Осенняя олимпиада 2017/18

МАТЕМАТИКА

4 класс

1. *Д'Артаньян и три мушкетёра.* Каждый из мушкетёров – Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян были вооружены одним оружием. Двое из них были вооружены шпагами, один пистолетом и один мушкетом. Известно, что д'Артаньян и Портос были вооружены разным оружием. Разным оружием были вооружены и д'Артаньян с Арамисом, Атос с д'Артаньяном и Арамис с Портосом. Кроме того, д'Артаньян был вооружён не мушкетом. Узнайте, кто каким оружием был вооружён.

Решение. Все возможные пары, кроме пары Атос–Портос, были вооружены разным оружием. Следовательно, Атос и Портос были вооружены одинаковым оружием, т.е. шпагами. Д'Артаньян был вооружён не мушкетом, т.е. пистолетом. Мушкетом был вооружён Арамис.

2. Сколько существует двузначных чисел, записанных только:
а) нечётными цифрами;
б) чётными цифрами?
Цифры в записи числа не повторяются.

Решение. а) Первую цифру можно выбрать пятью способами, вторую – четырьмя. Всего: 5×4 = 20 чисел.

б) Первую цифру можно выбрать четырьмя способами, вторую – тоже четырьмя. Всего: 4×4 = 16 чисел.

Ответ: а) 20; б) 16.

3. Какое число в 7 раз больше своей последней цифры?

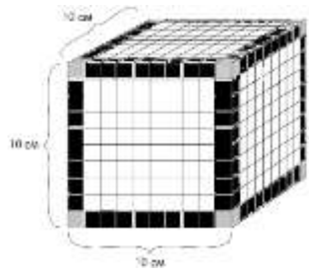
Решение. 35 = 7×5.
Ответ: 35.

4. *Том Сойер организует покраску забора*. Том Сойер получил 4 алебастровых шарика и одно яблоко за то, что дал товарищу покрасить 5 досок забора, 6 алебастровых шариков и одно яблоко он получил за покраску 6 досок забора. Доски забора одинаковые. То же можно сказать о яблоках и шариках. Затем он все яблоки обменял на шарики. А все полученные шарики отдал за ножик. Сколько шариков стоит ножик?

Решение. Узнаем, сколько шариков стоит одно яблоко. За покраску одной доски Том Сойер взял 6 – 4 = 2 (шарика). Покраска 5 досок забора стоит 2×5 = 10 (шариков), или 4 шарика и 1 яблоко. Значит, одно яблоко стоит 10 – 4 = 6 (шариков). Всего Том после покраски забора получил 2 яблока и 6 + 4 = 10 (шариков). Всего шариков после обмена яблок получилось 6×2 + 10 = 22.

Ответ: ножик стоит 22 шарика.

5. Окрашенный кубик с ребром 10 см распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько будет кубиков с двумя окрашенными гранями? С тремя? С одной?



Решение. 1) К каждому ребру куба примыкают по 8 кубиков, окрашенных с двух сторон. Всего рёбер 12, значит, таких кубиков 12×8 = 96 (см. рис.).

2) Все кубики, примыкающие к вершине куба, окрашены с трёх сторон. Всего вершин 8, значит, и кубиков 8.

3) С одной стороны окрашены кубики в середине каждой грани, образующие квадрат 8×8. Всего граней 6, поэтому таких кубиков будет 6×8×8 = 384.

Ответ: 1) 96; 2) 8; 3) 384.

5 класс

1. Используя знаки арифметических действий (+, –, ×, :), запишите число 31: 1) пятью тройками, 2) шестью тройками; 3) пятью пятёрками.

Например: число 21 можно представить пятью тройками так: 3×3×3 – 3 – 3 = 21 или 33 – 3×3 – 3 = 21.

Решение. Например:
1) 33 – 3 + 3 : 3 = 31;
2) 3×3×3 + 3 + 3 : 3 = 31;
3) 5×5 + 5 + 5 : 5 = 31.

2. Произведение трёх нечётных последовательных чисел равно 693. Найдите эти числа.

Решение. 9×7×11 = 693.

3. На одну чашу весов положили круг сыра, а на другую – ¾ такого же круга и ещё килограммовую гирю. Установилось равновесие. Сколько весит круг сыра?

Решение. Уберём с каждой чашки по ¾ круга сыра. Получим: ¼ круга сыра весит 1 кг. Значит, круг сыра весит 4 кг.

Ответ: 4 кг.

