

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2017/18 учебный год

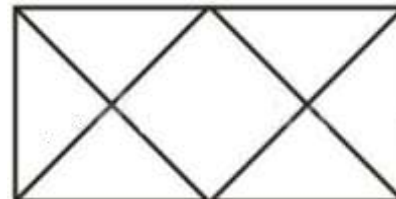
Условия с решениями

## 4 класс

1. Сколько треугольников в данной фигуре?

*Решение.*  $4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$ .

*Ответ:* 12.



2. Можно ли доску размером  $5 \times 5$  разрезать на прямоугольники размером  $2 \times 1$ ?

*Решение.*  $5 \times 5 = 25$  – число нечётное;  $n \cdot 2$  – число чётное. Чётное число не может равняться нечётному.

*Ответ:* нет.

3. Два робота делают за 2 минуты 2 детали. А сколько деталей сделают 4 таких же робота за 4 минуты?

*Решение.* 1 робот за 1 мин делает половину детали, 4 робота за 4 минуты сделают  $4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$  деталей.

*Ответ:* 8.

4. Мальчик Вася – лжец, а девочка Лена – рыцарь. Какой вопрос надо им задать, чтобы они ответили одинаково? (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.)

*Ответ:* например: «Верно ли, что тебя зовут Вася?» (оба ответят «нет»).

5. Рыбак поймал рыбу. Когда у него спросили, какова масса пойманной рыбы, он сказал: «Я думаю, что хвост ее – 1 кг, голова – столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище – сколько голова и хвост вместе. Какова же масса этой рыбы?»

*Решение.* 
$$\begin{cases} \Gamma = 1 + \Gamma : 2, \\ \Gamma = \Gamma + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Gamma = 3, \\ \Gamma = 4, \end{cases} \quad \Gamma + \Gamma + X = 1 + 3 + 4 = 8.$$

*Ответ:* 8 кг.

## 5 класс

1. Сколько раз в течение суток минутная и часовая стрелки часов образуют прямой угол?

*Решение.* В течение каждого часа минутная и часовая стрелки образуют прямой угол 2 раза. За сутки:  $2 \cdot 24 = 48$ .

*Ответ:* 48 раз.

2. Пять первоклассников стояли в шеренгу и держали 37 флажков. У всех справа от Тани – 14 флажков, справа от Яши – 32, справа от Веры – 20, справа от Максима – 8. Сколько флажков у Даши?

*Решение.* Только Даша стоит справа от Максима, поэтому у Даши 8 флажков.

*Ответ:* 8.

3. Житель острова Мадейра говорит: «Все жители нашего острова – лжецы». Истинно или ложно это высказывание?

*Решение.* Если высказывание истинно, то говорящий – лжец, но тогда то, что он сказал, ложно.

*Ответ:* ложно.

4. Какой цифрой оканчивается произведение 33 множителей, каждый из которых равен 3?

*Решение.* Рассмотрим последние цифры произведений нескольких троек:

$$3 \cdot 3 = \underline{9}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{729}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{27}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{2187}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{81}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{6561}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{243}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{19683}$$

Мы видим, что происходит «зацикливание» последних цифр: 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ... Значит, на 3 оканчиваются произведения, содержащие: 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 множителя.

*Ответ:* 3.

5. Первая цифра семизначного числа равна числу нулей в его записи, вторая – числу единиц, третья – числу двоек и т.д. Седьмая – числу шестёрок. Какое это число?

*Ответ:* два варианта: 3 211 000.

## 6 класс

1. Сколько ударов за сутки сделают часы, если они отбивают целое число часов и ещё одним ударом отмечают середину каждого часа?

*Решение.*  $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 12) + 2 \cdot 12 = 180$ .

*Ответ:* 180 ударов.

2. Решите ребус:  $XA \cdot UX = 494$  (каждая буква означает цифру).

*Решение.*  $494 = 2 \cdot 13 \cdot 19$ . Можно представить 494 в виде произведения двух двузначных множителей только двумя способами: 1)  $26 \cdot 19 = 494$ ; 2)  $38 \cdot 13 = 494$ . Нам подходит второй вариант.

*Ответ:*  $38 \cdot 13 = 494$ .

3. На острове рыцарей и лжецов разговаривают два человека  $A$  и  $B$ .  $A$  говорит: «По крайней мере, один из нас лжец». Кто из них рыцарь, а кто лжец? (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.)

