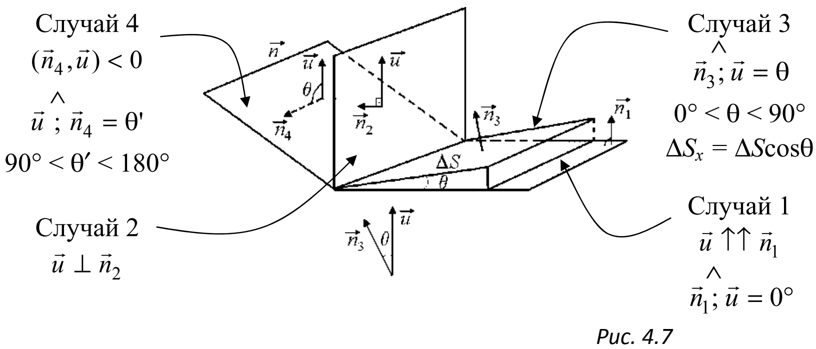


Рис. 4.7

1. Пусть $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{n}_1$ (случай 1 на рис. 4.7), тогда через площадку Δ*S* пройдет за единицу времени

$$|\vec{u}|\Delta S = |\vec{u}|\Delta S\cos 0° = (\vec{u}, \vec{n}_1)\Delta S = \Phi \text{ (дробинок).}$$

2. Пусть $\vec{u} \perp \vec{n}_2$ (случай 2 на рис. 4.7), тогда через площадку Δ*S* вообще не пройдет ни одна дробинка, т.е. пройдет ноль дробинок:

$$0 = |\vec{u}|\Delta S\cos 90° = (\vec{u}, \vec{n}_2)\Delta S = \Phi.$$

3. Пусть $\vec{u}$ составляет с нормалью угол θ (случай 3 на рис. 4.7), тогда число дробинок, пересекающих площадку ΔS в единицу времени, будет равно произведению $|\vec{u}|$ на площадь проекции ΔS_x площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{u}$, т.е.

$$|\vec{u}|\Delta S_x = |\vec{u}|(\Delta S\cos\theta) = (\vec{u}, \vec{n}_3)\Delta S = \Phi.$$

Следовательно, поток вектора $\vec{u}$ через площадку ΔS – это число дробинок, пересекающих эту площадку за единицу времени в направлении нормали $\vec{n}$.

Заметим, что если $\Phi < 0$ (случай 4 на рис. 4.7), то это означает, что дробинки пересекают площадку в направлении, противоположном нормали $\vec{n}_4$.

Рассмотрим произвольную поверхность S. Разобьем ее на элементарные площадки ΔS_i, такие, чтобы в пределах каждой из них вектор $\vec{u}(\vec{r})$ менялся незначительно (рис. 4.8).

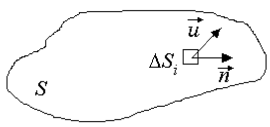


Рис. 4.8

Потоком векторного поля $\vec{u}(\vec{r})$ через произвольную поверхность S называется сумма потоков через каждую элементарную площадку, на которые разбита поверхность S*, при устремлении площади каждой площадки ΔS_i к нулю.*

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i (\vec{u}(\vec{r}), \vec{n}_i)\Delta S_i,$$

где $\vec{n}_i$ – нормаль к ΔS_i, а символ lim (limit) означает «предел».

Для удобства записи вводят следующие обозначения:

$$\Phi = \int_S (\vec{u}, \vec{n}) dS = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i (\vec{u}(\vec{r}), \vec{n}_i)\Delta S_i,$$

где символ $\int_S$ называется *интегралом по поверхности S.*

Пусть поверхность S замкнутая и нормаль $\vec{n}_i$ всегда направлена наружу, тогда поток через поверхность S есть полное число дробинок, вылетающих наружу из объема, ограниченного поверхностью S, за единицу времени.

Заметим, что если $\Phi > 0$, то это означает, что дробинок вылетает больше, чем влетает, т.е. внутри находится источник дробинок – ружье. Если $\Phi = 0$ – дробинок вылетает и влетает поровну. Если $\Phi < 0$, то дробинок влетает больше, чем вылетает, т.е. внутри находится поглотитель дробинок – мишень.

Задача 4.2. Вычислить поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда $+q$ через замкнутую поверхность S, имеющую форму узкой усеченной пирамиды (рис. 4.9). Основания пирамиды считать квадратами со сторонами a и b ($a \ll r_a$, $b \ll r_b$); $\vec{n}_{бок} \perp \vec{E}_{бок}$; $\vec{E}_b \uparrow\uparrow \vec{n}_b$; $\vec{E}_a \uparrow\downarrow \vec{n}_a$.

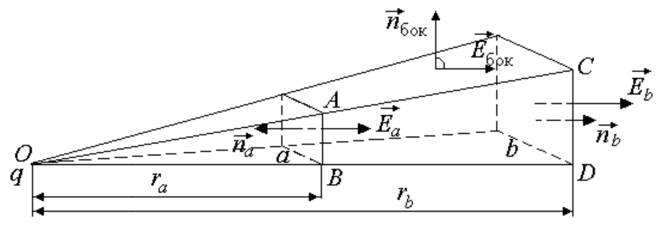


Рис. 4.9

Решение. $\Phi_S = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_{бок}$. Поскольку $\vec{n}_{бок} \perp \vec{E}_{бок}$, то поток через боковые грани равен нулю.

$$\Phi_a = (\vec{E}_a, \vec{n}_a)a^2 = -E_a a^2, \text{ так как } \vec{E}_a \uparrow\downarrow \vec{n}_a;$$

$$\Phi_b = (\vec{E}_b, \vec{n}_b)b^2 = E_b b^2, \text{ так как } \vec{E}_b \uparrow\uparrow \vec{n}_b;$$

$$E_a = k\frac{q}{r_a^2}; \qquad E_b = k\frac{q}{r_b^2};$$

$$\Phi_S = \Phi_a + \Phi_b = -E_a a^2 + E_b b^2 = -k\frac{q}{r_a^2}a^2 + k\frac{q}{r_b^2}b^2 = kq\left(\frac{b^2}{r_b^2} - \frac{a^2}{r_a^2}\right).$$

Поскольку $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, то $\dfrac{a}{r_a} = \dfrac{b}{r_b}$. Отсюда

$$\Phi_S = kq\left(\frac{b^2}{r_b^2} - \frac{a^2}{r_a^2}\right) = 0.$$

Ответ: $\Phi_S = 0$.

Задача 4.3. Изменится ли результат задачи 4.2, если нормали $\vec{n}_a$ и $\vec{n}_b$ будут не параллельны вектору $\vec{E}$, т.е. если основания пирамиды будут как бы перекошены?

Решение. Ограничимся случаем, когда перекошено только нижнее основание (рис. 4.10).

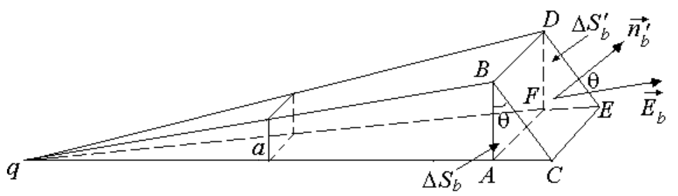


Рис. 4.10

Как видно из ΔABC, $BC = AB/\cos\theta$, а значит, площадь «перекошенного» основания *BDEC* равна

$$\Delta S_b' = \Delta S_b / \cos\theta,$$

где ΔS_b – площадь старого основания *ABDF.* Тогда поток через «перекошенное» основание составит

$$\Phi_b' = (\vec{E}_b, \vec{n}_b')\Delta S_b' = E_b \cos\theta \frac{\Delta S_b}{\cos\theta} = E_b \Delta S_b = k\frac{q}{r_b^2}b^2,$$

т.е. поток через нижнее основание не изменится: $\Phi_b' = \Phi_b$, следовательно, не изменится и полный поток.

Ответ: $\Phi_S = 0$.

Задача 4.4. Вычислить поток напряженности электростатического поля точечного заряда через *произвольную* замкнутую поверхность *S* для случая, когда заряд находится снаружи.

Решение. Объем, ограниченный поверхностью S, можно представить себе состоящим из большого числа очень узких усеченных пирамид с «перекошенными» основаниями, вплотную прилегающих друг к другу, а поверхность S – это совокупность верхних и нижних «оснований» этих пирамид (рис. 4.11). Поэтому $\Phi_S = 0$.

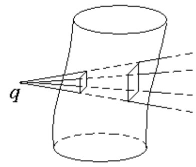


Рис. 4.11

Задача 4.5. Замкнутая поверхность S_1 целиком находится внутри замкнутой поверхности S_2. Точечный заряд находится внутри поверхности S_1 (рис. 4.12,*а*). Доказать, что поток вектора напряженности электрического поля заряда q через поверхность S_1 равен потоку через поверхность S_2: $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$.

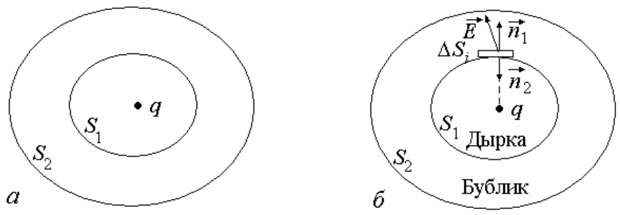


Рис. 4.12

Доказательство. Условно назовем объем, находящийся внутри поверхности S_1, «дыркой», а объем, заключенный между поверхностями S_1 и S_2 – «бубликом» (рис. 4.12,*б*).

1. Покажем, что поток напряженности электрического поля, «вытекающий» из «дырки» через поверхность S_1, равен потоку, «вытекающему» из «бублика» через поверхность S_1, взятому со знаком минус.

Разобьем поверхность S_1 на малые площадки ΔS_i $(\sum_i S_i = S_1)$. Рассмотрим площадку ΔS_i на поверхности S_1. Пусть $\vec{n}_1$ – нормаль к площадке ΔS_i, направленная наружу из «дырки», а $\vec{n}_2$ – нормаль к площадке ΔS_i, направленная наружу из «бублика». Очевидно, что $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$.

Поток, «вытекающий» из «дырки» через ΔS_i, равен

$$\Delta\Phi_{\text{дырки}} = (\vec{n}_1, \vec{E})\Delta S_i ,$$

а поток, «вытекающий» из «бублика» через ΔS_i, равен

$$\Delta\Phi_{\text{бублика}} = (\vec{n}_2, \vec{E})\Delta S_i = -(\vec{n}_1, \vec{E})\Delta S_i ,$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля в том месте, где находится площадка ΔS_i. Как видим, $\Delta\Phi_{\text{дырки}} = -\Delta\Phi_{\text{бублика}}$.

Поскольку последнее равенство справедливо для произвольной площадки ΔS_i, то, суммируя по всем малым площадкам, получим

$$\Phi_{S_1}^{\text{дырки}} = -\Phi_{S_1}^{\text{бублика}} = +\Phi_{S_1} .$$

2. Поток через поверхность, ограничивающую «бублик» со всех сторон, равен нулю, так как поверхность бублика – это замкнутая поверхность, не содержащая заряда. Тогда

$$\Phi_{\text{бублика}} = \Phi_{S_1}^{\text{бублика}} + \Phi_{S_2}^{\text{бублика}} = -\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} \text{ и т.д.}$$

Задача 4.6. Внутри произвольной замкнутой поверхности S находится точечный заряд $q > 0$ (рис 4.13). Определить поток вектора напряженности $\vec{E}$ через эту поверхность.

Решение. Окружим заряд q сферой радиуса r, целиком лежащей внутри поверхности S. Согласно решению задачи 4.5 поток через поверхность S равен потоку через сферу. Учитывая, что в каждой точке сферы напряженность $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и направлена вдоль радиуса, а площадь поверхности сферы S = = $4\pi r^2$, получим

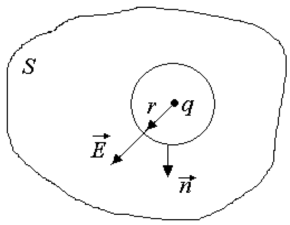


Рис. 4.13

Φ_S = (поток из сферы) = $E(r)(4\pi r^2)$ =

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Ответ: $\Phi_S = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

(Вот где оказался удобным коэффициент $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$!)

Заметим, что если заряд q – отрицательный, то $\vec{E}(r)$ направлена у центру сферы $\vec{E} \downarrow\uparrow \vec{n}$ и $\Phi_S = -\dfrac{|q|}{\varepsilon_0}$, но если учесть, что $q < 0$, то можно записать $\Phi_S = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

Вывод: поток напряженности поля точечного заряда q через *любую* замкнутую поверхность S равен:

1) нулю, если заряд расположен снаружи;
2) q/ε_0, если заряд расположен внутри, где заряд q берется с учетом знака.

Задача 4.7. Определить поток напряженности поля, созданного двумя точечными зарядами q_1 и q_2, через произвольную замкнутую поверхность S (рис. 4.14).