4. Взяв по два раза цифры 1, 2, 3 и 4, напишите восьмизначное число, у которого между единицами стоит ровно одна цифра, между двойками – две, между тройками – три, между четвёрками – четыре цифры. Какое это число?

Решение. 4 1 3 1 2 4 3 2 или 2 3 4 2 1 3 1 4.

5. Коле так надоели мухи, что он решил их всех переловить. За 4 дня он наловил 216 мух, причём каждый следующий день ловил столько мух, сколько за все предыдущие дни. Сколько мух наловил Коля в каждый из четырёх дней?

Решение. Пусть за 1-й день Коля наловил a мух, за 2-й тоже a, за 3-й день $(a + a) = 2a$ мух, за 4-й $a + a + 2a = 4a$. Тогда за четыре дня $a + a + 2a + 4a = 8a$. По условию задачи $8a = 216$, значит, $a = 27$.

Ответ: за 1-й день – 27 мух, за 2-й – 27 мух, за 3-й – 54, за 4-й – 108 мух.

6 класс

1. Найдите длину куба, площадь поверхности и объём которого выражаются одним и тем же числом единиц.

Решение. $6a^2 = a^3 \rightarrow a = 6$.

2. Вычислите: $99 - 97 + 95 - 93 + \ldots + 3 - 1$.

Решение. $\underbrace{(99-97)+(95-93)+...+(3-1)}_{\text{25 пар}} = 25\cdot 2 = 50$.

Ответ: 50.

3. Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

Решение. $\begin{cases} x = 4y, \\ x + 20 = 2(y + 20) \end{cases} \rightarrow 4y + 20 = 2y + 40 \rightarrow 2y = 20 \rightarrow y =$ 10,

$x = 40$.

Ответ: отцу 40 лет.

4. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

Решение. 10А + Б – (10Б + А) = 9А – 9Б = 9(А – Б) = А $\rightarrow$ А – Б = 1; А = 9, Б = 8: 98 – 89 = 9.

Ответ: 98.

5. В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Решение.Общее число депутатов в обеих палатах чётное. Так как в голосовании приняли участие все депутаты и не было воздержавшихся, то сумма голосов «за» и «против» равна общему числу депутатов и потому чётная. Значит, и разность голосов «за» и «против» тоже должна быть чётной, ведь она отличается от суммы на удвоенное число голосов «против» ($a + b = a - b + 2b$). Но число 23 нечётно. Противоречие.

7 класс

1. Отцу столько же лет, сколько сыну и дочери вместе, сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет дочери?

Решение. $\begin{cases} \text{С+Д=О}, \\ \text{С=2Д}, \\ \text{О} - \text{С=20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{3Д=О}, \\ \text{О} - \text{2Д=20} \end{cases} \rightarrow$ 3Д – 2Д = 20 →Д = 20.

Ответ: 20 лет.

2. Предприятие получило задание за два года снизить на 51 % объем выпускаемой продукции. Каждый год требуется снижать объем на одно и то же число процентов. На сколько?

Решение.

$$A\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=A\left(1-\frac{51}{100}\right)\rightarrow\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=0,49\rightarrow$$

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)=0,7\rightarrow\frac{x}{100}=0,3\rightarrow x = 30\ \%.$$

Ответ: на 30 %.

3. Разгадайте ребус. Каждой букве соответствует определенная цифра, причем, разным буквам – разная: $A+\overline{BB}+A=\overline{CCC}$.

Решение. $\overline{BB}=10B+B$, $\overline{CCC}=100C+10C+C$. Ясно, что C может быть равно только 1, значит,

$A + 10B + B + A = 111 \rightarrow 11B + 2A = 111$.

Также ясно, что B может быть только 9, так как иначе не получится трёхзначное число.

Тогда $11\cdot9 + 2A = 111 \rightarrow 2A = 12 \rightarrow A = 6$.

Ответ: 6 + 99 + 6 = 111.

4. Чтобы открыть сейф, надо ввести код – число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

Решение. Так как двоек больше, чем троек, то двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр 17, во втором – 16, в третьем 15, а в последнем – 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант.

Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

Ответ: 2222232.

5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

Решение. Если первый – рыцарь, то в силу его слов второй и третий – лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый – лжец. Если второй – лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй – рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

8 класс

1. Путь от дома до школы Буратино проделал пешком. Обратно он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую половину пути – на черепахе. Известно, что скорость собаки в четыре раза больше, а скорость черепахи – в два раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шёл в школу. На какой путь – из дома до школы или из школы до дома – затратил Буратино больше времени?

