**Осенняя олимпиада 2017/18**

**МАТЕМАТИКА**

**4 класс**

**1.** *Д’Артаньян и три мушкетёра.* Каждый из мушкетёров – Атос, Портос, Арамис и д’Артаньян были вооружены одним оружием. Двое из них были вооружены шпагами, один пистолетом и один мушкетом. Известно, что д’Артаньян и Портос были вооружены разным оружием. Разным оружием были вооружены и д’Артаньян с Арамисом, Атос с д’Артаньяном и Арамис с Портосом. Кроме того, д’Артаньян был вооружён не мушкетом. Узнайте, кто каким оружием был вооружён.

**Решение.** Все возможные пары, кроме пары Атос–Портос, были вооружены разным оружием. Следовательно, Атос и Портос были вооружены одинаковым оружием, т.е. шпагами. Д’Артаньян был вооружён не мушкетом, т.е. пистолетом. Мушкетом был вооружён Арамис.

**2.** Сколько существует двузначных чисел, записанных только:

а) нечётными цифрами;

б) чётными цифрами?

Цифры в записи числа не повторяются.

**Решение.** а) Первую цифру можно выбрать пятью способами, вторую – четырьмя. Всего: 5×4 = 20 чисел.

б) Первую цифру можно выбрать четырьмя способами, вторую – тоже четырьмя. Всего: 4×4 = 16 чисел.

Ответ: а) 20; б) 16.

**3.** Какое число в 7 раз больше своей последней цифры?

**Решение.**35 = 7×5.

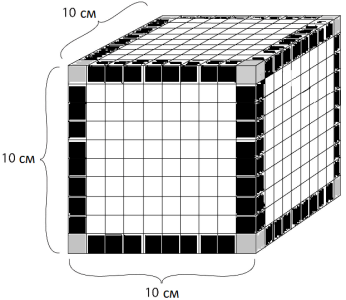
Ответ: 35.

**4**.*Том Сойер организует покраску забора*. Том Сойер получил 4 алебастровых шарика и одно яблоко за то, что дал товарищу покрасить 5 досок забора, 6 алебастровых шариков и одно яблоко он получил за покраску 6 досок забора. Доски забора одинаковые. То же можно сказать о яблоках и шариках. Затем он все яблоки обменял на шарики. А все полученные шарики отдал за ножик. Сколько шариков стоит ножик?

**Решение.** Узнаем, сколько шариков стоит одно яблоко. За покраску одной доски Том Сойер взял 6 – 4 = 2 (шарика). Покраска 5 досок забора стоит 2×5 = 10 (шариков), или 4 шарика и 1 яблоко. Значит, одно яблоко стоит 10 – 4 = 6 (шариков). Всего Том после покраски забора получил 2 яблока и 6 + 4 = 10 (шариков). Всего шариков после обмена яблок получилось 6×2 + 10 = 22.

*Ответ*: ножик стоит 22 шарика.

**5.** Окрашенный кубик с ребром 10 см распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько будет кубиков с двумя окрашенными гранями? С тремя? С одной?



**Решение.** 1) К каждому ребру куба примыкают по 8 кубиков, окрашенных с двух сторон. Всего рёбер 12, значит, таких кубиков 12×8 = 96 (см. рис.).

2) Все кубики, примыкающие к вершине куба, окрашены с трёх сторон. Всего вершин 8, значит, и кубиков 8.

3) С одной стороны окрашены кубики в середине каждой грани, образующие квадрат 8×8. Всего граней 6, поэтому таких кубиков будет 6×8×8 = 384.

*Ответ*: 1) 96; 2) 8; 3) 384.

**5 класс**

**1.** Используя знаки арифметических действий (+, –, ×, :), запишите число 31: 1) пятью тройками, 2) шестью тройками; 3) пятью пятёрками.

Например: число 21 можно представить пятью тройками так: 3×3×3 – 3 – 3 = 21 или 33 – 3×3 – 3 = 21.

**Решение.** Например:

1) 33 – 3 + 3 : 3 = 31;

2) 3×3×3 + 3 + 3 : 3 = 31;

3) 5×5 + 5 + 5 : 5 = 31.

**2.** Произведение трёх нечётных последовательных чисел равно 693. Найдите эти числа.

**Решение.** 9×7×11 = 693.

**3.** На одну чашу весов положили круг сыра, а на другую – ¾ такого же круга и ещё килограммовую гирю. Установилось равновесие. Сколько весит круг сыра?