Решение. Рассмотрим поток $\Delta\Phi$ вектора $\vec{E}$ через малую площадку ΔS:

$$\Delta\Phi = (\vec{E}, \vec{n})\Delta S = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{n})\Delta S =$$

$$= (\vec{E}_1, \vec{n})\Delta S + (\vec{E}_2, \vec{n})\Delta S = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2,$$

где $\Delta\Phi_1$ и $\Delta\Phi_2$ – потоки напряженности поля соответственно зарядов q_1 и q_2 через площадку ΔS. Поскольку всю поверхность S можно представить как совокупность малых площадок ΔS_i, то

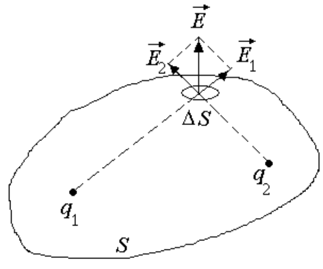


Рис. 4.14

$$\Phi_S = \Phi_S^1 + \Phi_S^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}.$$

Ответ: $\Phi_S = \dfrac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$.

Заметим, что если один из зарядов находится снаружи, то поток напряженности поля, созданного этим зарядом, равен нулю.

Для произвольного числа зарядов справедлив ***закон Гаусса***:

$$\oint\limits_{\substack{\text{любая замкнутая}\\ \text{поверхность}}} (\vec{E},\vec{n})ds = \left(\frac{\begin{array}{c}\text{алгебраическая сумма зарядов}\\ \text{внутри поверхности}\end{array}}{\varepsilon_0}\right)$$

Решение задач с помощью закона Гаусса

Задача 4.8. Определить напряженность поля равномерно заряженной сферы радиуса R и зарядом $q > 0$ на расстоянии r от центра сферы (рис. 4.15). Построить график $|\vec{E}(r)|$.

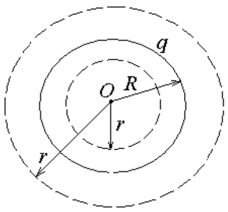


Рис. 4.15

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $r < R$. Возьмем сферу радиуса r с центром в точке O и вычислим поток вектора $\vec{E}$ через нее. Поскольку задача сферически симметрична, то вектор $\vec{E}$ должен быть направлен по радиусу и иметь одинаковую величину в каждой точке сферы:

$$\Phi = 4\pi r^2 |\vec{E}|.$$

По закону Гаусса

$$\Phi = (\text{заряд внутри сферы})/\varepsilon_0.$$

Поскольку внутри сферы заряда нет, то

$$\Phi = 0/\varepsilon_0 = 0.$$

Следовательно,

$$0 = 4\pi r^2 |\vec{E}| \Rightarrow |\vec{E}| = 0.$$

Итак, внутри равномерно заряженной сферы напряженность равна нулю!

2. Пусть $r > R$. Возьмем сферу радиуса r с центром в точке O. Тогда $\Phi = 4\pi r^2 |\vec{E}|$, по закону Гаусса $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$, отсюда

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

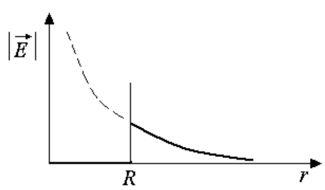


Рис. 4.16

Итак, поле вне равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центре сферы.

Построим график $|\vec{E}(r)|$ (рис. 4.16).

СТОП! Решите самостоятельно: А4, В5.

Задача 4.9. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2 (рис. 4.17). Заряд внутренней сферы равен q_1, а внешней q_2. Построить график зависимости проекции вектора напряженности $\vec{E}$ на ось $\vec{r}$, проходящую через центр сфер для случаев: а) $q_1 > 0$, $q_2 > 0$; б) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$, $q_1 = -q_2$; в) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$, $|q_1| < |q_2|$; г) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$, $|q_1| > |q_2|$. Графики строить только в области $r > 0$.

Решение.

1. $0 < r < R_1$. Возьмем сферу радиуса r. Тогда

$$|\Phi| = 4\pi r^2 |\vec{E}|, \quad \Phi = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0,$$

$$|\vec{E}| = 0, \ E_r = 0.$$

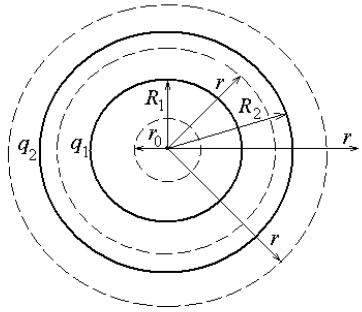


Рис. 4.17

2. $R_1 < r < R_2$. Возьмем сферу радиуса r. Поскольку задача сферически симметричная, то вектор $\vec{E}$ должен быть направлен вдоль радиуса сферы. При этом возможны два случая: либо $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{n}$, либо $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{n}$, где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к сфере.

Проекция вектора $\vec{E}$ на ось r равна

$$E_r = (\vec{E}, \vec{n}) = \begin{cases} +|\vec{E}|, \text{ если } \vec{E} \uparrow\uparrow \vec{n}, \\ -|\vec{E}|, \text{ если } \vec{E} \uparrow\downarrow \vec{n}. \end{cases}$$

Тогда поток вектора $\vec{E}$ через сферу можно записать как $\Phi = 4\pi r^2 E_r$. По теореме Гаусса $\Phi = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0}$, отсюда

$$4\pi r^2 E_r = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где q_1 берется с учетом знака.

3. $r > R_2$. Тогда $\Phi = 4\pi r^2 E_r$, $\Phi = \dfrac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$ (заряды q_1 и q_2 берутся с учетом знака). Отсюда

$$4\pi r^2 E_r = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Построим графики $E_r(r)$ для случаев а)–г) (рис. 4.18).

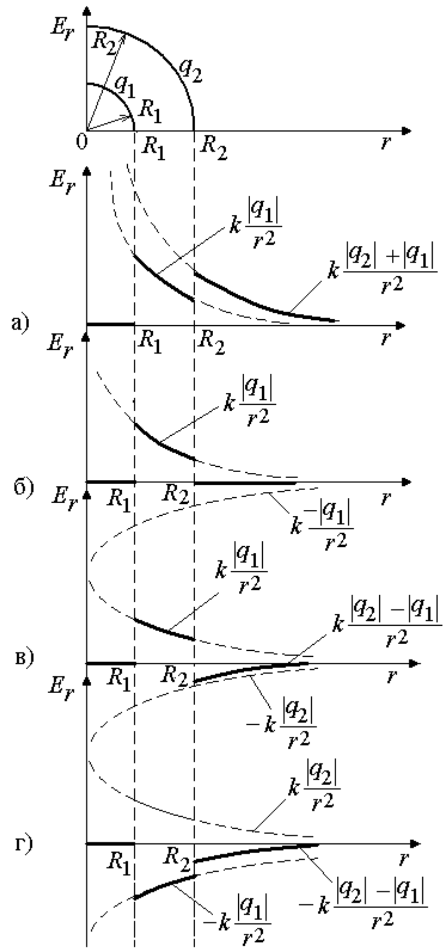


Рис. 4.18

СТОП! Решите самостоятельно: В6.

Задача 4.10. Определить напряженность поля равномерно заряженной бесконечной нити с линейной плотностью заряда λ на расстоянии *r* от нее.

Решение. Поскольку задача имеет осевую симметрию, то вектор напряженности $\vec{E}(r)$ должен быть направлен перпендикулярно нити и иметь одинаковые значения во всех точках цилиндрической поверхности радиуса *r*, окружающей нить (рис. 4.19). Вычислим поток вектора $\vec{E}$ через цилиндр высотой *l*, окружающий нить.

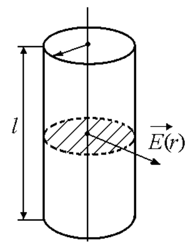


Рис. 4.19

Отметим, что поскольку $\vec{E}$ перпендикулярен нити, то поток через верхнее и нижнее основания равен *нулю.* Поток через цилиндрическую поверхность равен $\Phi = |\vec{E}(r)|\, S_{\text{цил}} = |\vec{E}(r)| \cdot 2\pi r l$.

По закону Гаусса

$$\Phi = \frac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}(r)| \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}(r)| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Ответ: $|\vec{E}(r)| = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

СТОП! Решите самостоятельно: С2.

Задача 4.11. Определить напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ на расстоянии *r* от нее (рис. 4.20).

Решение. Возьмем цилиндр с площадью основания *S* и высотой 2*r*, среднее сечение которого лежит на заряженной плоскости. Вычислим поток вектора $\vec{E}$. Из соображений симметрии ясно, что $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости, а значения $|\vec{E}|$ на верхнем и нижнем основаниях цилиндра равны. Поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как $\vec{n}_{\text{бок}} \perp \vec{E}$. Отсюда

$$\Phi = |\vec{E}|S + |\vec{E}|S = 2|\vec{E}|S.$$

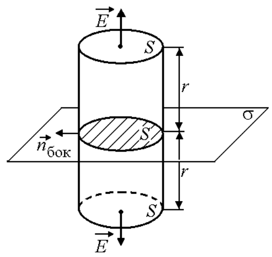


Рис. 4.20

По закону Гаусса $\Phi = \dfrac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0}$. Поскольку $q_{\text{внутри}} = \sigma S$, получаем

$$\frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = 2|\vec{E}|S \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Ответ: $|\vec{E}| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Отметим, что $|\vec{E}|$ не зависит от расстояния до плоскости!

СТОП! Решите самостоятельно: А1, А2, А5.

Задача 4.12. Поле создано парой параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей с плотностями зарядов: а) +σ и +σ; б) +σ и –σ. Определить напряженность поля между плоскостями и снаружи.

Решение. Изобразим векторы напряженности полей, создаваемых плоскостями 1 и 2 внутри и снаружи (рис. 4.21).

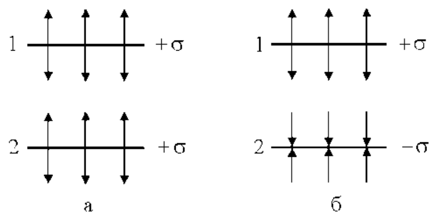


Рис. 4.21

Согласно решению задачи 4.11 $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Тогда:

а) (рис. 4.21,*а*) внутри $\vec{E}_1 \downarrow\uparrow \vec{E}_2$, снаружи $\vec{E}_1 \uparrow\uparrow \vec{E}_2$, следовательно,

$$E_{\text{общ}}^{\text{вн}} = |\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = 0;$$

$$E_{\text{общ}}^{\text{снар}} = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

б) (рис. 4.21,*б*) внутри $\vec{E}_1 \uparrow\uparrow \vec{E}_2$, снаружи $\vec{E}_1 \downarrow\uparrow \vec{E}_2$, следовательно,

$$E_{\text{общ}}^{\text{вн}} = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$E_{\text{общ}}^{\text{снар}} = |\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = 0.$$

Ответ: а) $E_{\text{вн}} = 0$, $E_{\text{снар}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$; б) $E_{\text{вн}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $E_{\text{снар}} = 0$.

СТОП! Решите самостоятельно: А3, В2, С1.

Задача 4.13. Определить напряженность равномерно объемно заряженного шара радиуса *R* с объемной плотностью заряда ρ на расстоянии *r* от центра шара (рис. 4.22). Построить график *E*(*r*).

Решение. 1. Возьмем сферу радиуса *r* < *R*, тогда

$$\Phi = |\vec{E}(r)|\, 4\pi r^2.$$

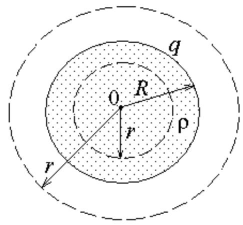


Рис. 4.22

По закону Гаусса $\Phi = \frac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0}$. Так как

$$q_{\text{внутри}} = \rho V_{\text{сферы радиуса } r} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3,$$

то

$$\Phi = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}; \qquad |\vec{E}(r)| \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}(r)| = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Таким образом, внутри шара $|\vec{E}(r)|$ – линейная функция.

2. Возьмем сферу радиуса *r* > *R,* тогда

$$\Phi = |\vec{E}(r)|\, 4\pi r^2; \qquad \Phi = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0};$$

$$|\vec{E}(r)| \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}(r)| = \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}.$$

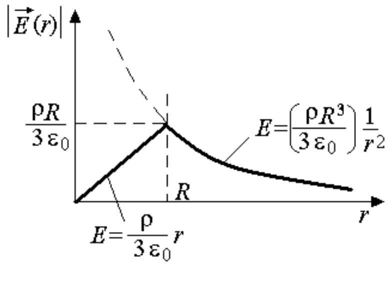


Рис. 4.23

Учитывая, что полный заряд шара $Q = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho$, можно представить выражение для $\vec{E}$ в виде

$$|\vec{E}(r)| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

т.е. поле такое же, как и у точечного заряда *Q*, помещенного в центр шара.