Решение. Пусть v – скорость Буратино, $4v$ – скорость собаки, $\frac{v}{2}$ – скорость черепахи, s – расстояние от школы до дома. Тогда от дома до школы Буратино прошёл за время $t_1 = \frac{s}{v}$. На обратный путь Буратино затратил время $t_2 = \frac{s/2}{4v} + \frac{s/2}{v/2} = \frac{s}{8v} + \frac{s}{v} > t_1$.

Ответ: на обратный путь времени ушло больше.

2. В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае – наугад (т.е. среди написанных вопросов он правильно отвечает на 1/5 часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Решение. Двоечник ошибся в 1/2 от общего числа вопросов. Но он мог ошибиться только в тех вопросах, на которые отвечал наугад. При этом число вопросов, в которых он ошибся, равно 4/5 от числа вопросов, на которые он отвечал наугад. То есть число вопросов, на которые он отвечал наугад, в 5/4 раза больше числа вопросов, в которых он ошибся. Значит, он отвечал наугад на (1/2)·(5/4) = 5/8 от общего числа вопросов. Ну, а списал ответы на все остальные, т.е. на 3/8 от общего числа вопросов.

Ответ: 3/8.

3. На острове Контрастов живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Каким является число жителей на острове: чётным или нечётным?

Решение. Ясно, что если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы – второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей и лжецов чётное число, а во втором и тех, и других – нечётное число. Значит, число людей на острове обязательно чётно.

Ответ: четное.

4. Альфире втрое больше лет, чем было Эльдару, когда она была в его нынешнем возрасте. Когда он будет в её нынешнем возрасте, им вместе будет 28 лет. Сколько сейчас лет Альфире и сколько Эльдару?

Решение Составим таблицу:

	Сейчас	Тогда	Потом
Альфира	$3y$	x	$3y + (3y - x)$
Эльдар	x	y	$3y$

Альфира и сейчас, и тогда старше Эльдара на одно и то же число лет, поэтому:

1) $3y - x = x - y \to x = 2y$;

Сумма возрастов Альфиры и Эльдара «потом» равна 28:

2) $[3y + (3y - x)] + 3y = 28 \to 9y - 2y = 28 \to y = 4$.

Отсюда $x = 2y = 2\cdot4 = 8$, $3y = 3\cdot4 = 12$.

Ответ: 8 лет Эльдару и 12 лет Альфире.

5. Решите уравнение в натуральных числах:

а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 303$.

Решение. $(x - y)(x + y = 1\cdot31 \to \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 16, \\ y = 15. \end{cases}$

$(x - y)(x + y) = 3\cdot101 \to \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 101 \end{cases} \to \begin{cases} x = 52, \\ y = 49; \end{cases}$

$(x - y)(x + y) = 1\cdot303 \to \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 303 \end{cases} \to \begin{cases} x = 152, \\ y = 151. \end{cases}$

Ответ: а) $\begin{cases} x = 16, \\ y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 52, \\ y = 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 152, \\ y = 151. \end{cases}$

9 класс

1. Решите уравнение $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ в натуральных числах.

Решение. $x(x^2+x+1)=3 \to x=1$ и $x^2+x+1=3$ или $x=3$ и $x^2+x+1=13$.

Ответ: x=1.

2. Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько лет мне, если вмести нам 70 лет?

Решение. Составим таблицу:

	Мой возраст	Ваш возраст
Сейчас	x	y
Тогда*	y	$x/2$

*«Тогда» относится ко времени, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас.

Посчитав двумя способами время, отделяющее «сейчас» от «тогда», составим уравнение: $x - y = y - \frac{x}{2}$, откуда $\frac{3}{2}x = 2y$. Значит, $3x = 4y$. Поскольку $x + y = 70$, ответ очевиден: $x = 40$, $y = 30$. Мне сейчас 40 лет.

Ответ: мне 40 лет.

3. В мешке 101 монета. Из них 100 одинаковых по весу настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Решение. Положим на весы 50 монет на левую чашу и 50 монет на правую чашу, одну монету отложим. Если весы уравновешены, то на весах настоящие монеты, а фальшивая отложена. Сравниваем её по весу с любой из настоящих монет и получаем ответ.

Если весы не уравновешены, например, левая чаша весов тяжелее правой, то делим все монеты на левой чаше на две равные части и взвешиваем: 25 на левую чашу и 25 монет на правую чашу. Если равновесие, то фальшивой монеты нет, фальшивая в отложенных 50 монетах, и она легче настоящей. Если равновесия нет, то фальшивая монета здесь, и она тяжелее настоящей.

4. Что больше: 1234567×1234569 или 1234568^2?