*Решение.*

1. Если  $A$  – лжец, то  $A$  и  $B$  – рыцари – противоречие.

2. Если  $A$  – рыцарь, тогда  $B$  – лжец.

*Ответ:*  $A$  – рыцарь,  $B$  – лжец.

4. В записи  $* 1 * 2 * 4 * 8 * 16 * 32 * 64 = 27$  вместо знака  $*$  поставьте плюс или минус, чтобы получилось верное равенство.

*Решение.* Знаки можно расставить следующим образом:

$$+ 1 - 2 + 4 + 8 - 16 - 32 + 64 = 27.$$

5. В стране Авангардии имеют хождение купюры: 1, 3, 5 и 25 тугриков. Попробуйте разменять 25 тугриков ровно 10-ю купюрами в 1, 3 и 5 тугриков. Если у вас это не получится, объясните почему.

*Ответ:* не получится, так как сумма 10-ти нечётных чисел – число чётное, а 25 – число нечётное.

## 7 класс

1. Найдите наименьшее число, которое делится на 33 и записывается одними единицами.

*Решение.*  $33 = 11 \cdot 3$ . Искомое число должно делиться на 3 и на 11, значит, сумма цифр должна делиться на 3. Нам подходят числа, содержащие 3n единиц и делящиеся при этом на 11. Наименьшим из таких чисел является число 111111.

*Ответ:* 111111.

2. На площади собрались рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из собравшихся заявил остальным: «Вы все лжецы». Сколько рыцарей среди них?

*Решение.* Рыцарь, видя перед собой одних лжецов, говорит правду. Если бы рыцарей было двое или более, то ни один из них не смог бы сказать: «Вы все лжецы». Если бы все были бы лжецами, то каждый сказал бы правду, что невозможно.

*Ответ:* 1.

3. Сумма цифр двузначного числа равна 16. Если в этом числе переставить цифры, то оно увеличится на 18. Найдите это число.

*Решение.* Пусть искомое число  $\overline{xy} = 10x + y$ , тогда:

$$1) x + y = 16;$$

$$2) \overline{yx} - \overline{xy} = (10y + x) - (10x + y) = 18 \rightarrow 9(y - x) = 18,$$

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ y - x = 2 \end{cases} \rightarrow y = 9, x = 7.$$

Можно решить задачу простым перебором таких двузначных чисел, у которых сумма цифр равна 16, их всего три: 79, 88 и 97.

*Ответ:* 79.

4. Игорь утверждает, что он нашёл самое большое простое число:  $2019^{2018} + 1$ . Прав ли он? Если нет, то почему.

*Решение.*  $2019^n$  может оканчиваться либо на 9, либо на 1 при любом  $n$ , т.е. число  $2019^n$  – нечётное при любом  $n$ . Тогда  $2019^{2018} + 1$  – всегда чётное, а значит, составное.

*Ответ:* неправ, число составное.

5. Молодой программист устроился на работу в солидную фирму на следующих условиях: за первый месяц он получает 10 000 долларов, а за каждый последующий месяц при хорошей работе в предыдущем месяце его заработок увеличивается на 10 %, а при плохой работе уменьшается на 10 %. Через несколько месяцев он получил зарплату 8019 долларов. Могло ли такое быть?

*Решение.* Так могло быть, если, например, в первом месяце он работал хорошо, а во втором, третьем и четвертом месяцах – плохо. Тогда за пятый месяц он получит:  $10000 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 8019$  долларов.

## 8 класс

1. Найдите все двузначные числа, которые от перестановки цифр увеличиваются на 36.

*Решение.*

$$\overline{yx} - \overline{xy} = (10y + x) - (10x + y) = 36 \rightarrow 9(y - x) = 36, y - x = 4, y = x + 4.$$

Получаем пары  $(x, y)$ : (1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8), (5; 9).

*Ответ:* 15, 26, 37, 48, 59.

2. Сколько всего можно записать трёхзначных чисел, содержащих цифру 6?

*Решение.* Всего трёхзначных чисел 900. Трёхзначных чисел, не содержащих цифру 6:  $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ , тогда трёхзначных чисел, содержащих цифру 6, будет  $900 - 648 = 252$ .

*Ответ:* 252.

3. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Как с помощью одного вопроса узнать, с кем вы разговариваете: с рыцарем или со лжецом?