График показан на рис. 4.23.

СТОП! Решите самостоятельно: С4, С5, С6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. Найти напряженность поля заряженной бесконечной пластины, если поверхностная плотность заряда на ней равна 354 нКл/м^2.

А2. Поле равномерно заряженной плоскости действует в вакууме на заряд 0,20 нКл с силой $2{,}26\cdot10^{-5}$ Н. Определить напряженность поля и поверхностную плотность заряда на пластине.

А3. Бесконечные плоскости *1* и *2* параллельны друг другу и заряжены положительным электричеством с одинаковой плотностью σ (рис. 4.24). Найти напряженность в точках *А* и *В.*

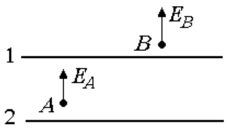


Рис. 4.24

А4. Напряженность электрического поля у поверхности Земли равна 130 Н/Кл. Определить заряд Земли, если ее радиус 6400 км. Считать, что Земля имеет сферическую форму и заряд ее равномерно распределен по поверхности.

А5. Как будет двигаться небольшое тело с зарядом *q,* помещенное в поле бесконечной заряженной плоскости? Силой тяжести пренебречь.

Задачи средней трудности

В1. Равномерно заряженные пластины находятся на небольшом расстоянии друг от друга (см. рис. 4.24). Найти плотности их зарядов, зная, что E_A = 3000 Н/Кл, E_B = 1000 Н/Кл. Точки *А* и *В* лежат вблизи пластин.

В2. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ_1 = 1,0 нКл/м^2, σ_2 = 3,0 нКл/м^2. Определить напряженность: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

В3. Решить задачу В2, если $\sigma_1 = \sigma_2$ = 2,65 мкКл/м^2.

В4. Определить напряженность электрического поля, создаваемого тремя бесконечными параллельными плоскостями в точках *A,B,C,D* (рис. 4.25). Поверхностные плотности зарядов σ, 2σ и –3σ.

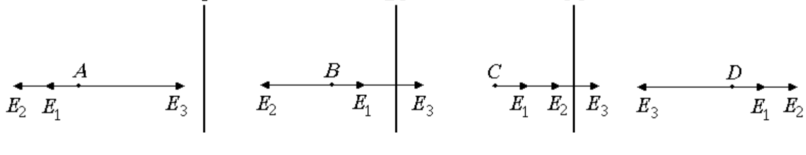


Рис. 4.25

В5. Электрический заряд $9{,}0\cdot10^{-9}$ Кл равномерно распределен по поверхности шара радиусом 1,0 м. Чему равна напряженность поля у поверхности шара? на расстоянии 2,0 м от центра шара? внутри шара?

В6. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами (рис. 4.26). Найти напряженность в точках *O*, *A*, *B*, зная, что заряды сфер равны Q_1 и Q_2, а расстояния *OA* и *OB* равны l_1 и l_2.

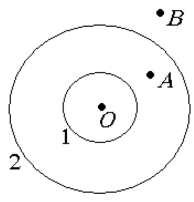


Рис. 4.26

Задачи трудные

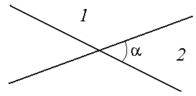


Рис. 4.27

С1. Две пересекающиеся под углом α бесконечные плоскости делят пространство на четыре области (рис. 4.27). Чему равна напряженность электрического поля в областях *1* и *2*, если поверхностная плотность заряда плоскостей $\pm\sigma$?

С2. Поле создано равномерно заряженной цилиндрической поверхностью (рис. 4.28) бесконечной длины, радиуса *R* и поверхностной плотностью заряда σ. Построить график зависимости напряженности поля *E* от расстояния до оси цилиндра *r*.

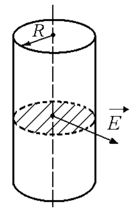


Рис. 4.28

С3. Поле создано равномерно объемно заряженным шаром радиусом R_1 и зарядом $q > 0$ и концентрической равномерно заряженной сферой радиусом $R_2 > R_1$ и зарядом $Q > 0$. Построить график зависимости напряженности поля $E(r)$, где r – расстояние от центра шара до данной точки.

С4. Используя теорему Гаусса, определите напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса *R*, если объемная плотность заряда внутри цилиндра равна ρ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до оси цилиндра.

С5. Используя теорему Гаусса, определите напряженность электрического поля вне и внутри равномерно заряженной бесконечной пластины толщины *h*, если объемная плотность заряда в пластине равна ρ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до центральной плоскости пластины.

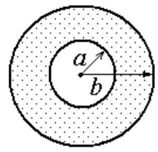


Рис. 4.29

С6. Имеется непроводящая оболочка сферической формы с одинаковой объемной плотностью заряда (рис. 4.29). Изобразите на графике зависимость $E(r)$.

С7. Сферический слой с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 равномерно заряжен электричеством с объемной плотностью заряда $\rho > 0$ (рис. 4.30). Найти $E(r)$ при $R_1 < r < R_2$.

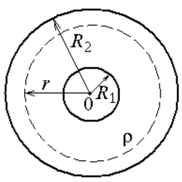


Рис. 4.30

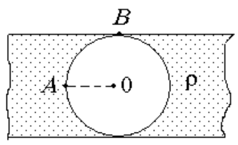


Рис. 4.31

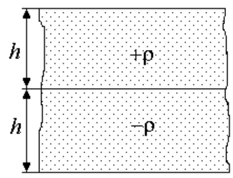


Рис. 4.32

С8. Внутри цилиндра, заряженного с постоянной объемной плотностью ρ, имеется цилиндрическая полость. Расстояние между осями цилиндра и полости равно *a*. Показать, что напряженность *E* поля внутри полости равна $E = \rho a/2\varepsilon_0$ и направлена параллельно перпендикуляру, соединяющему оси.

C9. В равномерно заряженной бесконечной пластине вырезали сферическую полость так, как показано на рис. 4.31. Толщина пластины *h*, объемная плотность заряда *р.* Чему равна напряженность электрического поля в точке *А*? в точке *В*? Найдите зависимость напряженности электрического поля вдоль прямой *ОА* от расстояния до точки *О.*

C10. Две бесконечные пластины толщины *h* заряжены равномерно по объему и сложены вместе (рис. 4.32). Объемная плотность заряда первой пластины ρ, а второй –ρ. Найдите максимальную напряженность электрического поля.

C11. Внутри шара, заряженного с постоянной объемной плотностью ρ, имеется сферическая полость. Расстояние между центрами шара и полости равно *a.* Показать, что напряженность *E* электрического поля внутри полости равна $E = \rho a/3\varepsilon_0$ и направлена вдоль прямой, соединяющей центры сфер.

C12. Найти объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли E_0 = 100 Н/Кл, а на высоте *h* = 1,0 км она уменьшается в два раза. Считать, что электрические заряды в атмосфере Земли до высоты *h* распределены равномерно.

Задачи очень трудные

D1. Найдите распределение объемной плотности электрического заряда в шаре радиуса *R* (напряженность электрического поля E_0 в шаре направлена вдоль его радиуса и не меняется по модулю).

D2. Найдите распределение объемной плотности электрического заряда в бесконечном цилиндре радиуса *R* (напряженность электрического поля E_0 в цилиндре вправлена вдоль его радиуса и не меняется по модулю).

D3. В равномерно заряженном шаре радиуса *R* вырезали сферическую полость радиуса *r*, центр которой находится на расстоянии *l* от центра шара (рис. 4.33). Объемная плотность заряда ρ. Найдите напряженность электрического поля вдоль прямой, проходящей через центр полости и центр шара. Докажите, что электрическое поле в полости однородное.

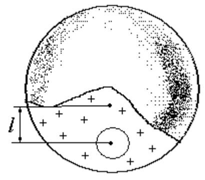


Рис. 4.33

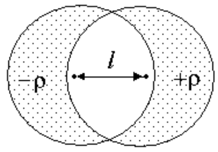


Рис. 4.34

D4. При пересечении двух шаров радиуса *R*, центры которых находятся на расстоянии *l* друг от друга, образуются два «полумесяца» равномерно заряженных разноименными электрическими зарядами (рис. 4.34). Объемная плотность электрического заряда слева –ρ, справа ρ. Докажите, что электрическое поле в области пересечения шаров однородно. Найдите напряженность этого поля.

D5. Используя результат задачи D4 и применяя метод предельного перехода: $l \to 0$, $\rho\to\infty$, $l\rho$ = const, найдите распределение заряда в сфере радиуса *R,* которое даст внутри сферы однородное электрическое поле напряженности *E.* Как связана с напряженностью поля максимальная поверхностная плотность заряда?

D6. Найдите выражение для *x*-компоненты напряженности электрического поля, если плотность зарядов ρ в пространстве зависит только от *x.*

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ГАУССА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Математическая справка: что такое телесный угол?

Пусть L – некоторая замкнутая плоская линия, не имеющая самопересечений, S – некоторая точка, не принадлежащая плоскости, в которой лежит линия L (рис. 5.1).

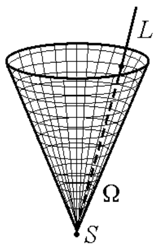


Рис. 5.1

Телесным углом Ω *называется объединение всех лучей, имеющих общее начало в точке S и пересекающих часть плоскости, ограниченную линией L. Точка S называется* ***вершиной телесного угла.***

Телесный угол измеряется площадью поверхности, вырезаемой телесным углом на сфере радиуса R с центром в вершине телесного угла. Единица измерения телесного угла называется *стерадиан* (стер).

Один стерадиан – это такой телесный угол, который вырезает на поверхности сферы радиусом R фигуру площадью, равной R^2 (рис. 5.2).

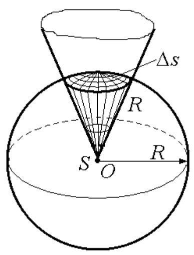


Рис. 5.2

Чтобы измерить телесный угол, надо: 1) мысленно начертить сферу радиуса R с центром в вершине телесного угла; 2) найти площадь поверхности Δs, которую вырежет на сфере телесный угол; 3) вычислить телесный угол по формуле

$$\Omega = \frac{\Delta s}{R^2} \text{ (стер).}$$

Пример 1. *Полный* телесный угол, охватывающий все пространство, равен

$$\Omega_{\text{полн}} = \frac{\text{Площадь поверхности сферы}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ (стер).}$$

Пример 2. Частным случаем телесного угла является трехгранный угол, образованный в результате пересечения трех координатных плоскостей прямоугольной системы координат $Oxyz$ (рис. 5.3). Найдем этот угол.

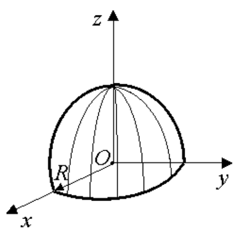


Рис. 5.3

Пересечем этот телесный угол сферой радиуса R с центром в точке O. Поверхность сферы, вырезанная трехгранным углом, составляет $\frac{1}{8}$ сферы. Тогда

$$\Delta s = \frac{1}{8} 4\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2};$$

$$\Omega = \frac{\Delta s}{R^2} = \frac{\pi R^2}{2} : R^2 = \frac{\pi}{2} \text{ (стер).}$$

Пример 3. Конус с углом α при вершине и образующей R образует телесный угол Ω. Найдем этот угол.

Пересечем конус сферой с центром в точке S и радиусом R. Тогда основание конуса будет прикрыто сферической «крышкой» – такая часть сферы называется *сферическим сегментом*.

Площадь поверхности сферического сегмента $\Delta s = 2\pi rH$, где

$$H = R - h = R - R\cos(\alpha/2)$$

– высота сегмента;

$$r = R\sin(\alpha/2)$$

– радиус основания сегмента (рис. 5.4).

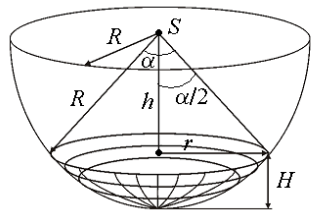


Рис. 5.4

Отсюда

$$\Delta s = 2\pi R\sin\frac{\alpha}{2}R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\Omega = \frac{\Delta s}{R^2} = 2\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) : R^2 = 2\pi\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\text{(стер).}$$

Проверим правильность формулы:

1) пусть $\alpha = 0$, тогда $\Omega = 0$ (верно!);
2) пусть $\alpha = \pi$ (рис. 5.5), тогда

$$\Omega = 2\pi\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\pi = \frac{4\pi}{2} \text{ (стер)} \quad \text{(верно!).}$$

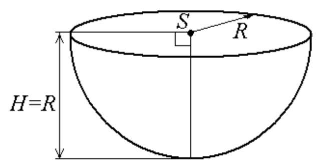


Рис. 5.5

Заметим, что в задачах с симметрией удобно искать телесный угол как часть полного телесного угла, равного 4π (стер).

