ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
2019/20 учебный год

4 класс

1. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только рычажные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

Решение. Разбиваем сначала гвозди пополам – на две группы по 12 кг, после чего одну из этих групп делим пополам, по 6 кг каждая, а затем еще раз пополам. Полученные 3 кг гвоздей откладываем и получаем:

3 кг + 6 кг = 9 кг .

2. Доктор Айболит раздал четырём заболевшим зверям 2018 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придётся съесть слону?

Решение. Пока звери не съели лекарство, заберём одну таблетку у носорога, две у бегемота и три у слона. Теперь у всех четверых поровну. Забрали мы 6 таблеток, то есть осталось их 2012 – по 503 у каждого. У слона забрали 3 таблетки, значит, Айболит прописал слону 506 таблеток.

Ответ: 506 таблеток.

3. Фраза: Bekybekjwe – tvunemwe ctyd meuw, имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте.

Решение. Начинать расшифровку надо со слова «математика».

Ответ: Математика – служанка всех наук.

4. Среди всех положительных чисел с суммой цифр, равной 21, найдите наибольшее число и наименьшие число. Ответ обоснуйте.

Решение. Однозначных и двузначных чисел с суммой 21 не бывает. Поэтому наименьшее число с такой суммой будет трёхзначным. Цифра сотен у него должна быть возможно меньше. Но при данной сумме цифр это означает, что как можно больше должны быть цифры десятков и единиц. Полагая их девятками, получаем искомое наименьшее число 399. Наибольшего же числа не существует: достаточно к тому же числу 399 приписать справа любое количество нулей.

Ответ: наименьшее число 399, наибольшего не существует.

5. На покраску большого деревянного куба размером 3×3×3 ушел 1 кг, краски. Однако понадобились кубики поменьше, и большой куб распилили на кубики размером 1×1×1. Сколько необходимо ещё краски для докраски маленьких кубиков?

Решение. Понятно, что после распила получилось: **8** кубиков с тремя окрашенными гранями (угловые), **12** кубиков с двумя окрашенными гранями (центральные кубики рёбер), **6** кубиков с одной окрашенной гранью (центры граней) и **1** полностью неокрашенный кубик (центральный). Всего окрашенных граней маленьких кубиков (на них ушел 1 кг краски) оказалось $8 \times 3 + 12 \times 2 + 6 \times 1 = 54$, неокрашенных же граней стало $8 \times 3 + 12 \times 4 + 6 \times 5 + 6 = 108$. Понятно, что на них надо краски в 2 раза больше.

Ответ: 2 кг.

5 класс

1. Фраза: Bekybekjwe – xezjxe j tvunemwe ctyd meuw, имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте.

Решение. Начинать расшифровку надо со слова «математика».

Ответ: Математика – царица и служанка всех наук.

2. Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. Каждый день он проползает вверх на 3 см, а за каждую ночь сползает вниз на 1 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота равна 75 см?

Ответ: Червяк окажется наверху к вечеру 37 дня.

3. В городе Мухоморске телефонные номера состоят из шести цифр, причём первая цифра номера не может быть восьмеркой или нулем. Сколько телефонных номеров Мухоморске?

Решение. Очевидно, что на первом месте мухоморского телефона можно поставить любую из восьми цифр. На второе, третье, четвёртое, пятое и шестое – любую из 10. По комбинаторному правилу произведения количество номеров будет равно 8×10^5.

Это – цивилизованное решение. Школьники, не знающие комбинаторики, могут решить задачу, например, так. Сначала найдём число номеров, начинающихся с фиксированной цифры. Их число будет равно числу номеров, составленных из 5 цифр, – их количество равно 100000 (с номера 00000 до номера 99999). Тогда количество всех телефонных номеров будет равно $8 \times 100000 = 800000$, где 8 – количество возможных первых цифр.

Ответ: 8×10^5 (или 800000).

4. Какое число в 7 разбольше своей последней цифры?

Ответ: $35 = 7 \times 5$.