**Решение.** Уберём с каждой чашки по ¾ круга сыра. Получим: ¼ круга сыра весит 1 кг. Значит, круг сыра весит 4 кг.

Ответ: 4 кг.

**4.** Взяв по два раза цифры 1, 2, 3 и 4, напишите восьмизначное число, у которого между единицами стоит ровно одна цифра, между двойками – две, между тройками – три, между четвёрками – четыре цифры. Какое это число?

**Решение.** 4 1 3 1 2 4 3 2 или 2 3 4 2 1 3 1 4.

**5.** Коле так надоели мухи, что он решил их всех переловить. За 4 дня он наловил 216 мух, причём каждый следующий день ловил столько мух, сколько за все предыдущие дни. Сколько мух наловил Коля в каждый из четырёх дней?

**Решение.** Пусть за 1-й день Коля наловил *а* мух, за 2-й тоже *а*, за 3-й день (*а* + *а*)= 2*а* мух, за 4-й *а* + *а* + 2*а* = 4*а*. Тогда за четыре дня *а + а* + 2*а* + 4*а* = 8*а*. По условию задачи 8*а* = 216, значит, *а* = 27.

*Ответ*: за 1-й день – 27 мух, за 2-й – 27 мух, за 3-й – 54, за 4-й – 108 мух.

**6 класс**

**1.** Найдите длину куба, площадь поверхности и объём которого выражаются одним и тем же числом единиц.

**Решение.** 6*а*2 = *а*3 **→** *а* = 6.

**2.** Вычислите: 99 – 97 + 95 – 93 + … + 3 – 1.

**Решение.** .

*Ответ*: 100.

**3.** Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

**Решение.**  *у* = 10,

*х* = 40.

*Ответ*: отцу 40 лет.

**4.** Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

**Решение.**10А + Б – (10Б + А) = 9А – 9Б = 9(А – Б) = А → А – Б = 1; А = 9, Б = 8: 98 – 89 = 9.

*Ответ*: 98.

**5.** В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

**Решение.**Общее число депутатов в обеих палатах чётное. Так как в голосовании приняли участие все депутаты и не было воздержавшихся, то сумма голосов «за» и «против» равна общему числу депутатов и потому чётная. Значит, и разность голосов «за» и «против» тоже должна быть чётной, ведь она отличается от суммы на удвоенное число голосов «против» (*а + b = a – b* + 2*b*). Но число 23 нечётно. Противоречие.

**7 класс**

**1.** Отцу столько же лет, сколько сыну и дочери вместе, сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет дочери?

**Решение.**  3Д – 2Д = 20 →Д = 20.

*Ответ*: 20 лет.

**2.** Предприятие получило задание за два года снизить на 51 % объем выпускаемой продукции. Каждый год требуется снижать объем на одно и то же число процентов. На сколько?

**Решение.** 

*х* = 30 %.

*Ответ*: на 30 %.

**3.** Разгадайте ребус. Каждой букве соответствует определенная цифра, причем, разным буквам – разная: .

**Решение.** , . Ясно, что *С* может быть равно только 1, значит,

*А* + 10*В* + *В* + *А* =  111 → 11*В* + 2*А* = 111.

Также ясно, что *В* может быть только 9, так как иначе не получится трёхзначное число.

Тогда 11⋅9 + 2*А* =  111 → 2*А* = 12 → *А* = 6.

*Ответ*: 6 + 99 + 6 = 111.

**4.** Чтобы открыть сейф, надо ввести код – число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

**Решение.** Так как двоек больше, чем троек, то двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр 17, во втором – 16, в третьем 15, а в последнем – 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант.

Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

*Ответ*: 2222232.

**5.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

**Решение.** Если первый – рыцарь, то в силу его слов второй и третий – лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый – лжец. Если второй – лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй – рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

**8 класс**

**1.** Путь от дома до школы Буратино проделал пешком. Обратно он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую половину пути – на черепахе. Известно, что скорость собаки в четыре раза больше, а скорость черепахи – в два раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шёл в школу. На какой путь – из дома до школы или из школы до дома – затратил Буратино больше времени?

***Решение*.** Пусть *v* – скорость Буратино, 4*v* – скорость собаки,  – скорость черепахи, *s* – расстояние от школы до дома. Тогда от дома до школы Буратино прошёл за время . На обратный путь Буратино затратил время .

*Ответ*: на обратный путь времени ушло больше.