Пример 4. Найдем телесный угол, под которым видна из некоторой точки бесконечная плоскость. Ясно, что если плоскость бесконечна, то

$$\Omega = \frac{\Omega_{\text{полн}}}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi.$$

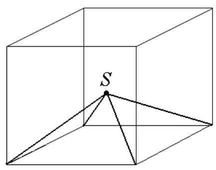


Рис. 5.6

Пример 5. Найдем телесный угол, под которым видна из центра куба одна его грань (рис. 5.6). Ясно, что *все шесть граней* «видны» под полным углом, поэтому

$$\Omega = \frac{\Omega_{\text{полн}}}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi.$$

Задачи с использованием

телесного угла

Задача 5.1. Определить поток напряженности электрического поля точечного заряда *q* через поверхность *S*, которая *видна* из точки, где находится заряд, под телесным углом Ω (рис. 5.7).

q
S
Ω
$\Phi = ?$

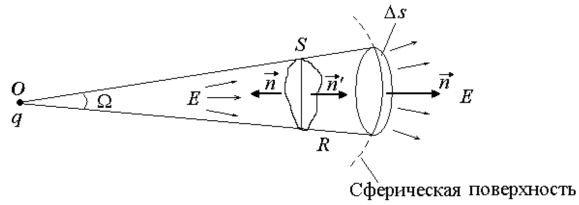


Рис. 5.7

Решение. Пересечем этот телесный угол Ω, под которым видна поверхность *S*, сферой радиуса *R* так, чтобы получилась замкнутая поверхность, у которой нижнее «основание» – поверхность $S_{(\text{наша})}$, а верхнее «основание» – сферическая поверхность радиуса *R*. Боковая поверхность образована лучами, исходящими из точки *O*.

Поток через эту поверхность Φ = 0, так как она не содержит зарядов, поэтому

$$0$$

$$\Phi = \Phi_{\text{пов}S} + \Phi_{\text{пов.сферы}} + \Phi_{\text{бок}} = 0,$$

$$\Phi_{\text{пов}S} + \Phi_{\text{пов.сферы}} = 0,$$

$$\Phi_{\text{пов}S} = -\Phi_{\text{пов.сферы}}.$$

Здесь $\Phi_{\text{пов.сферы}}$ – поток в направлении *из* замкнутой поверхности. Интересующий же нас поток через *S* проходит в направлении нормали $\vec{n}'$:

$$\Phi = -\Phi_{\text{пов}S} = +\Phi_{\text{пов.сферы}}!$$

Полный поток через всю сферу радиуса *R* от заряда *q* по теореме Гаусса равен

$$\Phi_{\text{полн}} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Поскольку поле $\vec{E}$ сферически симметрично, то поток через часть сферической поверхности, вырезанной нашим телесным углом, пропорционален площади этой поверхности:

$$\Phi_{\text{часть сферы}} = \Phi_{\text{через всю сферу}} \cdot \frac{\text{Площадь части сферы}}{\text{Площадь всей сферы}}.$$

$$\Phi = \Phi_{\text{пов.сф}} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Delta s}{4\pi R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta s}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega.$$

Ответ: $\Phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$.

Задача 5.2. Поток напряженности электрического поля через плоскую поверхность, равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда σ равен Φ. Чему равна электрическая сила, действующая на пластину в направлении, перпендикулярном ее плоскости?

σ Φ	***Решение***. Разобьем нашу площадку на маленькие участки площадью Δs_i каждый (рис. 5.8). Пусть напряженность поля $\vec{E}$ в пределах площадки Δs_i не меняется.
$F_{\perp} = ?$	

Тогда сила, с которой поле действует на площадку Δs_i, равна

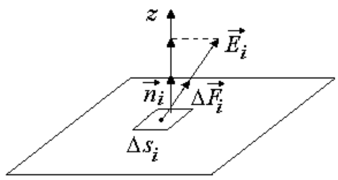


Рис. 5.8

$$\Delta\vec{F}_i = \Delta q_i \vec{E}_i = \Delta s_i \sigma \vec{E}_i .$$

Проекция этой силы на вертикальное к площадке направление оси z равна

$$\Delta F_z^i = \Delta s_i \sigma E_z^i$$

или (если ввести нормаль $\vec{n}$)

$$\Delta F_z^i = \sigma(\vec{E}_i, \vec{n}_i)\Delta s_i .$$

Полная проекция силы на направление *z* равна сумме всех проекций ΔF_z^i :

$$F_{\perp} = F_z = \sum_i \Delta F_z^i = \sum_i \sigma(\vec{E}_i, n_i)\Delta s_i = \sigma \sum_i (\vec{E}_i, n_i)\Delta s_i = \sigma\Phi .$$

Ответ: $F_{\perp} = \sigma\Phi$.

Вывод: если мы узнаем σ и Φ, то мы узнаем нормальную составляющую силы!

$$F_{\perp} = \sigma\Phi.$$

Задача 5.3. В центре куба, грани которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ, находится точечный заряд *q* (рис. 5.9). Найти силу, с которой он действует на одну из граней куба.

σ q	
$F = ?$	

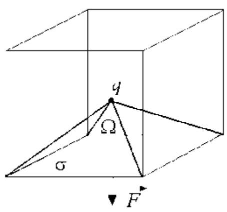


Рис. 5.9

Решение. Согласно решению задачи 5.2

$$|\vec{F}| = |F_{\perp}| = \Phi\sigma .$$

Согласно решению задачи 5.1

$$\Phi = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\Omega .$$

В силу симметрии $\Omega = \frac{1}{6}\cdot 4\pi$. Тогда

$$F = \Phi\sigma = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\Omega\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\frac{1}{6}4\pi}{4\pi}\sigma = \frac{q\sigma}{6\varepsilon_0} .$$

Ответ: $F = \dfrac{q\sigma}{6\varepsilon_0}$.

СТОП! Решите самостоятельно: С6.

Задача 5.4. Плоская площадка равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ. Найти проекцию вектора напряженности поля на направление, нормальное к площадке, созданного площадкой в точке *A*, из которой данная площадка видна под телесным углом Ω.

σ
Ω
$E_\perp = ?$

Решение. Поместим в точке *A* точечный заряд *q* (рис. 5.10). Тогда проекция силы на вертикальное к площадке направление, с которой *заряд* действует на площадку, равна

$$F_\perp^{\text{з-пл}} \underset{\text{см.зад.5.2}}{=} \sigma\Phi = \sigma \underbrace{\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi}}_{\text{см. зад. 5.1}}.$$

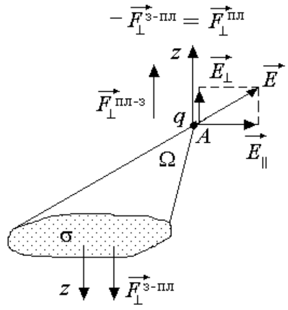


Рис. 5.10

По 3-му закону Ньютона *площадка* будет действовать на заряд в противоположном направлении с силой

$$\vec{F}_\perp^{\text{пл-з}} = -\vec{F}_\perp^{\text{з-пл}}.$$

Итак, на заряд со стороны площадки действует в вертикальном направлении сила

$$|\vec{F}_\perp| = \sigma \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi}.$$

Но, с другой стороны, $|\vec{F}_\perp| = q\,|\vec{E}_\perp|$, где $E_\perp$ – вертикальная составляющая напряженности поля, созданного площадкой. Отсюда

$$q\,|\vec{E}_\perp| = \sigma \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi} \Rightarrow E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi}.$$

Ответ: $E_\perp = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{\Omega}{4\pi}$.

Задача 5.5. Найти напряженность электрического поля в центре куба, пять граней которого заряжены с поверхностной плотностью σ, а одна не заряжена.

σ
$E = ?$

Решение. Представим поле нашего куба как суперпозицию двух полей: 1) куба, у которого все грани заряжены с поверхностной плотностью заряда +σ; 2) одной грани с поверхностной плотностью заряда (–σ).

Напряженность поля, созданного кубом, у которого все грани заряжены, в силу симметрии равна нулю. Значит, достаточно вычислить напряженность только от одной грани:

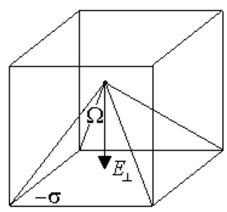


Рис. 5.11

$$E = E_\perp \underset{\text{(задача 5.4)}}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\Omega}{4\pi} \underset{\text{(задача 5.3)}}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{1}{6}4\pi}{4\pi} = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}.$$

Причем $\vec{E}$ направлена перпендикулярно к незаряженной грани (рис. 5.11).

Ответ: $E = \dfrac{\sigma}{6\varepsilon_0}$.

СТОП! Решите самостоятельно: С3.

Электрическое давление

Задача 5.6. Во внешнем однородном электростатическом поле находится равномерно заряженная бесконечная плоскость. Напряженность слева от нее равна $\vec{E}$, а справа – $3\vec{E}$ (рис. 5.12,*а*). Найти давление *p* на плоскость.

E $3E$
$p = ?$

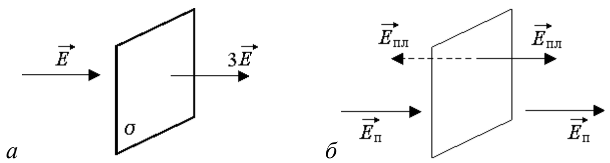


Рис. 5.12

Решение. Поле слева и справа является суперпозицией поля самой пластины и внешнего поля (рис. 5.12,*б*). Отсюда

$$E = E_п - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \quad 3E = E_п + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Из этих уравнений нетрудно получить

$$4E = 2E_п \Rightarrow E_п = 2E; \qquad 2E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = 2E\varepsilon_0.$$

Найдем давление:

$$p = \frac{F_\perp}{S} = \frac{E_п q}{S} = \frac{E_п \sigma S}{S} = 2E\sigma = 2E \cdot 2E\varepsilon_0 = 4\varepsilon_0 E^2.$$

Ответ: $p = 4\varepsilon_0 E^2$.

СТОП! Решите самостоятельно: В5, С7.

Задача 5.7. Сфера радиуса *R* равномерно заряжена зарядом *Q*. Найти давление на оболочку сферы, обусловленное силами электростатического отталкивания зарядов.

Решение. Поле внутри сферы *E* = 0, а снаружи $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}$. Рассмотрим малую площадку Δs на сфере (рис. 5.13). Она *вблизи себя* создает такое же поле, как бесконечная равномерно заряженная плоскость:

$$E_{пл} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

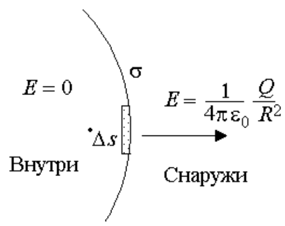


Рис. 5.13

Так как $4\pi R^2 \sigma = Q$, то $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

Таким образом, поле вне и внутри сферы вблизи площадки – это суперпозиция двух полей: поля площадки $\vec{E}_{пл}$ и поля всех остальных зарядов сферы $\vec{E}_{ост}$ (рис. 5.14). Поскольку поле внутри сферы равно нулю, то

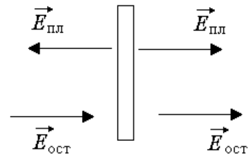


Рис. 5.14

$$E_{пл} - E_{ост} = 0 \Rightarrow E_{ост} = E_{пл} = \frac{Q}{8\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

Все остальные заряды действуют на площадку с силой

$$F = q_{пл}E_{ост} = \sigma S\frac{Q}{8\pi R^2\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi R^2}S\frac{Q}{8\pi R^2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4\varepsilon_0}S.$$

$$p = \frac{F}{S} = \left(\frac{Q^2}{32\pi^2 R^4\varepsilon_0}S\right) : S = \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4\varepsilon_0}.$$

Ответ: $p = \dfrac{Q^2}{32\pi^2 R^4\varepsilon_0}$.

СТОП! Решите самостоятельно: С8, С9.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи средней трудности

В1. При расчете потока напряженности электрического поля через замкнутую поверхность потоки, входящие внутрь, берутся со знаком минус, выходящие наружу потоки берутся со знаком плюс. Используя это правило, найдите отрицательные и положительные потоки однородного электрического поля напряженности *E* через замкнутую поверхность прямой трехгранной призмы (рис. 5.15), высота которой *h*. Передняя грань призмы, ширина которой равна *h,* перпендикулярна *E,* нижняя грань параллельна *E.*

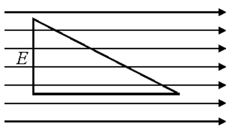


Рис. 5.15

В2. Проводящая плоскость, площадь которой 200 см^2, несет равномерно распределенный заряд 2,0 $\cdot 10^{-7}$ Кл. С какой силой будут притягиваться две такие плоскости, расположенные параллельно друг другу, если заряды на них будут иметь противоположные знаки?