5. Круглая поляна обсажена деревьями. Мальчик и девочка пошли вокруг поляны, считая деревья. Они идут в одном направлении, но начали считать в разных местах. Дерево, которое у девочки было седьмым, у мальчика было двадцатым, а дерево, которое у мальчика было седьмым, у девочки было девяносто третьим. Сколько деревьев растет вокруг поляны? Ответ объясните.

Решение Дерево, которое у девочки было седьмым, у мальчика было двадцатым, Отсчитаем 6 деревьев назад. Получается, что первое дерево у девочки было 14-м, а последнее её дерево было 13-м. Седьмое дерево мальчика у девочки было 93-м. Отсчитаем 6 деревьев вперёд и получим, что 13-е дерево мальчика – это 99-е дерево девочки. Поскольку оно у девочки последнее, всего деревьев 99.

Ответ: 99.

6 класс

1. Простым или составным является число $3^{2019} + 1$?

Решение. Число представляет собой сумму двух нечётных и является чётным, т.е. составным.

Ответ: составное.

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 77$.

Решение. Надо вычислить сумму всех нечётных чисел от 1 до 77. Это можно сделать либо «в лоб», либо догадаться, что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Ответ: 1521.

3. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в десятом подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

Решение. Если на этаже не более трёх квартир, то в десяти подъездах их не более чем $10\cdot9\cdot3 = 270$, то есть в 10-м подъезде квартиры № 333 не будет. Если на этаже не менее пяти квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее чем $9\cdot9\cdot5 = 405$ квартир, то есть Сашина квартира будет не в 10-м подъезде. Значит, квартир на этаже 4, в первых девяти подъездах $9\cdot9\cdot4 = 324$ квартиры. Тогда в 10-м подъезде квартиры начинаются с 325-й. На втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем – с 333-й. Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж.

Ответ: на 3 этаже.

4. Как разложить по семи кошелькам 127 рублёвых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?

*Решение***.** 127 монет надо разложить так: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

5. Докажите, что нельзя обойти конём шахматную доску с вырезанными полями $a1$ и $h8$, побывав на остальных полях ровно по одному разу.

Решение. Конь ходит на клетку противоположного цвета. Если можно обойти конём шахматную доску с вырезанными полями $a1$ и $h8$, побывав на остальных полях ровно по одному разу, то число белых клеток на этой доске равнялось бы числу чёрных, что неверно (поля $a1$ и $h8$ одинакового цвета).

7 класс

1. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r}\times\,249\\ \text{ooo}\\ \hline \text{ooo}\\ \text{oo8}\\ \text{2oo}\\ \hline \text{oooo7}\end{array}$$

Вместо буквы «o» может стоять любая цифра.

Решение. Ведём обозначения:

$$\begin{array}{r}\times\,249\\ abc\\ \hline \text{ooo}\\ \text{oo8}\\ \text{2oo}\\ \hline \text{oooo7}\end{array}$$

Заметим, что $b\times 249$ оканчивается на 8. Учитывая, что $0 \le b \le 9$, получаем $b = 2$. Рассмотрим произведение $a\times 249$: оно является трёхзначным, начинающимся с 2. Поэтому $a = 1$. Произведение $c\times 249$ оканчивается на 7. Тогда $c = 3$. Теперь можно легко восстановить цифры.

Ответ:

$$\begin{array}{r}\times\,249\\ 123\\ \hline 747\\ 498\\ 249\\ \hline 30627\end{array}.$$

2. Возьмите любое трёхзначное число, умножьте его на 7, результат умножьте на 11, а потом на 13. Сравните полученное число с исходным, опишите обнаруженное явление и объясните причину.

Решение. Каким бы ни было исходное трёхзначное число, после трёх умножений получится шестизначное число, которое состоит их двух исходных трёхзначных чисел, записанных подряд (например, из числа 142 получится 142142). Причина этого явления в том, что $7\times 11\times 13= 1001$, а умножить на 1001 – это все равно, что умножить на 1000 и к результату прибавить исходное число (например: $142\times 1001 = 142000 + 142 = 142142$).