*Ответ:* Надо, например, спросить: «Верно ли, что  $2 \times 2 = 4$ ?». Рыцарь ответит: «Да». Лжец ответит: «Нет».

4. Даны четыре слова: КАЗИНО, ЗАНОЗА, КЕФАЛЬ, ФОРЕЛЬ. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую (например, за один шаг можно из слова ЗАНОЗА получить ЗЕНОЗА). Сколько шагов потребуется, чтобы сделать все слова одинаковыми? (Допускается бессмыслица.) Приведите пример и докажите, что меньшим числом шагов обойтись нельзя.

*Решение.* Запишем слова в столбик:

КАЗИНО  
ЗАНОЗА  
КЕФАЛЬ  
ФОРЕЛЬ

После всех замен буквы в каждой колонке должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждой колонке сохранить наиболее частую букву. Минимальное число замен:  $2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2 = 14$ . Среди слов, которые могут получиться, есть одно осмысленное КАФЕЛЬ.

*Ответ:* 14.

5. Вася написал дробь  $\frac{20}{87}$ . Петя может прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю, а также умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную: а)  $\frac{1}{2}$ ; б) 1.

*Решение.*

$$\text{а) } \frac{20+x}{87+x} = \frac{1}{2} \rightarrow 40+2x = 87+x \rightarrow x = 47, \frac{20+47}{87+47} = \frac{67}{134} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } \frac{20+x}{87+x} < 1, \text{ при любом } x. \text{ Умножение числителя и знаменателя на одно и}$$

то же число не меняет значения дроби.

*Ответ:* а) да; б) нет.

## 9 класс

1. На переговорах в Женеве встретились президенты нескольких государств. Перед началом переговоров все обменялись рукопожатиями. Известно, что было 55 рукопожатий. Сколько президентов прибыло на переговоры?

*Решение.* Число рукопожатий, которыми обменялись  $n$  человек, вычисляется по формуле  $r = \frac{n(n-1)}{2}$  (докажите!). В нашем случае:  $\frac{n(n-1)}{2} = 55$ . Подбором легко найти  $r = 11$ .

*Ответ:* 11.

2. Найдите двухзначное число, сумма цифр которого равна 13, а разность между искомым числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, оканчивается цифрой 7.

*Решение.*  $xy$ :  $x + y = 13$ ,  $\overline{xy} - \overline{yx} = 10x + y - (10y + x) = 9(x - y)$ .

Из всех двузначных чисел, кратных 9, на 7 оканчивается только  $27 = 9 \cdot 3 \rightarrow$

$$x - y = 3,$$

$$\begin{cases} x + y = 13, \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow 2x = 16, x = 8, y = 5.$$

*Ответ:* 85.

3. Докажите, что  $1^3 + 2^3 + \dots + 82^3$  делится на 83.

*Решение.* Сгруппируем наши слагаемые и применим формулу суммы кубов:  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ :

$$\begin{aligned} & (1^3 + 83^3) + (2^3 + 81^3) + \dots + (41^3 + 42^3) = \\ & = (1 + 82) \cdot (\dots) + (2 + 81) \cdot (\dots) + (41 + 42) \cdot (\dots) = \\ & = 83 \cdot (\dots) + 83 \cdot (\dots) + \dots + 83 \cdot (\dots) = 83k. \end{aligned}$$

4. В научной конференции приняли участие 2017 учёных. После конференции каждый отправил 4 или 6 электронных писем другим учёным, бывшим на конференции. В результате каждый участник получил по 5 писем. Докажите, что некоторые письма не дошли до адресата.

*Решение.* Отправлено  $4 \cdot x + 6 \cdot (2017 - x)$  – чётное число писем, получено  $2017 \cdot 5$  – нечётное число писем. Чётное число не равно нечётному.

5. Даны три квадратных трёхчлена, каждый из которых имеет ровно один корень. Но при этом сумма любых двух из этих трёхчленов образует квадратный трёхчлен, не имеющий корней. Может ли так быть? Если да, то приведите пример.

*Ответ:* да, например:  $(x - 1)^2$ ,  $x^2$ ,  $(x + 1)^2$ .



## 10 класс

1. В алфавите племени Тру-ля-ля 5 букв. Словом является любая последовательность из 5 букв, в которой есть хотя бы две (т.е. две или более) одинаковых буквы. Сколько слов в языке племени?