В3. С какой силой притягиваются друг к другу две параллельные разноименно заряженные плоскости? Поверхностная плотность заряда плоскостей ±σ. Площадь каждой плоскости *S,* расстояние между ними много меньше размеров плоскостей. Чему равна сила, действующая на единицу площади поверхности плоскости (электрическое давление)?

В4. Напряженность электрического поля между параллельными плоскостями равна нулю, вне плоскостей равна *E.* Определите поверхностную плотность заряда на плоскостях. Чему равно электрическое давление на плоскости в СИ и в СГС?

В5. Напряженность поля между параллельными плоскостями равна $1{,}0 \cdot 10^6$ Н/Кл, вне плоскостей равна нулю. Определите электрическое давление на каждую плоскость и поверхностную плотность заряда.

В6. Расстояние между разноименно заряженными пластинами равно h (рис. 5.16). Толщина пластин тоже h, объемная плотность заряда на каждой из них $\pm\rho$. Определите силу, действующую на участок пластины единичной площади. Почему эта сила не зависит от толщины пластины, если ρh =const?

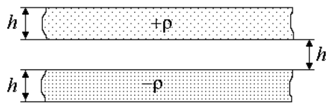


Рис. 5.16

Задачи трудные

С1. Чему равен поток напряженности однородного электрического поля через боковую поверхность усеченного конуса, радиусы оснований которого равны R и r? Напряженность электрического поля E составляет угол α с осью конуса (рис. 5.17).

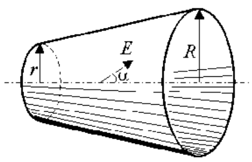


Рис. 5.17

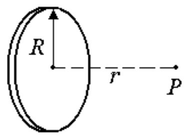


Рис. 5.18

С2. Вычислите напряженность электрического поля в точке *P,* расположенной на оси тонкого равномерно заряженного диска радиуса R на расстоянии r от его центра (рис. 5.18).

С3. Определите напряженность электрического поля в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью σ_1, а четвертая – с поверхностной плотностью заряда σ_2.

С4. Определите напряженность электрического поля на оси длинной трубы с сечением в виде правильного треугольника, если поверхностная плотность заряда граней треугольника трубы равна соответственно σ_1, σ_2, σ_3.

С5. Определите напряженность электрического поля в вершине конуса с углом при вершине α и высотой h, равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ.

С6. С какой силой действует на каждую грань тетраэдра заряд q, помещенный в его центре? Поверхностная плотность заряда граней σ.

С7. Чему равна поверхностная плотность заряда и электрическое давление на границе раздела двух полей напряженности: E и $2E$; E и $-2E$? Поверхностная плотность заряда во втором случае в три раза больше. Почему же электрическое давление в обоих случаях одинаково?

С8. Какой заряд Q можно сообщить капле радиуса R, если коэффициент поверхностного натяжения равен σ?

С9. Мыльный пузырь имеет радиус 5,0 мм. Какой заряд ему надо сообщить, чтобы он стал раздуваться? Коэффициент поверхностного натяжения σ = 0,040 Н/м.

C10. Бесконечная равномерно заряженная плоскость имеет отверстие диаметром d . Плоскость действует на положительный заряд, находящийся на оси отверстия на расстоянии l от плоскости, с силой F. В каком случае эта сила больше: при $l = 5d$ или при $l = 10d$?

C11. Какой заряд можно разместить на единице длины длинной цилиндрической оболочки радиуса R, если при накачивании ее газом она выдерживает давление p?

Задачи очень трудные

D1. С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани куба? тетраэдра? Поверхностная плотность заряда граней σ, длина ребра l.

D2. В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой σ, поместили заряд q (рис. 5.19). С какой силой этот заряд действует на полусферу?

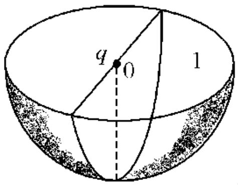


Рис. 5.19

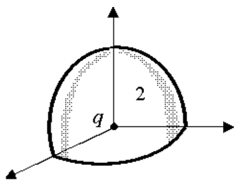


Рис. 5.20

D3. В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой σ, поместили заряд q (см. рис. 5.19). С какой силой этот заряд действует на половину полусферы?

D4. В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой σ, поместили заряд q (рис. 5.20). С какой силой этот заряд действует на четвертую часть полусферы?

D5. Определите напряженность электрического поля, создаваемого: а) полусферой в центре сферы; б) половиной полусферы в центре; в) четвертой частью полусферы в центре. Поверхностная плотность заряда σ.

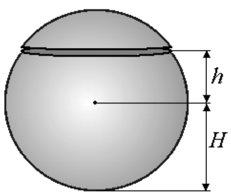


Рис. 5.21

D6. Определите напряженность электрического поля в центре равномерно заряженного полушария с объемной плотностью заряда ρ.

D7. Равномерно заряженная сфера радиуса R разрезана на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии h от центра сферы (рис. 5.21). Найдите силу, с которой отталкиваются друг от друга эти части. Полный заряд сферы Q. Какой минимальный заряд нужно поместить в центр сферы, чтобы ее части не разлетались?

D8. Известно, что за год Земля выделяет тепловую энергию, примерно равную $Q = 8{\cdot}10^{20}$ Дж. Не строя последовательной теории этого явления, можно рассмотреть несколько весьма упрощенных моделей, позволяющих сделать правильные оценки по порядку величины. В качестве примера рассмотрим модель, согласно которой все тепло создается и результате распада радиоактивных веществ, однородно распределенных по объему земного шара: кинетическая энергия испускаемых ими частиц полностью переходит в тепло. По существующим оценкам температура в центре Земли примерно равна 2500 °С, а теплопроводность земных пород в среднем равна 0,03 Дж/см·с·град. Находится ли описанная выше модель в согласии с этими оценками?

§ 6. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Автор: Пусть имеется поле, созданное точеным зарядом *Q*. В этом поле другой точечный заряд *q* перемещается из точки *1* в точку *2* по некоторой кривой *L* (рис. 6.1). Как найти работу поля?

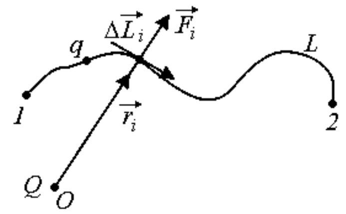


Рис. 6.1

Читатель: Я не понимаю, каким образом заряд *q* двигался по столь замысловатой траектории? Ведь если на него ничто не действует, кроме заряда *Q*, а в начальный момент он покоился в точке *1*, то он должен бы двигаться по прямой, соединяющей эти заряды: к заряду *Q*, если заряды разноименные, и от него, если они одноименные.

Автор: А никто не утверждает, что, кроме заряда *Q*, на заряд *q* ничто не действует! Вы могли бы, например, взять заряд *q* в руку и перенести его из точки *1* в точку *2* по любой, самой замысловатой траектории. Но нас сейчас интересует только работа силы, с которой заряд *Q* действует на заряд *q*, а работа остальных сил нам сейчас не интересна.

Читатель: Тогда надо разбить траекторию *L* на малые кусочки ΔL_i, такие, что в пределах каждого из них силу $\vec{F}_i$ со стороны заряда *Q* можно считать постоянной. На каждом таком участке работа этой силы будет равна

$$\Delta A_i = (\vec{F}_i, \Delta\vec{L}_i),$$

а полная работа

$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i (\vec{F}_i, \Delta\vec{L}_i).$$

Автор: Ваш подход, безусловно, правильный, но уж очень трудоемкий, если учесть, что кривая *L* достаточно замысловатая. Нельзя ли попроще? Ведь силовое поле, созданное зарядом *Q*, является центральным, то есть в каждой точке сила, действующая на заряд *q*, направлена так, что ее продолжение проходит через точку, в которой находится заряд *Q* – ЦЕНТР поля. А всякое центральное поле обладает одним очень важным свойством: работа в нем НЕ ЗАВИСИТ от формы траектории, по которой движется тело, а зависит только от начального и конечного положения тела. Докажем это.

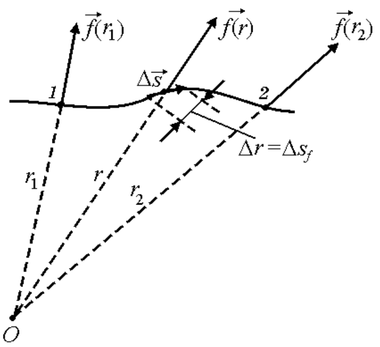


Рис. 6.2

Пусть имеется произвольное центральное поле с центром в точке *O* и пусть величина силы, действующей на тело, движущееся в этом поле, зависит только от расстояния r между центром поля и телом. Пусть эта зависимость имеет вид

$$f = f(r),$$

в нашем случае

$$f = kQq\frac{1}{r^2}.$$

Пусть тело движется по некоторой траектории из точки *1* в точку *2*. Вычислим работу поля на малом перемещении $\Delta\vec{s}$ (рис. 6.2).

Пусть Δs_f – проекция вектора перемещения $\Delta\vec{s}$ на направление вектора силы $\vec{f}(r)$, тогда

$$\Delta A = f(r)\Delta s_f .$$

Но проекция вектора $\Delta\vec{s}$ на направление действия силы в данном месте, то есть на направление радиуса-вектора, соединяющего центр поля с точкой, в которой в данный момент находится тело, равна Δr – приращению расстояния тела от точки *O*: $\Delta s_f = \Delta r$. Тогда

$$\Delta A = f(r)\Delta r.$$

Работа на всем пути равна

$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i)\Delta r_i .$$

Ясно, что от формы траектории эта сумма никак не зависит: она зависит только от вида функции $f(r)$ и значений r_1 и r_2. Значит, в нашем случае работа сил поля по любой траектории, которая начинается в точке *1* и кончается в точке *2*, ОДНА И ТА ЖЕ.

Читатель: Тогда надо выбрать самую простую траекторию и посчитать работу при движении по ней!

Автор: Верно!

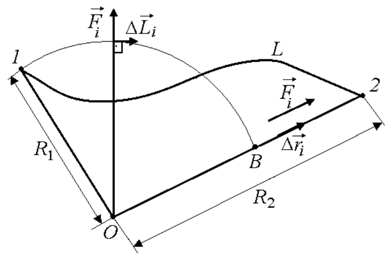


Рис. 6.3

Пусть от точки *1* до точки *B* заряд *q* движется по дуге окружности, а от точки *B* до точки *2* – по продолжению радиуса этой окружности (рис. 6.3). На дуге окружности работа равна нулю, так как на каждом малом перемещении $\Delta\vec{L}_i$: $\vec{F} \perp \Delta\vec{L}_i$.

Остается найти работу на прямолинейном участке *B2*. Заметим, что на любом малом перемещении $\Delta\vec{r}_i$ этого участка вектор силы совпадает по направлению с вектором перемещения: $\Delta\vec{r}_i \uparrow\uparrow \vec{F}_i$, поэтому работа ΔA_i на перемещении $\Delta\vec{r}_i$ равна

$$\Delta A_i = (\vec{F}_i, \Delta\vec{r}_i) = |\vec{F}_i||\Delta\vec{r}_i| = F_i\Delta r_i = kqQ\frac{1}{r_i^2}\Delta r_i .$$

Полная работа на участке *B2* равна сумме работ ΔA_i:

$$A_{B2} = \sum_{i=1}^{N}\Delta A_i = \sum_{i=1}^{N}F(r_i)\Delta r_i = \sum_{i=1}^{N}k\frac{qQ}{r_i^2}\Delta r_i .$$

Пусть расстояние между точкой *O* и точкой *1* равно R_1, а расстояние между точкой *O* и точкой *2* равно R_2, тогда в нашей сумме $r_1 = R_1$, $r_2 = R_2$, а $\Delta r_i \to 0$ для любого *i*. Вычислить такую сумму методами элементарной математики – задача очень непростая. Придется идти на хитрости.

1. Заметим, что $r_{i+1} = r_i + \Delta r_i$.

2. Поскольку $\Delta r_i \to 0$, то можно приближенно считать, что $r_i \approx \approx r_i + \Delta r_i$, тогда выражение для ΔA_i можно представить в виде:

$$\Delta A_i = k\frac{qQ\Delta r_i}{r_i^2} \approx k\frac{qQ\Delta r_i}{r_i(r_i + \Delta r_i)}.$$

3. Далее прибавим к числителю дроби и вычтем из него величину $kqQr_i$, получим:

$$\Delta A_i = \frac{kqQ\Delta r_i + kqQr_i - kqQr_i}{r_i(r_i + \Delta r_i)} = kQq\frac{(r_i + \Delta r_i) - r_i}{r_i(r_i + \Delta r_i)}.$$

4. Представим дробь в виде разности двух дробей:

$$\Delta A_i = kQq\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + \Delta r_i}\right) = kQq\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right).$$

5. А вот теперь вычислим нашу сумму:

$$A_{B2} = \sum_{i=1}^{N}\Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} kQq\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) = kQq\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) =$$

$$= kQq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \ldots + \frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N}\right).$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего, сократились, и ответ готов. Поскольку в наших обозначениях $r_1 = R_1$, а $r_N = R_2$, то

$$A_{B2} = kQq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_N}\right) = kQq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Читатель: Я немного знаком с такими понятиями высшей математики, как дифференцирование и интегрирование. Может быть, с помощью высшей математики эту задачу можно решить проще?