3. Страницы книги пронумерованы подряд с первой до последней. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 25 листов и сложил номера всех пятидесяти вырванных страниц. У него получилось число 2020. Докажите, что сложение было выполнено неправильно.

*Решение***.** На каждом из вырванных листов – две страницы. Номер одной из страниц – чётное число, а другой – нечётное. Поэтому в сумме всех номеров вырванных страниц будет 25 чётных и 25 нечётных слагаемых. Нетрудно видеть, что сумма в таком случае будет нечётной, а значит, она не может быть равна 2020.

4. Определите пропущенные числа и найдите сумму: $3 + 8 + 15 + \ldots + 255$.

Решение. Заметим, что $3 = 2^2 - 1$, $8 = 3^2 - 1$, $255 = 16^2 - 1$. Таким образом, n-й член суммы равен $(n + 1)^2 - 1$. Тогда сумма будет равна $(2^2 + 3^2 + \ldots + 16^2) - 15 = 1480$.

Ответ: 1480.

5. Имеется 12 одинаковых по виду монет, среди которых одна фальшивая (она легче настоящей). Как с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

Решение. Задача имеет много вариантов решения. Один из них такой.

Для начала разобьём 12 монет на три группы по 4. Сравним две из них. Если они равны по весу, то фальшивая монета находится в оставшейся группе. Если нет – то фальшивая монета находится в группе, более лёгкой по весу. Таким образом, первым взвешиванием мы определили четвёрку, в которой находится фальшивая монета.

Вторым взвешиванием сравниваем любые две монеты из этой четвёрки между собой. Если какая-то из них оказалась легче другой, то она и есть фальшивая, и решение проведено за два взвешивания. Если они имеют одинаковый вес, то фальшивая – среди оставшихся двух.

Третьим взвешиванием сравниваем их и определяем фальшивую.

8 класс

1. Сравните числа: $\dfrac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{2019}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{2019}-\sqrt{2018}}$.

Решение.

.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{2019}} > \dfrac{1}{\sqrt{2019}-\sqrt{2018}}$.

2. Решите уравнение: $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0$.

Решение. $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 + (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = –1, y = 1$.

Ответ: $x = –1$, $y = 1$.

3. Простым или составным является число $4^{2019} + 1$?

Решение. $4^{2019} + 1 = (4^{673})^3 + 1$ раскладывается по формуле кубов.

Ответ: число составное.

4. Докажите, что произведение всех натуральных чисел от 1 до 19 не может быть квадратом натурального числа.

Решение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до 19 делится на 19. но не делится на 19^2, так как 19 – простое. Поэтому оно не может быть квадратом целого числа.

5. Найдите последнюю цифру числа 7^{2019}.

Решение. Заметим, что $7^4 = 2401$, тогда $7^{2019} = 7^{4\times504}\times7^3 = = (2401)^{504} \times 343 = (10c + 1)(10p + 3) = 10n + 3$. Законность произведённых действий следует из следующего свойства: остаток произведения равен произведению остатков: $(10c + t)(10k + p) = 10n + pt$. Итак, 7^{2019} оканчивается на 3.

Ответ: 3.

9 класс

1. Решите уравнение: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$.

Решение. Перемножим в левой части уравнения первую скобку на четвёртую, а вторую на третью, получим: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$. Обозначим $x^2 +5x + 4 = y$. Для y имеем уравнение $y(y + 2) = 24$, откуда $y = 4$ или $y = –6$. Первый вариант даёт $x = 0$ или $x = –5$, а второй не даёт действительных решений.

Задачу также можно было решить с помощью теоремы Безу, подобрав корни 0 и –5.

Ответ: $x = 0$ или $x = –5$.

2. Найдите последнюю цифру числа $7^{9^{11}}$.

Решение.