*Решение.* Всевозможных слов  $5^5$  (надо 5 раз выбрать одну букву из пяти). Слов, в которых все буквы разные – это число перестановок из 5 букв:  $5!$ . Значит, всего слов, в которых не все буквы разные:  $5^5 - 5! = 3005$ .

*Ответ:* 3005.

2. В наборе было 27 гирек массой 1 г, 2 г, 3 г, ... 27 г. Можно ли их разложить на две равные по массе группы, если гирьку массой в 17 г потеряли?

*Решение.* Общая масса гирек  $\frac{1+27}{2} \cdot 27 - 17 = 361$  г – нечётное число.

*Ответ:* нет.

3. Дана функция  $f(x) = (x + 4)^2 - 4$ . Решите уравнение  $f(f(f(x))) = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= [(x + 4)^2 - 4 + 4]^2 - 4 = (x + 4)^4 - 4; \\ f(f(f(x))) &= [(x + 4)^4 - 4 + 4]^2 - 4 = (x + 4)^6 - 4; \\ (x + 4)^6 - 4 &= 0 \rightarrow x + 4 = \pm \sqrt[6]{4}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $x = -4 \pm \sqrt[6]{4}$ .

4. Для постройки элитного дома фирма заказала архитектору проект, в котором на каждом этаже должна была находиться только одна квартира. Через некоторое время фирма решила сэкономить на площади, которую занимает дом, и попросила архитектора переделать проект так, чтобы подъездов было на 3 меньше, но в каждом подъезде на 4 этажа больше. Общее число квартир в доме при этом увеличилось. Потом фирма решила ещё сэкономить и попросила архитектора уменьшить число подъездов ещё на 3, число этажей увеличить ещё на 4. К своему удивлению архитектор обнаружил, что общее число квартир в доме уменьшилось. Как такое могло быть?

*Решение.* Например, сначала был запланирован 7-подъездный дом в 2 этажа, число квартир  $7 \cdot 2 = 14$ . Потом получили дом  $(7 - 3) = 4$  подъезда и  $(2 + 3) = 5$  этажей, число квартир  $4 \cdot 5 = 20 > 14$ . Затем получили  $(4 - 3) = 1$  подъезд и  $(5 + 3) = 8$  этажей, число квартир  $1 \cdot 8 = 8 < 14$ .

5. В каждой из 10 губерний страны Авангардии проживает по 1000 000 работников. Известно, что зарплата 10 % самых высокооплачиваемых работников составляет 90 % зарплаты всех работников в стране. Но при этом никакой социальной напряжённости в стране нет, так как в любой губернии зарплата любых 10 % работников составляет не более 11 % всей зарплаты, выплачиваемой в данной губернии. Объясните, как такое может быть.

*Решение.* Пусть во всех губерниях, кроме 10-й, все работники получают одинаково – по 1000 тугриков в месяц, а в 10-й – тоже одинаково, но по 81000 тугриков в месяц. Тогда ясно, что любые 10 % работников в любой губернии получают ровно 10 % зарплаты, выплачиваемой в данной губернии, что меньше 11 %.

С другой стороны, в 10-й губернии за месяц все работники получают  $(81000 \cdot 1000000) = 81$  млрд. тугриков, а все остальные работники в девяти губерниях:  $9 \cdot 1000 \cdot 1000000 = 9$  млрд. тугриков.

Процентная доля зарплаты самых богатых жителей страны (жителей 10-й губернии) равна:  $100 \% \cdot \frac{81 \text{ млрд.}}{(81 + 9) \text{ млрд.}} = 90 \%.$

# ВЕСЕННЯЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

2017/18 учебный год

Условия с решениями

## 7 класс

1. Электропоезд длиной  $l = 180$  м проезжает мимо километрового столба за время  $t = 9$  с. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиной  $L = 360$  м?

*Решение.*

Скорость электропоезда:  $v = \frac{l}{t} = \frac{180 \text{ м}}{9 \text{ с}} = 20 \text{ м/с}$ , расстояние  $l+L$  электропоезд проедет за время:

$$t = \frac{l+L}{v} = \frac{(180+360) \text{ м}}{20 \text{ м/с}} = 27 \text{ с.}$$

*Ответ:* 27 с.

2. По топкому болотистому месту идти тяжело. При каждом шаге приходится затрачивать много энергии. Почему?