Автор: Конечно! Вот это решение:

$$A_{B2} = \int_{R_1}^{R_2} F(r)dr = \int_{R_1}^{R_2} k\frac{Qq}{r^2}dr = kQq\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= -k\frac{Qq}{R_2} - \left(-k\frac{Qq}{R_1}\right) = k\frac{Qq}{R_1} - k\frac{Qq}{R_2}.$$

Итак, $A_{1\to 2} = \overset{0}{\cancel{A_{1\to B}}} + A_{B\to 2} = 0 + \left(\frac{kqQ}{R_1} - \frac{kqQ}{R_2}\right).$

Читатель: А чему будет равна работа, если заряд *q* вернется в исходную точку *1* (рис. 6.4)?

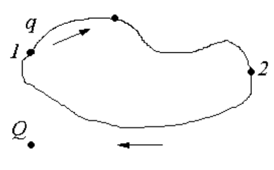


Рис. 6.4

Автор: Согласно полученной формуле

$$A_{1\to 1} = \frac{kqQ}{R_1} - \frac{kqQ}{R_1} = 0.$$

Вывод: работа сил электростатического поля, созданного точечным зарядом *Q*, по перемещению другого заряда *q* по замкнутой траектории равна нулю.

К этому же выводу можно придти по-другому. Если допустить, что работа сил электростатического поля по замкнутому контуру не равна нулю, то сразу же создается вечный двигатель.

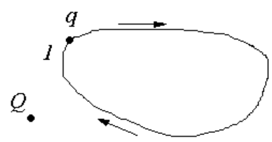


Рис. 6.5

Делаем желоб, по которому без трения скользит заряд *q*. Если $A_{1\to 1} > 0$, то за полный цикл получаем положительную работу, не вкладывая в процесс никакой энергии. При этом никаких изменений в системе зарядов *q* и *Q* со временем не происходит (ведь заряды сохраняются). А это и есть вечный двигатель!

Читатель: «Силовые» возможности поля в данной точке мы охарактеризовали, введя напряженность поля, а как охарактеризовать «энергетические» возможности поля в данной точке?

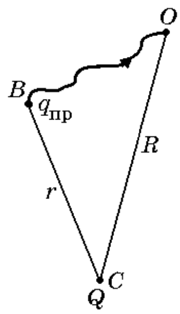


Рис. 6.6

Автор: Пусть поле создано зарядом *Q*, находящимся в точке *C* (рис. 6.6). Выберем некоторую точку *O* и назовем ее «нулевой». Возьмем некоторый пробный заряд $q_{\text{пр}}$. Тогда любой произвольной точке *B* можно поставить в соответствие работу $A_{B\to O}^{q_{\text{пр}}}$ по перемещению заряда $q_{\text{пр}}$ из точки *B* в точку *O*. Эта работа называется *потенциальной энергией* заряда $q_{\text{пр}}$ в точке *B* в поле заряда *Q*:

$$W_{B,q_{\text{пр}}} = A_{B\to O}^{q_{\text{пр}}} .$$

Пусть *CB* = *r*, *CO* = *R*, тогда

$$A_{B\to O}^{q_{\text{пр}}} = W_{B,q_{\text{пр}}} = k\frac{Qq_{\text{пр}}}{r} - k\frac{Qq_{\text{пр}}}{R} . \qquad (6.1)$$

$W_{B,q_{\text{пр}}}$ характеризует «энергетические» возможности поля в данной точке по отношению к заряду $q_{\text{пр}}$ относительно «нулевой» точки *O*. Заметим, что если $q_{\text{пр}} > 0$ и $Q > 0$, то $W_{B,q_{\text{пр}}} > 0$ при $r < R$ и $W_{B,q_{\text{пр}}} < 0$ при $r > R$.

Читатель: Где лучше (удобнее) взять точку *O*? Желательно взять ее так, чтобы в любой точке *B* потенциальная энергия $W_B^{q_{\text{пр}}}$ была положительная, если $q_{\text{пр}} > 0$ и $Q > 0$.

Автор: Лучше всего взять нулевую точку *на бесконечности*. В самом деле, если $R \to \infty$, то $k\frac{Qq_{\text{пр}}}{R} \to 0$. Тогда

$$A_{B\to 0}^{q_{\text{пр}}} = W_B^{q_{\text{пр}}} = k\frac{Qq_{\text{пр}}}{r} . \qquad (6.2)$$

Читатель: Величина $W_B^{q_{\text{пр}}}$ зависит от величины пробного заряда $q_{\text{пр}}$. Нельзя ли ввести такую величину, которая, с одной стороны, характеризовала бы энергетические возможности поля в данной точке, а с другой стороны, не зависела бы от величины пробного заряда $q_{\text{пр}}$?

Автор: Можно. Введем величину $\varphi_B = \dfrac{A_{B\to 0}^{q_{\text{пр}}}}{q_{\text{пр}}}$ и назовем ее *потенциалом* точки *B*. Она не зависит от $q_{\text{пр}}$ и *численно* равна работе поля по перемещению единичного положительного заряда из точки *B* в точку *O*, выбранную в качестве «нулевой».

Потенциалом электростатического поля *в данной точке называется физическая величина, равная отношению работы по перемещению пробного заряда из данной точки поля в выбранную «нулевую» точку к величине этого заряда.*

$$\varphi = \frac{A_{B\to 0}^{q_{\text{пр}}}}{q_{\text{пр}}}. \tag{6.3}$$

Для поля, созданного точечным зарядом, при выборе нулевой точки на бесконечности потенциал поля на расстоянии *r* от заряда φ, как видно из формулы (6.2), равен

$$\varphi = k\frac{Q}{r}. \tag{6.4}$$

Размерность потенциала:

$$\text{в СИ} \quad [\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = 1\ \text{В (вольт)};$$

$$\text{в СГС} \quad [\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{\text{эрг}}{1\,\text{СГСЭ}_q} = 1\ \text{СГСЭ}_\varphi;$$

$$1\ \text{СГСЭ}_\varphi = \frac{10^{-7}\ \text{Дж}}{\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\ \text{Кл}} = 300\ \text{В}.$$

СТОП! Решите самостоятельно: А1, В1, В2.

Читатель: До сих пор мы говорили о потенциале поля, созданного одним зарядом. А как определить потенциал поля, созданного некоторой системой точечных зарядов: Q_1, Q_2,…, Q_n?

Автор: Потенциалом поля, созданного произвольной системой точечных зарядов, мы называем (как и в случае поля, созданного одним зарядом) отношение работы поля по перемещению пробного точечного заряда из данной точки в «нулевую» точку к величине этого заряда:

$$\varphi_B = \frac{A_{B\to O}^{q_{\text{пр}}}}{q_{\text{пр}}}. \tag{6.5}$$

Задача 6.1. Поле создано системой точечных зарядов Q_1, Q_2,…, Q_n. В точке *B* потенциалы полей, созданных каждым зарядом в отдельности, равны φ_1, φ_2,…, φ_n. Найти потенциал поля в этой точке.

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$
$\varphi_B = ?$

Решение. Пусть заряд $q_{\text{пр}}$ перемещают из точки *B* в точку *O* по некоторой траектории (рис. 6.7). Рассмотрим участок $\Delta\vec{r}_i$ этой траектории, где $\vec{F}_{\text{рез}}^{\,i}$ – результирующая сила, действующая на пробный заряд на участке $\Delta\vec{r}_i$.

Согласно принципу суперпозиции

$$\vec{F}_{\text{рез}}^{\,i} = \vec{F}_1^{\,i} + \vec{F}_2^{\,i} + \ldots + \vec{F}_j^{\,i} + \ldots + \vec{F}_n^{\,i},$$

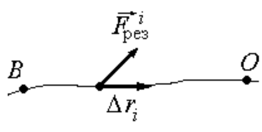


Рис. 6.7

где $\vec{F}_j^{\,i}$ – сила, действующая на пробный заряд $q_{\text{пр}}$ со стороны *j*-го заряда

Q_j. Тогда

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}^{i}_{\text{рез}}, \Delta\vec{r}_i)}{q_{\text{пр}}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}^{i}_{1} + \vec{F}^{i}_{2} + \vec{F}^{i}_{3} + \ldots + \vec{F}^{i}_{n}, \Delta\vec{r}_i)}{q_{\text{пр}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}^{i}_{1}, \Delta\vec{r}_i)}{q_{\text{пр}}} + \ldots + \frac{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}^{i}_{n}, \Delta\vec{r}_i)}{q_{\text{пр}}} =$$

$$= \frac{A_1^{B\to O}}{q_{\text{пр}}} + \ldots + \frac{A_n^{B\to O}}{q_{\text{пр}}} = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n .$$

Ответ:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i . \qquad (6.6)$$

Вывод: потенциал в данной точке электростатического поля, созданного системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности в этой точке.

Задача 6.2. Электростатическое поле создано двумя положительными зарядами q и $2q$, находящимися на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 6.8). Найти потенциалы в точках *1* и *2*, если известно, что $q = 1{,}0\cdot10^{-7}$ Кл, $a = 1{,}0$ см.

$q = 1{,}0\cdot10^{-7}$ Кл
$a = 1{,}0$ см
$\varphi_1 = ?$ $\varphi_2 = ?$

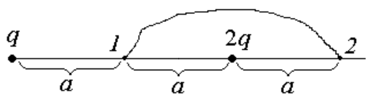


Рис. 6.8

Решение. Воспользуемся формулой (6.6) и получим:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{q} + \varphi_1^{2q} = k\frac{q}{a} + k\frac{2q}{a} = 3k\frac{q}{a} = 3\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{1{,}0\cdot10^{-7}\ \text{Кл}}{0{,}010\ \text{м}} \approx 2{,}7\cdot10^5\ \text{В};$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^{q} + \varphi_2^{2q} = k\frac{q}{3a} + k\frac{2q}{a} = \frac{7}{3}k\frac{q}{a} = \frac{7}{3}\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{1{,}0\cdot10^{-7}\ \text{Кл}}{0{,}010\ \text{м}} \approx 2{,}1\cdot10^5\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_1 = 3k\frac{q}{a} \approx 2{,}7\cdot10^5$ В; $\varphi_2 = \frac{7}{3}k\frac{q}{a} \approx 2{,}1\cdot10^5$ В.

СТОП! Решите самостоятельно: А3, А4, А6.

Задача 6.3. Заряды $+q$ находятся в трех вершинах правильной треугольной пирамиды (тетраэдра) с ребром a (рис. 6.9). Найти потенциал в четвертой вершине – точке A.

a
q
$\varphi_A = ?$

Решение. Каждый из трех зарядов создает в точке A поле, потенциал которого $\varphi = k\frac{Q}{r}$. Потенциалы этих трех полей складываются, поэтому

$$\varphi_A = 3\varphi = 3k\frac{Q}{r}.$$

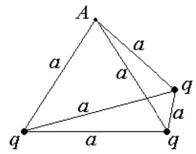


Рис. 6.9

Ответ: $\varphi_A = 3k\frac{Q}{r}$.

СТОП! Решите самостоятельно: В7, В10–В12, С5.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. Найти потенциал точки электрического поля, удаленной от заряда $1{,}7\cdot10^{-8}$ Кл на расстояние 10 см.

А2. Два равных точечных одноименных заряда по 2,0 СГСЭ$_q$ каждый находятся на расстоянии $2a$ = 100 см друг от друга. Вычислить напряженность и потенциал в точке поля *А*, находящейся на середине расстояния между зарядами.

А3. Два одинаковых отрицательных заряда $-q$ находятся на расстоянии $2a$ друг от друга. Вычислить потенциал в точке, расположенной точно посередине между ними.

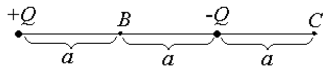


Рис. 6.10

А4. Два заряда $+Q$ и $-Q$ находятся на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 6.10). Определите потенциал поля в точках *В* и *С*.

А5. Заряд 0,10 Кл удален от заряда 0,20 Кл на расстояние 20 м. Чему равен потенциал поля в середине отрезка, соединяющего заряды?

А6. Заряды $+1{,}0\cdot10^{-8}$ Кл и $-1{,}0\cdot10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии 30 см друг от друга. Найти потенциал точки, которая находится па линии, соединяющей заряды, в 10 см от первого и 20 см от второго зарядов.

Задачи средней трудности

В1. В некоторых двух точках поля точечного заряда напряженность отличается в 4 раза. Во сколько раз отличаются потенциалы поля в этих точках?

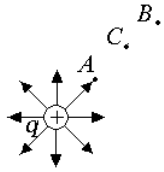


Рис. 6.11

В2. Потенциалы точек *А* и *В* равны 30 В и 20 В (рис. 6.11). Найти потенциал точки *С*, лежащей посередине между точками *А* и *В*.