**2.** В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае – наугад (т.е. среди написанных вопросов он правильно отвечает на 1/5 часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

***Решение*.** Двоечник ошибся в 1/2 от общего числа вопросов. Но он мог ошибиться только в тех вопросах, на которые отвечал наугад. При этом число вопросов, в которых он ошибся, равно 4/5 от числа вопросов, на которые он отвечал наугад. То есть число вопросов, на которые он отвечал наугад, в 5/4 раза больше числа вопросов, в которых он ошибся. Значит, он отвечал наугад на (1/2)⋅(5/4) = 5/8 от общего числа вопросов. Ну, а списал ответы на все остальные, т.е. на 3/8 от общего числа вопросов.

Ответ: 3/8.

**3.** На острове Контрастов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Каким является число жителей на острове: чётным или нечётным?

***Решение*.** Ясно, что если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы – второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей и лжецов чётное число, а во втором и тех, и других – нечётное число. Значит, число людей на острове обязательно чётно.

Ответ: четное.

**4.** Альфире втрое больше лет, чем было Эльдару, когда она была в его нынешнем возрасте. Когда он будет в её нынешнем возрасте, им вместе будет 28 лет. Сколько сейчас лет Альфире и сколько Эльдару?

***Решение*** Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Сейчас | Тогда | Потом |
| Альфира | 3*у* | *х* | 3*у* + (3*у* – *х*) |
| Эльдар | *х* | *у* | 3*у* |

Альфира и сейчас, и тогда старше Эльдара на одно и то же число лет, поэтому:

1. 3*у* – *х* = *х – у* → *х* = 2*у*;

Сумма возрастов Альфиры и Эльдара «потом» равна 28:

2) [3*у* + (3*у* – *х*)] + 3*у* = 28 → 9*у* – 2*у* = 28 → *у* = 4.

Отсюда *х* = 2*у* = 2⋅4 = 8, 3*у* = 3⋅4 = 12.

*Ответ*: 8 лет Эльдару и 12 лет Альфире.

**5.** Решите уравнение в натуральных числах:

а) *х*2 – *у*2 = 31; б) *х*2 – *у*2 = 303.

***Решение*.** (*х* – *у*)(*х* + *у* = 1⋅31 →

(*х* – *у*)(*х* + *у*) = 3⋅101 →

(*х* – *у*)(*х* + *у*) = 1⋅303 →

*Ответ*: а)  б) 

**9 класс**

**1.** Решите уравнение *х*3 + *х*2 + *х* – 3 = 0 в натуральных числах.

***Решение*.**  или.

Ответ: х=1.

**2.** Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько лет мне, если вмести нам 70 лет?

***Решение*.** Составим таблицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Мой возраст | Ваш возраст |
| Сейчас | *х* | *у* |
| Тогда\* | *у* | *х*/2 |

\_\_\_\_\_\_

\*«Тогда» относится ко времени, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас.

Посчитав двумя способами время, отделяющее «сейчас» от «тогда», составим уравнение: , откуда . Значит, 3*х =* 4*у*. Поскольку *х* + *у* = 70, ответ очевиден: *х* = 40, *у* = 30. Мне сейчас 40 лет.

Ответ: мне 40 лет.

**3.** В мешке 101 монета. Из них 100 одинаковых по весу настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

***Решение*.** Положим на весы 50 монет на левую чашу и 50 монет на правую чашу, одну монету отложим. Если весы уравновешены, то на весах настоящие монеты, а фальшивая отложена. Сравниваем её по весу с любой из настоящих монет и получаем ответ.

Если весы не уравновешены, например, левая чаша весов тяжелее правой, то делим все монеты на левой чаше на две равные части и взвешиваем: 25 на левую чашу и 25 монет на правую чашу. Если равновесие, то фальшивой монеты нет, фальшивая в отложенных 50 монетах, и она легче настоящей. Если равновесия нет, то фальшивая монета здесь, и она тяжелее настоящей.

**4.** Что больше: 1234567×1234569 или 12345682?

***Решение*.** Обозначим число 1234568 через *х*. Тогда левое выражение превратится в (*х* – 1)(*х* + 1) = *х*2 – 1 < *х*2. Таким образом, отпала необходимость перемножать и возводить в квадрат семизначные числа.

*Ответ*: 1234567×1234569 < 12345682.

**5.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда лгут, иногда говорят правду. Три человека – рыцарь, лжец и хитрец – разговаривают:

*А*: «Я хитрец».

*В*: «Это правда».

*С*: «Я не хитрец».

Кто такие А, В и С?