*Решение.* При ходьбе по твёрдой поверхности воздух поступает под подошвы, поэтому атмосферное давление на стопу сверху уравнивается давлением на стопу снизу. В болотистом месте под подошвой создаётся пространство, в которое воздух не попадает, поэтому давление атмосферного воздуха на стопу сверху оказывается нескомпенсированным.

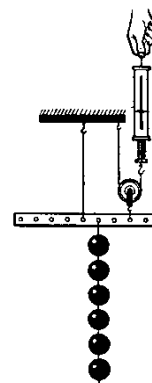
3. Допустим, что в лаборатории на Луне исследователь опускает камень в воду. Каков будет результат опыта? Будет ли камень плавать на поверхности воды, так как он весит на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле?

*Решение.* Вес камня на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле, но во столько же раз меньше и вес воды, вытесненной камнем. Поэтому камень утонет в воде точно так же, как и на Земле.

4. Определите показание динамометра (см. рис.), если вес каждого шарика равен  $P = 10$  Н. Рычаг находится в равновесии. (Весом блока пренебречь.)

*Решение.* Подвижный блок даёт двойной выигрыш в силе. Условие равновесия рычага:  $6P \cdot a = 2F \cdot 3a \rightarrow F = P$ .

*Ответ:* 10 Н.



5. Автомобиль все время ехал по прямой. Несколько часов он двигался с постоянной скоростью 40 км/ч, затем 1 ч простоял в пробке, после чего ещё 2 ч продолжал движение со скоростью 60 км/ч и прибыл в пункт назначения. Найдите среднюю скорость автомобиля за всё время путешествия и среднюю скорость за последние 2,5 ч движения.

*Первое решение.* За последние 3 ч автомобиль проехал 120 км, т.е. средняя скорость за последние 3 ч тоже 40 км/ч. Итак средняя скорость на всем пути 40 км/ч. За последние 2,5 ч средняя скорость равна:  $120 \text{ км} : 2,5 \text{ ч} = 48 \text{ км/ч}$ .

*Второе решение.*

Средняя скорость на всем пути равна:  $\frac{t \cdot 40 + 2 \cdot 60}{t + 1 + 2} = \frac{40t + 120}{t + 3} = \frac{40(t + 3)}{t + 3} = 40 \text{ км/ч}$ .

Средняя скорость за последние 2,5 часа равна:  $\frac{2 \cdot 60}{2,5} = 48 \text{ км/ч}$ .

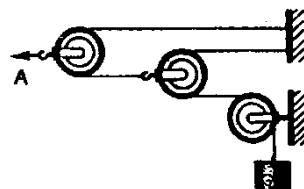
*Ответ:* 40 км/ч и 48 км/ч.

## 8 класс

1. Ко дну сосуда с водой приморожен шарик из льда. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает? Изменится ли при этом сила давления воды на дно сосуда?

*Решение.* Так как объём получившейся из льда воды меньше объёма шарика из льда, то уровень воды в сосуде понизится, и сила давления на дно  $F_d = \rho_{\text{в}}gh \cdot S_{\text{дна}}$  тоже понизится.

2. С какой силой натянут трос  $A$  (см. рис.), если вес груза  $P = 1000 \text{ Н}$ ?



*Решение.* Каждый подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза.

*Ответ:* 4000 Н.

3. Два куска железной проволоки имеют одинаковую массу. Длина одного из них в 10 раз больше длины другого. Какой кусок проволоки имеет большее сопротивление и во сколько раз?

*Решение.*

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = m_2 \\ l_1 = 10l_2 \\ R_1/R_2 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_1 = S_1 l_1 \rho = m_2 = S_2 l_2 \rho \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{10}, \quad S_1 = \frac{S_2}{10}. \\ R_1 = \gamma \frac{l_1}{S_1} = \gamma \frac{10l_2}{S_2/10} = 100\gamma \frac{l_2}{S_2} = 100R_2 \rightarrow R_1/R_2 = 100. \end{array}$$

*Ответ:* длинный проводник, больше в 100 раз.

4. Иногда воду удаётся нагреть выше температуры кипения, такая вода называется перегретой. Пробирку с перегретой водой массой  $m_1 = 100 \text{ г}$  встряхивают, в результате чего вода закипает, а часть её обращается в пар. Какой была изначальная температура воды, если её выкипело  $m_2 = 1,0 \text{ г}$ ?