В3. Точка *А* находится на расстоянии r_1 = 2,0 м, а точка *В* – на r_2 = 1,0 м от точечного заряда $q = 1{,}0\cdot10^{-6}$ Кл. Чему равна разность потенциалов точек *А* и *В*? Как она зависит от угла между прямыми *qA* и *qB*?

В4. Два одинаковых шарика диаметром d = 1,0 см каждый заряжены: один до потенциала φ_1 = –6,0 кВ, другой – до потенциала φ_2 = 6,0 кВ. Вычислить силу притяжения между этими шариками на расстоянии R =1,0 м.

В5. Два одноименных точечных заряда $11 \cdot 10^{-9}$ Кл и $22 \cdot 10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии r = 80 см друг от друга. Определить графически, в какой точке поля на прямой между зарядами абсолютные значения потенциалов полей обоих зарядов одинаковы.

В6. Расстояние между зарядами $q_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -1{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл равно 20 см. Определите напряженность E в точке, в которой потенциал равен нулю, если точка лежит на прямой, соединяющей заряды.

В7. В вершинах острых углов прямоугольного треугольника расположены одинаковые по модулю разноименные заряды по $|q|$ = 2,0 Кл. Определить потенциал φ в вершине прямого угла. Катеты равны a = 3,0 см, b = 4,0 см.

В8. Два точечных заряда по 0,10 мкКл расположены на расстоянии 6,0 см друг от друга. Найти потенциал в точке, удаленной на 5,0 см от каждого из зарядов. Принять $\varepsilon_0 = (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1}$ Кл^2/Н·м^2.

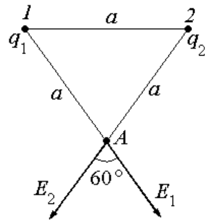


Рис. 6.12

В9. Одинаковые одноименные точечные заряды q = = $4{,}0 \cdot 10^{-7}$ Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 1,0 м. Определить значение потенциала в третьей вершине A треугольника (рис. 6.12).

В10. В вершинах квадрата со стороной l находятся четыре заряда q. Чему равен потенциал поля в центре квадрата?

В11. В вершинах квадрата расположены точечные заряды 1,33; –0,66; 0,99; –1,32 нКл. Определить потенциал поля в центре квадрата, если его диагональ равна 20 см.

В12. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a помещены заряды величиной q. Определить потенциал φ в центре шестиугольника, если: а) все заряды одинакового знака; б) положительные и отрицательные заряды чередуются.

В13. Заряды 100, 10, 1, –10, –1, –10 СГСЭ$_q$ находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2,00 см. Чему равен потенциал поля в центре шестиугольника в СИ и СГС?

В14. Во сколько раз изменятся напряженность и потенциал электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца, если его радиус увеличить вдвое, а заряд вдвое уменьшить?

В15. В трех вершинах правильного шестиугольника со стороной 10 см находятся заряды $q_1 = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ Кл, $q_2 = 4{,}0 \cdot 10^{-5}$ Кл и q_3 = = $-8{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определить потенциал в точке A (рис. 6.13).

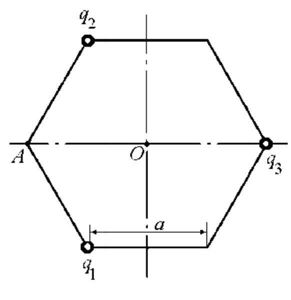


Рис. 6.13

Задачи трудные

С1. Заряды $1{,}0\cdot10^{-9}$ Кл каждый находятся в углах квадрата со стороной 10 см (рис. 6.14). Найдите разность потенциалов в поле этих зарядов между центром квадрата (*1*) и серединой одной из сторон квадрата (*2*).

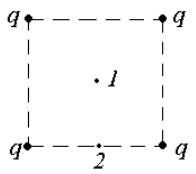


Рис. 6.14

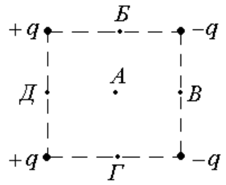


Рис. 6.15

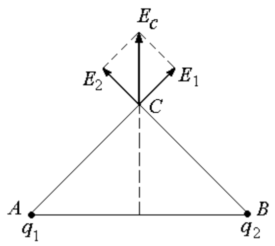


Рис. 6.16

С2. Четыре одинаковых заряда q = 2 Кл каждый расположены в вершинах квадрата со стороной a = 2 м (рис. 6.15). Вычислить потенциал поля системы зарядов точках *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*.

С3. В вершинах при основании прямоугольного равнобедренного треугольника расположены точечные заряды, одинаковые по абсолютной величине: $q_1 = q_2 = 2{,}0\cdot10^{-8}$ Кл (рис. 6.16). Расстояние между зарядами a = 0,60 м. Определить напряженность электрического поля и потенциал в вершине прямого угла и на пересечении высоты с основанием треугольника. Рассмотреть случаи одноименных и разноименных зарядов.

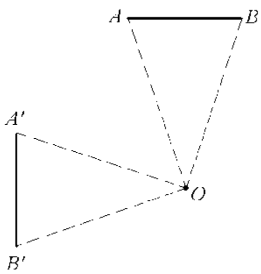


Рис. 6.17

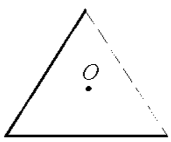


Рис. 6.18

С4. Два разноименных точечных заряда, одинаковых по абсолютной величине, находятся на расстоянии s = 20 мм друг друга. В точке пространства, отстоящей на расстоянии r_1 = 10 мм от одного и r_2 = 30 мм от другого заряда, потенциал электрического поля равен φ_0 = 0,075 В. Определить напряженность электрического поля в указанной точке пространства.

С5. Равномерно заряженный стержень *AB* создает в точке *O* электрическое поле напряженности E_0, потенциал которого равен φ_0 (рис. 6.17). Какими станут напряженность поля и потенциал в точке *O*, если в плоскости *AOB* поместить еще один такой же и так же заряженный стержень *A'B'*, причем $AO = BO = =A'O = B'O$ и $A'B' \perp AB$?

С6. Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными палочками. При этом в центре *O* треугольника (рис. 6.18) потенциал равен φ_0, а напряженность электрического поля равна E_0. Найти потенциал φ, а также модуль и направление вектора напряженности *E*, которые будут в точке *O*, если убрать одну из палочек.

Задача очень трудная

D1. Два электрических заряда $q_1 = q$ и $q_2 = -2q$ расположены друг от друга на расстоянии $l = 6a$. На плоскости, в которой находятся эти заряды, найти геометрическое место точек, где потенциал поля равен нулю.

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Чем полезен потенциал?

Пусть заряд q перемещается в электростатическом поле, созданном точечным зарядом Q. Покажем, что если $A_{2\to 0}$ – работа по перемещению заряда q из точки 2 в точку 0, то $A_{0\to 2}$ – работа по перемещению заряда q из точки 0 в точку 2 равна $A_{0\to 2} = -A_{2\to 0}$. Для этого переместим заряд q из точки 0 в точку 2 и обратно из точки 2 в точку 0 по одной и той же траектории.

Рассмотрим малое перемещение $\Delta\vec{r}_i$ (рис. 7.1). При движении из точки 2 в точку 0 работа на этом участке

$$\Delta A_i^{2\to 0} = (\vec{F}_i, \Delta\vec{r}_i),$$

а при движении из точки 0 в точку 2 работа на этом участке

$$\Delta A_i^{0\to 2} = (\vec{F}_i, (-\Delta\vec{r}_i)) = \\ = -(\vec{F}_i, \Delta\vec{r}_i) = -\Delta A_i^{2\to 0}.$$

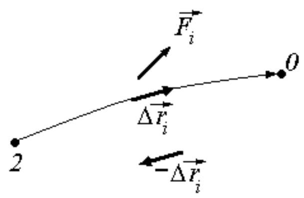


Рис. 7.1

Так как это справедливо для любого участка пути, то

$$A_{0\to 2} = -A_{2\to 0}.$$

Задача 7.1. Заряд q перемещается в электростатическом поле, созданном точечным зарядом Q, из точки 1 в точку 2. Потенциал в точке 1 равен φ_1, а в точке 2 – φ_2. Найти работу сил электрического поля.

q
φ_1
φ_2
$A_{1\text{–}2} = ?$

Решение. Переместим заряд q из точки 1 в точку 0, а затем из точки 0 в точку 2 (рис. 7.2). Тогда

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} + (-A_{20}) = \\ = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

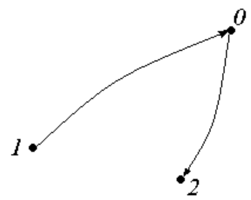


Рис. 7.2

Ответ:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{7.1}$$

Работа равна произведению заряда на убыль потенциала поля!

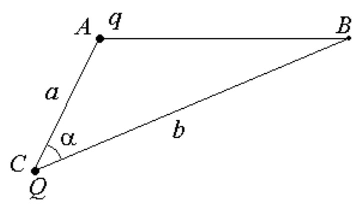
Заметим, что так считать работу очень удобно. Силы и перемещение тут не нужны.

СТОП! Решите самостоятельно: А1, А3.

Задача 7.2. Заряд Q находится в вершине C острого угла α треугольника ABC, образованного сторонами длиной $CA = a$ и $CB = b$. Из вершины A в вершину B перемещается заряд q (рис. 7.3). Найти работу сил электростатического поля.

Q
q
a
b
α
$A_{AB} = ?$

Рис. 7.3



Решение. Согласно формуле (7.1)

$$A_{AB} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\left(k\frac{Q}{a} - k\frac{Q}{b}\right).$$

Как видим, угол α – лишнее данное.

Ответ: $A_{AB} = q\left(k\frac{Q}{a} - k\frac{Q}{b}\right)$.

СТОП! Решите самостоятельно: А10, В8, В11, С4.

Задача 7.3. Точка *A*, *1* и *2* лежат на окружности радиуса *R* (рис. 7.4). Заряд q перемещается из точки *A*: а) в точку *1*; б) в точку *2*. В каком случае работа электростатического поля больше?

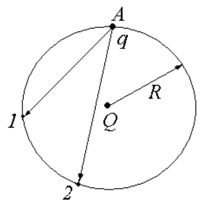


Рис. 7.4

Решение. По формуле (7.1)

$$A_{A1} = A_{A2} = q(\varphi_A - \varphi_1) = q(\varphi_A - \varphi_2) = = q\left(k\frac{Q}{R} - k\frac{Q}{R}\right) = 0,$$

так как $\varphi_A = \varphi_1 = \varphi_2 = k\frac{Q}{R}$.

Ответ: работа в обоих случаях равна нулю.

Задача 7.4. Решить задачу 7.3 при условии, что точка *A* находится: а) внутри окружности; б) вне окружности (рис. 7.5).

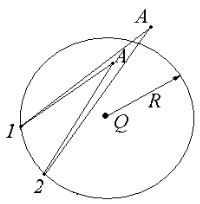


Рис. 7.5

Решение. Опять воспользуемся формулой (7.1):

1) $A_{A1} = q(\varphi_A - \varphi_1)$;
2) $A_{A2} = q(\varphi_A - \varphi_2)$.

Так как $\varphi_1 = \varphi_2 = k\frac{Q}{R}$ в обоих случаях, то работы равны.

Ответ: $A_{A1} = A_{A2}$.

СТОП! Решите самостоятельно: А8, В1, В2, В7.

Единица измерения энергии – электрон-вольт

1 электрон-вольт (эВ) – это такая энергия, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов 1 В.

Выразим 1 эВ в джоулях:

$$1\ эВ = e\cdot\Delta\varphi = 1{,}6\cdot10^{-19}\ Кл \cdot 1\ В = 1{,}6\cdot10^{-19}\ Дж.$$

Запомним:

$$1\ эВ = 1{,}6\cdot10^{-19}\ Дж. \qquad (7.2)$$

СТОП! Решите самостоятельно: А6, А7.

Задача 7.5. Какую работу надо совершить внешней силе, чтобы бесконечно медленно переместить заряд q_0 = 1,0·10^{-9} Кл из точки *1* в точку *2*, где a = 1,0 см, q = 1,0·10^{-7} Кл (рис. 7.6)?