***Решение*.** Составим таблицу возможных вариантов.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант | *А* | *В* | *С* |
| 1 | р | л | х |
| 2 | р | х | л |
| 3 | л | х | р |
| 4 | л | р | х |
| 5 | х | р | л |
| 6 | х | л | р |

1. Варианты 1 и 2 невозможны, так как *А* не может быть рыцарем.

2. *С* не лжец, так как иначе получается, что он сказал правду, а значит, вариант 5 невозможен.

3. Вариант 4 не подходит, так как если *А* – лжец, то *В* не может быть рыцарем – он лжец.

4. Вариант 6: Из того, что *А* – хитрец, следут, что *В* – рыцарь – не годится!

Остается вариант 3: *А* – лжец, *В* – хитрец, *С* – рыцарь (противоречий нет).

*Ответ*: *А* – лжец, *В* – хитрец, *С* – рыцарь.

**10 класс**

**1.** Докажите, что 2100 + 3100 <4100.

***Решение*.** 2100 < 3100, значит, нам достаточно доказать, что 2⋅3100 < 4100 или что (4/3)100 > 2. Но даже (4/3)3 = 64/27 уже больше, чем 2.

**2.** Найдите все решения системы уравнений 

***Решение.*** *х*, *у* и *z* – неотрицательные числа. Вычтем из первого уравнения второе и получим:

*х*2 – *z*2 = 6*z* – 6*x* → (*x – z*)(*x + z*) + 6(*х – z*) = 0 →

(*x – z*)(*x + z* + 6) = 0.

Отсюда *х* = *z*, так как *х* + *z* + 6 > 0. Аналогично вычтем из второго уравнения третье и получим *у = х*. Итак, *х = у = z*, тогда из первого уравнения находим: *х*2 + *х*2 = 6*х* → 2*х*(*х* – 3) = 0 → *х* = 0, *х* = 3.

*Ответ*: 1)  2) 

**3.** Известно, что корни уравнения *х*2 + *рх + q* = 0 – целые числа, а *р* и *q* – простые числа. Найдите *р* и *q*. (Простые числа положительны!)

***Решение***.  Так как *q* – простое, то *х*1 = 1 или *х*1 = = –1, *q = x*2 или *q = –x*2.

1) 1 + *q = –p* → 1 + *q* + *p* = 0, что невозможно.

2) –1 – *q = –p* → *q* – *p* = –1 → *p – q* = 1.

Существуют только два простых числа, разность которых равна 1: 3 и 2.

*Ответ*: *р* = 3, *q* = 2.

**4.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.  *А*, *В*, *С* и *D* – жители острова рыцарей и лжецов – разговаривают:

*А* говорит: «По меньшей мере один из нас лжец».

*В* говорит: «По меньшей мере двое из нас лжецы».

*С* говорит: «По меньшей мере трое из нас лжецы».

*D* говорит: «Лжецов среди нас нет».

Кто из них рыцарь, а кто лжец?

***Решение***.

1. Докажем, что *А* – рыцарь. Пусть *А* – лжец, тогда он сказал правду, что невозможно.

2. Докажем, что *D* – лжец. Пусть *D* – рыцарь, но мы доказали, что А – рыцарь, значит, *D* – лжец.

3. Составим таблицу возможных вариантов:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | р | р | р | л |
| II | р | р | л | л |
| III | р | л | р | л |
| IV | р | л | л | л |

I: *В* – рыцарь и *С* – рыцарь – невозможно, так как лжец один (*D*).

II: *В* –рыцарь, *С* – лжец, нет противоречий.

III: *В* – лжец, *С* – рыцарь, но *В* говорил правду, *С* лгал – противоречие.

IV: *В* – лжец, *С* – лжец – оба говорили правду – противоречие.

*Ответ*: *А* – рыцарь, *В* – рыцарь, *С* – лжец, *D* – лжец.

**5.** Решите уравнение *х* + *у = х*2 – *ху* + *у*2 в целых числах.

***Решение*.** *х* + *у = х*2 – *ху* + *у*2 →

*2х*2 – 2*ху* + 2*у*2 – 2*х* – 2*у* = 0 →

*х*2 + *х*2 – 2*ху* + *у*2 + *у*2 – 2*х* – 2*у* + 1 + 1 = 2 →

(*х* – 1)2 + (*у* – 1)2 + (*х – у*)2 = 2.

Либо одно из слагаемых равно 21, а остальные – нулю, либо два из слагаемых равны 1, а третье – 1. Всего 6 вариантов.

Ответ: (0;0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2).