Решение. Обозначим число 1234568 через x. Тогда левое выражение превратится в $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1 < x^2$. Таким образом, отпала необходимость перемножать и возводить в квадрат семизначные числа.

Ответ: $1234567 \times 1234569 < 1234568^2$.

5. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые иногда лгут, иногда говорят правду. Три человека – рыцарь, лжец и хитрец – разговаривают:

A: «Я хитрец».

B: «Это правда».

C: «Я не хитрец».

Кто такие А, В и С?

Решение. Составим таблицу возможных вариантов.

Вариант	*A*	*B*	*C*
1	р	л	х
2	р	х	л
3	л	х	р
4	л	р	х
5	х	р	л
6	х	л	р

1. Варианты 1 и 2 невозможны, так как *A* не может быть рыцарем.

2. *C* не лжец, так как иначе получается, что он сказал правду, а значит, вариант 5 невозможен.

3. Вариант 4 не подходит, так как если *A* – лжец, то *B* не может быть рыцарем – он лжец.

4. Вариант 6: Из того, что *A* – хитрец, следут, что *B* – рыцарь – не годится!

Остается вариант 3: *A* – лжец, *B* – хитрец, *C* – рыцарь (противоречий нет).

Ответ: *A* – лжец, *B* – хитрец, *C* – рыцарь.

10 класс

1. Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

Решение. $2^{100} < 3^{100}$, значит, нам достаточно доказать, что $2\cdot 3^{100} < 4^{100}$ или что $(4/3)^{100} > 2$. Но даже $(4/3)^3 = 64/27$ уже больше, чем 2.

2. Найдите все решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z, \\ y^2 + z^2 = 6x, \\ z^2 + x^2 = 6y. \end{cases}$

Решение. x, y и z – неотрицательные числа. Вычтем из первого уравнения второе и получим:

$$x^2 - z^2 = 6z - 6x \to (x - z)(x + z) + 6(x - z) = 0 \to$$
$$(x - z)(x + z + 6) = 0.$$

Отсюда $x = z$, так как $x + z + 6 > 0$. Аналогично вычтем из второго уравнения третье и получим $y = x$. Итак, $x = y = z$, тогда из первого уравнения находим: $x^2 + x^2 = 6x \to 2x(x - 3) = 0 \to x = 0$, $x = 3$.

Ответ: 1) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \\ z = 3. \end{cases}$

3. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, а p и q – простые числа. Найдите p и q. (Простые числа положительны!)

Решение. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$ Так как q – простое, то $x_1 = 1$ или $x_1 = -1$, $q = x_2$ или $q = -x_2$.

1) $1 + q = -p \to 1 + q + p = 0$, что невозможно.

2) $-1 - q = -p \to q - p = -1 \to p - q = 1$.

Существуют только два простых числа, разность которых равна 1: 3 и 2.

Ответ: $p = 3$, $q = 2$.

4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. *A*, *B*, *C* и *D* – жители острова рыцарей и лжецов – разговаривают:

A говорит: «По меньшей мере один из нас лжец».

B говорит: «По меньшей мере двое из нас лжецы».

C говорит: «По меньшей мере трое из нас лжецы».

D говорит: «Лжецов среди нас нет».

Кто из них рыцарь, а кто лжец?

Решение.

1. Докажем, что *A* – рыцарь. Пусть *A* – лжец, тогда он сказал правду, что невозможно.

2. Докажем, что *D* – лжец. Пусть *D* – рыцарь, но мы доказали, что А – рыцарь, значит, *D* – лжец.

3. Составим таблицу возможных вариантов:

Вари-ант	*A*	*B*	*C*	*D*
I	р	р	р	л
II	р	р	л	л
III	р	л	р	л
IV	р	л	л	л

I: *B* – рыцарь и *C* – рыцарь – невозможно, так как лжец один (*D*).

II: *B* – рыцарь, *C* – лжец, нет противоречий.

III: *B* – лжец, *C* – рыцарь, но *B* говорил правду, *C* лгал – противоречие.

IV: *B* – лжец, *C* – лжец – оба говорили правду – противоречие.

Ответ: *A* – рыцарь, *B* – рыцарь, *C* – лжец, *D* – лжец.

5. Решите уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$ в целых числах.

Решение. $x + y = x^2 - xy + y^2 \rightarrow$

$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0 \rightarrow$

$x^2 + x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 1 = 2 \rightarrow$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2.$

Либо одно из слагаемых равно 21, а остальные – нулю, либо два из слагаемых равны 1, а третье – 1. Всего 6 вариантов.

Ответ: (0;0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2).