$q_0 = 1{,}0\cdot10^{-9}$ Кл
$a = 1{,}0$ см,
$q = 1{,}0\cdot10^{-7}$ Кл

$A_{12}^{\text{внеш}} = ?$

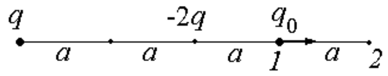


Рис. 7.6

Решение. Если заряд q_0 движется равномерно, то $F_{\text{внеш}} = -F_{\text{эл}}$, а значит, $A_{12}^{\text{внеш}} = -A_{12}^{\text{эл}}$, тогда

$$\varphi_1 = \left(k\frac{q}{3a} - k\frac{2q}{a}\right) = -\frac{5}{3}k\frac{q}{a}; \qquad \varphi_2 = \left(k\frac{q}{4a} - k\frac{2q}{2a}\right) = -\frac{3}{4}k\frac{q}{a}.$$

$$A_{12}^{\text{внеш}} = -A_{12}^{\text{эл}} = -q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0(\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= q_0\left[\left(-\frac{3}{4}k\frac{q}{a}\right) - \left(-\frac{5}{3}k\frac{q}{a}\right)\right] = \frac{11}{12}q_0 k\frac{q}{a}.$$

Подставим численные значения:

$$A_{12}^{\text{внеш}} = \frac{11}{12}\cdot 1{,}0\cdot10^{-9}\ \text{Кл}\cdot 9\cdot10^{9}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}\cdot\frac{1{,}0\cdot10^{-7}\ \text{Кл}}{0{,}010\ \text{м}} \approx 8{,}3\cdot10^{-5}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A_{12}^{\text{внеш}} = \dfrac{11}{12}q_0 k\dfrac{q}{a} \approx 8{,}3\cdot10^{-5}$ Дж.

СТОП! Решите самостоятельно: А2, А4, В6.

Читатель: А как вычислить потенциал поля, созданного распределенным зарядом?

Автор: Надо разбить заряженное тело на малые участки, каждый из которых можно считать точечным зарядом, и просуммировать алгебраически потенциалы полей, созданных каждым из этих участков.

Задача 7.6. Найти потенциал поля в центре кольца радиуса R, заряженного с линейной плотностью заряда λ.

R
λ

$\varphi_0 = ?$

Решение. Выделим на кольце участок Δl_i ($\Delta l_i \ll R$), тогда $\Delta q_i = \lambda\Delta l_i$ (рис. 7.7). Потенциал поля, созданного этим участком в точке O равен

$$\Delta\varphi_i = k\frac{\Delta q_i}{R}.$$

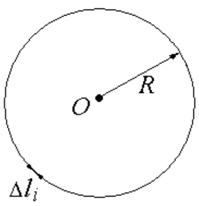


Рис. 7.7

Общий потенциал равен сумме потенциалов, созданных зарядами Δq_i:

$$\varphi = \sum_i \Delta\varphi_i = \sum_i k\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{k}{R}\sum_i \Delta q_i = \frac{k}{R}\sum_i \lambda\Delta l_i =$$

$$= \frac{k\lambda}{R}\sum_i \Delta l_i = \frac{k\lambda}{R}2\pi R = 2\pi k\lambda.$$

Ответ: $\varphi_0 = 2\pi k\lambda$.

СТОП! Решите самостоятельно: В9, D2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи легкие

А1. Какую работу совершает поле при перемещении заряда 20 нКл из точки с потенциалом 700 В в точку с потенциалом 200 В? Из точки с потенциалом –100 В в точку с потенциалом 400 В?

А2. Определить величину точечного электрического заряда, при внесении которого из бесконечности в точку электрического поля с потенциалом $3{,}2\cdot10^{4}$ В совершена работа $1{,}6\cdot10^{-2}$ Дж.

А3. Какова разность потенциалов двух точек электрического поля, если при перемещении заряда $2{,}0\cdot10^{-6}$ Кл между этими точками полем совершена работа $8{,}0\cdot10^{-4}$ Дж?

А4. Какую работу надо совершить, чтобы переместить заряд $5{,}0\cdot10^{-8}$ Кл между двумя точками электрического поля с разностью потенциалов 1600 В?

А5. При внесении заряда $1{,}0\cdot10^{-6}$ Кл из бесконечности в данное электрическое поле была произведена работа $6{,}0\cdot10^{-5}$ Дж. Каков по отношению к бесконечности потенциал точки поля, в которую внесли заряд?

А6. Какую кинетическую энергию дополнительно получит электрон, пройдя разность потенциалов 1,0 МВ?

А7. Заряженная частица после прохождения разности потенциалов 1,00 кВ приобретает энергию 8000 эВ. Определить заряд частицы, выразив его через заряд электрона.

А8. В электрическом поле точечного заряда q из точки A в точки B, C, D, E (рис. 7.8) перемещали один и тот же заряд. Сравнить работы поля при этих перемещениях заряда.

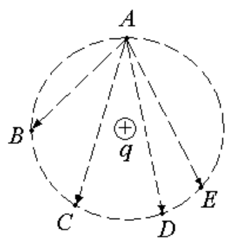


Рис. 7.8

А9. Сравнить работы поля по перемещению заряда q по каждой из линий напряженности электрического поля, показанных на рис. 7.9.

А10. Заряды 0,15 мкКл и 3,0 нКл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Какую работу совершают силы поля, если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние 10 м?

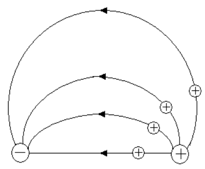


Рис. 7.9

А11. Определить напряженность однородного электрического поля, если при перемещении заряда величиной $5{,}0\cdot10^{-5}$ Кл вдоль линии напряженности на расстояние $1{,}0\cdot10^{-2}$ м была совершена работа $1{,}0\cdot10^{-2}$ Дж.

А12. На какое расстояние вдоль линии напряженности перемещен заряд $1{,}0\cdot10^{-9}$ Кл, если при этом была совершена работа $2{,}0\cdot10^{-3}$ Дж, а напряженность однородного электрического поля равна $10{,}0\cdot10^{6}$ Н/Кл?

Задачи средней трудности

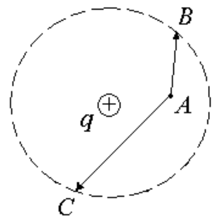


Рис. 7.10

В1. Сравнить работы поля по перемещению заряда из точки *A* в точку *B* и из точки *A* в точку *C* (рис. 7.10).

В2. Сравнить работы поля по перемещению заряда из точки *A* в точки *B*, *C*, *D* (рис. 7.11).

В3. Электрический заряд +*q* перемещен по замкнутому контуру *ABCDA* (рис. 7.12). На каких участках работа по перемещению заряда была положительной; отрицательной; равной нулю? Какова работа по перемещению заряда по всему контуру?

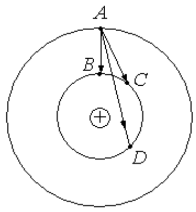


Рис. 7.11

В4. В однородном электрическом поле с напряженностью $6{,}0\cdot10^{-5}$ Кл перемещается заряд $7{,}0\cdot10^{-8}$ Кл на расстояние 8,0 см под углом 60° к линиям напряженности. Определить работу поля по перемещению этого заряда.

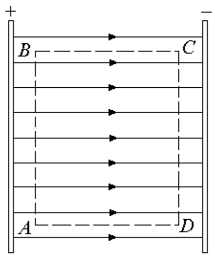


Рис. 7.12

В5. На сколько изменится кинетическая энергия заряда 1,00 нКл при его движении под действием точечного заряда 1,00 мкКл из точки, удаленной на 3,00 см от этого заряда, в точку, отстоящую на 10,0 см от него? Начальная скорость равна нулю.

В6. Расстояние между зарядами 1,00 Кл и –6,67 нКл равно 10,0 см. Какую работу надо совершить, чтобы перенести второй заряд в точку, находящуюся от первого заряда на расстоянии 1,00 м?

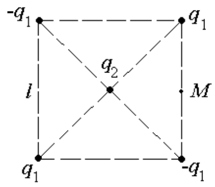


Рис. 7.13

В7. В вершинах квадрата со стороной *l* находятся два положительных и два отрицательных заряда, абсолютные величины которых равны q_1 (рис. 7.13). Какую работу следует совершить, чтобы заряд q_2 перенести из центра квадрата в точку *M*, находящуюся на середине любой из сторон?

В8. Найти потенциалы и напряженности электрического поля в точках *a* и *b*, находящихся от точечного заряда q = 167 нКл на расстояниях r_a = 5,00 см и r_b = 20,0 см, а также работу электрических сил при перемещении точечного заряда q_0 = 1,00 нКл из точки *a* в точку *b*.

В9. Поле создано тонким стержнем, который согнут в полукольцо и равномерно заряжен с линейной плотностью 20,0 нКл/м. В центре полукольца помещен точечный заряд –1,00 нКл. Определить работу, которую надо совершить для перемещения заряда из центра полукольца в бесконечность.

В10. Какую работу надо совершить внешней силой для того, чтобы медленно переместить заряд *q* из точки *A* в точку *B* в поле двух точечных зарядов q_1 и q_2 (рис. 7.14).

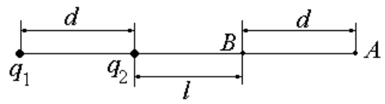


Рис. 7.14

В11. Электрическое поле образовано в вакууме двумя точечными зарядами $q_1 = 4{,}0\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2 = -0{,}50\cdot10^{-8}$ Кл (рис. 7.15). Расстояние между зарядами l = 30 см. Какую работу совершит поле, перемещая заряд $q_3 = 5{,}0\cdot10^{-9}$ Кл из точки *A* в точку *B* по дуге окружности радиусом r = 0,40 м?

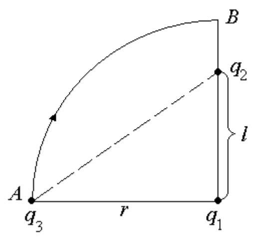


Рис. 7.15

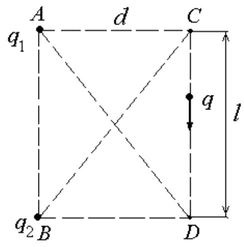


Рис. 7.16

B12. Определить работу электрических сил при перемещении заряда q = 1,0·10^{-8} Кл из точки C в точку D, если q_1 = 5,0·10^{-6} Кл, q_2 = =2,0·10^{-6} Кл, l = 0,40 м (рис. 7.16). Линия AB, соединяющая заряды q_1 и q_2, параллельна траектории движения заряда q (линия CD), а расстояние между этими линиями d = 0,30 м. Все заряды считать точечными.

Задачи трудные

C1. Множество зарядов (трех значений) q_1 = 1·10^{-9} Кл, q_2 = 2q_1, q_3 = 3q_1 распределены вдоль окружности так, что все одинаковые заряды рассредоточены по окружности равномерно через равный угловой интервал. Определите потенциал в центре окружности, если работа по удалению пробного заряда q = 0,01q_1 из центра окружности на бесконечность равна A = = 1·10^{-9} Дж.

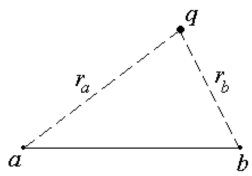


Рис. 7.17

C2. Точечный положительный заряд создает в точках a и b (рис. 7.17) поля с напряженностями E_a и E_b. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда q_0 из точки a в точку b.

C3. Точка B вдвое дальше от центра поля, чем точка A (рис. 7.18). При перемещении заряженной частицы из точки A в точку B поле совершило работу 6 Дж. Какую работу совершило поле на первой половине пути?

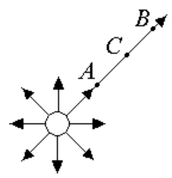


Рис. 7.18

C4. Определить работу электрических сил по перемещению заряда 1 нКл из точки A в точку B и из точки C в точку D, если r = 6 см, a = 8 см, q_1 = 3,33 нКл, q_2 = –3,33 нКл (рис. 7.19).

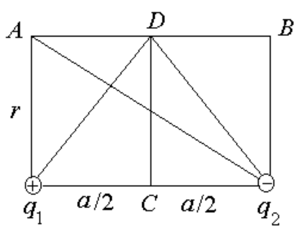


Рис. 7.19

Задачи очень трудные

D1. Небольшой шарик A, заряд которого q = 1,0·10^{-6} Кл, подвешен на невесомой изолирующей пружине жесткостью k = 9,0 Н/м. Снизу медленно приближают другой небольшой шарик с таким же зарядом (рис. 7.20) и помещают его в точку, где первоначально находился шарик A. Какую работу совершили при этом электростатические силы?

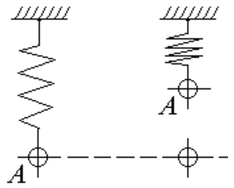


Рис. 7.20

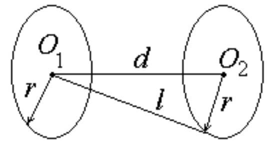


Рис. 7.21

D2. Два параллельных тонких кольца, радиусы которых одинаковы и равны 5,0 см, имеют в вакууме общую ось O_1O_2 (рис. 7.21). Расстояние между их центрами 12 см. На первом кольце равномерно распределен заряд $8{,}2\cdot10^{-7}$ Кл, а на втором равномерно распределен заряд $6{,}0\cdot10^{-7}$ Кл. Какая работа совершается при перемещении заряда $3{,}0\cdot10^{-9}$ Кл из центра одного кольца в центр другого?