Удельная теплоёмкость воды  $c_{\text{в}} = 4190 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{град})$ , удельная теплота парообразования воды  $L = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ .

*Решение.*  $Q_{\text{отд}} = m_1 c_{\text{в}}(t - 100)$ ,  $Q_{\text{пол}} = Lm_2$ ;  $m_1 c_{\text{в}}(t - 100) = Lm_2 \rightarrow$

$$t = \frac{Lm_2}{m_1 c_{\text{в}}} + 100^\circ\text{C} = \frac{2,26 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 4190} + 100 = 105,39^\circ \approx 105^\circ.$$

*Ответ:*  $\approx 105^\circ$ .

5. В сосуде с водой плавает деревянный брусок. Как изменится глубина погружения бруска в воду, если поверх воды налить керосин?

*Решение.* Увеличится давление воды на дно бруска, поэтому глубина погружения в воду уменьшится.

## 9 класс

1. Ртутный барометр уронили, и он, сохраняя вертикальное положение, падает с большой высоты. Если не учитывать сопротивления воздуха, то можно считать, что барометр при падении находится в состоянии невесомости. Что он будет показывать?

*Решение.* Атмосферное давление на ртуть во время падения не изменится, а вот вес столба ртути будет равен нулю. Поэтому ртуть полностью заполнит барометрическую трубку.

2. Чтобы вскипятить воду в чайнике, в неё можно опустить электрический нагреватель мощностью 500 Вт или мощностью 1 кВт. Каким из нагревателей нужно пользоваться, чтобы затратить меньше электроэнергии?

*Решение.* Если бы не было потерь тепла, количество затраченной электроэнергии в обоих случаях было бы одинаковым. Но следует учесть, что чем дольше закипает вода, тем больше тепла передается окружающей среде.

*Ответ:* 1 кВт.

3. На какой высоте от поверхности Земли ускорение свободного падения уменьшается а) в 2 раза, б) в 3 раза, в) в 5 раз по сравнению с ускорением свободного падения у поверхности Земли?

$$\text{Решение. } mg = G \frac{mM}{R^2}, \quad mg_h = G \frac{mM}{(R+h)^2} \rightarrow g_h = g \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow h = R \left( \sqrt{\frac{g}{g_h}} - 1 \right)$$

$$\text{а) } h = 6400 \text{ км} \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 2,6 \cdot 10^3 \text{ км};$$

$$\text{б) } h = 6400 \text{ км} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 4,7 \cdot 10^3 \text{ км};$$

$$\text{в) } h = 6400 \text{ км} \cdot (\sqrt{5} - 1) \approx 7,9 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

4. Раскаленный алюминиевый куб, положенный на лед, температура которого  $0^\circ\text{C}$ , полностью в него погрузился. Определите начальную температуру куба. Изменением объема куба при его охлаждении пренебечь.

Удельная теплоёмкость алюминия  $c_a = 920 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{град})$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335 \cdot 10^3 \text{ Дж}/\text{кг}$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность алюминия  $\rho_a = 2700 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

*Решение.*  $Q_{\text{отд}} = c\rho_a V(t - 0^\circ\text{C})$ ,  $Q_{\text{пол}} = \lambda V\rho_{\text{л}}$ , где  $V$  – объём куба;

$$c\rho_a V(t - 0^\circ\text{C}) = \lambda V\rho_{\text{л}} \rightarrow t = \frac{\lambda\rho_{\text{л}}}{\rho_a c} = \frac{335 \cdot 10^3 \cdot 900}{920 \cdot 2700} \approx 121^\circ\text{C}.$$

*Ответ:*  $121^\circ\text{C}$ .

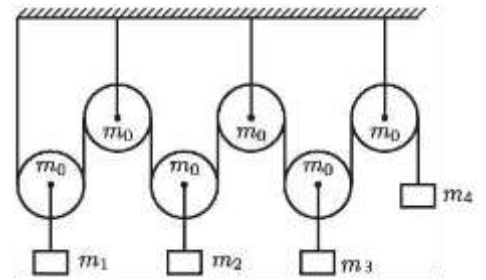
5. В системе, изображенной на рисунке, масса самого правого груза равна  $m_4 = 1 \text{ кг}$ , а массы всех блоков одинаковы и равны  $m_0 = 300 \text{ г}$ . Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ . Массой троса и трением в блоках пренебечь.

*Решение.* Пусть  $T$  – сила тяжести нити, тогда  $T = m_4 g$ ,

$$2T = m_1 g + m_0 g \rightarrow$$

$$2m_4 = m_1 + m_0 \rightarrow m_1 = 2m_4 - m_0 = 2 \cdot 1 - 0,3 = 1,7 \text{ кг.}$$

*Ответ:*  $m_1 = m_2 = m_3 = 2m_4 - m_0 = 1,7 \text{ кг.}$



## 10 класс

1. Вода, имеющая такую же температуру, что и окружающий воздух, испаряется. Откуда берется теплота для испарения?

*Решение.* Вода при испарении охлаждается – тепло берётся из внутренней энергии воды.

2. В Закавказье растёт дерево самшит, плотность которого в  $\alpha = 1,2$  раза больше плотности воды. Из него изготовили брусок. Такого же объёма брусок изготовили из липы, плотность которой в  $\beta = 1,2$  раза меньше плотности воды. Бруски связали вместе и погрузили в воду. Что стало с брусками?

*Решение.*  $F_A = \rho_B \cdot 2V \cdot g, \quad F_T = \alpha \rho_B Vg + \frac{\rho_B}{\beta} Vg = \rho_B Vg \left( \alpha + \frac{1}{\beta} \right) =$   
 $= \rho_B Vg \left( 1,2 + \frac{1}{1,2} \right) = \rho_B Vg \cdot 2,03 > F_A.$

*Ответ:* бруски утонули.

3. В открытую с обоих концов трубку вставлена пробка длиной  $a$ . Пробка находится от края трубки на расстоянии  $a$  (рис. 1). Какую работу надо произвести, чтобы вытащить пробку из трубки, если сила трения между пробкой и трубкой  $F$ ? Весом пробки пренебречь.

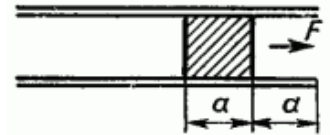


Рис. 1

*Решение.* Работа равна площади под графиком  $F_x(x)$  на участке от 0 до  $2a$  (рис. 2).

*Ответ:*  $A = 1,5Fa.$

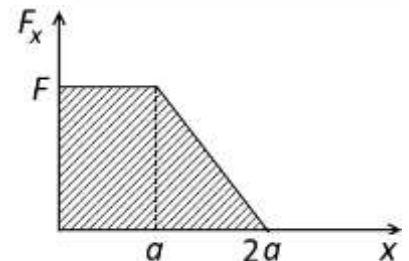


Рис. 2

4. В романе Жюль Верна "Из пушки на Луну" космонавты стартовали с Земли в пушечном снаряде. Скорость снаряда при вылете из пушки была равна  $v = 11,2$  км/с, а длина ствола пушки  $l = 100$  м. Какой вес имел во время старта спичечный коробок массой  $m = 10$  г?

*Решение.*  $P = m \left( g + \frac{v^2}{2l} \right) = 0,010 \text{ кг} \left( 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \frac{(11,2 \cdot 10^3)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{2 \cdot 100 \text{ м}} \right) = 6272 \text{ Н} \approx$   
 $\approx 6300 \text{ Н}.$

*Ответ:* 6,3 кН.

5. Первая космическая скорость для Сатурна составляет  $v = 25$  км/с, а средняя плотность Сатурна  $\rho = 0,63 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Каков радиус Сатурна? Гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  (Н·м<sup>2</sup>)/кг<sup>2</sup>. Объём шара  $V = \frac{4}{3} \pi R^3.$



*Решение.* Для спутника массой  $m$ , движущегося по круговой орбите вблизи поверхности планеты, справедлив второй закон Ньютона:  $ma = F_{\tau}$ , где

$a = \frac{v^2}{R}$ ,  $F_{\tau} = G \frac{mM}{R^2}$ ,  $R$  – радиус планеты,  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  – масса планеты:

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{G}{R^2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \rightarrow R = \frac{v}{\sqrt{\frac{4}{3} G \rho}} =$$

$$= \frac{25 \cdot 10^3 \text{ м/с}}{\sqrt{\frac{4}{3} \pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} (\text{Н} \cdot \text{м}^2) / \text{кг}^2 \cdot 630 \text{ кг/м}^3}} = 5,96 \cdot 10^7 \text{ м} = 5,96 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

*Ответ:*  $5,96 \cdot 10^4$  км.