$9^{11} = (4\times 2+1)^{11} = 4k+1$,

$7^{9^{11}} = 7^{4k+1} = 7\times(7^4)^k = 7\times(2401)^k = 7(10s+1)^k = \ = 7\times(10l+1) = 10m+7$.

Ответ: последняя цифра 7.

3. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5 см (рис. 1). Найдите площадь фигуры, каждая точка которой удалена от данного треугольника не более чем на 1 см (точки внутри треугольника также принадлежат этой фигуре).

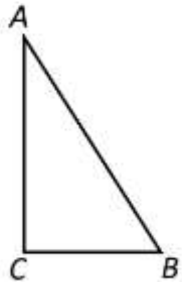
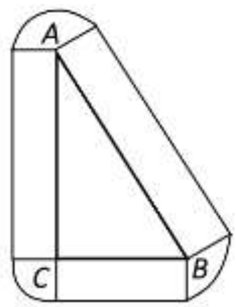


Рис. 1

Решение. Заметим, что данный треугольник прямоугольный. Из чертежа ясно, что фигура, площадь которой надо найти, имеет вид, изображённый на рисунке.



Искомая площадь – это сумма площади треугольника и площади контура толщиной 1 см вокруг него. Площадь треугольника $S_\Delta = \dfrac{AC\cdot AB}{2} = 6$ см^2, а площадь контура разбивается на несколько частей (см. рис.) Три из них – прямоугольники, а три другие образуют в сумме круг (это можно проверить непосредственным вычислением углов или пропорционально уменьшая треугольник – когда треугольник «сожмётся» в точку, контур выродится в круг). Таким образом, площадь контура: $S_к = 1\cdot AB + 1\cdot BC + 1\cdot AC + \pi\cdot 1^2 = (12+\pi)$ см^2. Тогда $S = S_\Delta + S_к = (\pi + 19)$ см^2.

Ответ: $S = (\pi + 19)$ см^2.

4. Решите уравнение в целых числах: $x^5 – x = 1020$.

Решение. Рассмотрим левую часть уравнения:

если $x \le –1 \Rightarrow x(x^4 – 1) \le 0 \Rightarrow$ решений нет;

если $x = 0 \Rightarrow x(x^4 – 1) = 0 \Rightarrow$ не подходит;

если $x \geq 0$ $x(x^4 - 1)$ возрастает и при $x = 4$ $x(x^4 - 1) = 1020$, $x = 4$ – корень уравнения.

Ответ: $x = 4$.

5. Решите систему: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy(x+y) = 12. \end{cases}$

Решение. Умножим второе уравнение на 3, а затем сложим оба уравнения. Воспользовавшись формулой $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, получим $(x + y)^3 = 64 \Rightarrow x + y = 4$. Подставив последнее равенство во второе уравнение, приходим к системе $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3. \end{cases}$ Решив эту систему (например, рассмотрев вспомогательное квадратное уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$), находим две пары решений: (3; 1), (1; 3).

Ответ: (3; 1), (1; 3).

10 класс

1. Решите уравнение: $x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{\pi x}{2}$.

Решение. $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2\geq\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$. Равенства с обеих сторон возможны, когда $x = \pm1$. Подставив эти значения x в уравнение, получим верное равенство.

Ответ: $x = \pm1$.

2. Изобразите на координатной плоскости $x0y$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению $||x| + x| + ||y| + y| = 0$.

Решение. Очевидно, что сумма модулей равна нулю тогда и только тогда. когда равно нулю выражение под каждым из модулей. То есть имеем $\left[\begin{array}{l}|x|+x=0,\\|y|+y=0\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}x\leq 0,\\y\leq 0.\end{array}\right.$ Решение – отрицательный (третий) квадрант координатной плоскости.

Ответ: отрицательный (третий) квадрант координатной плоскости.

3. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1-x$.

Решение. Из ОДЗ уравнения и учета знака правой части следует, что $0 \leq x \leq 1$, следовательно, $1 - x \leq 1$. Но $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\geq 1$, значит, равенство возможно, когда левая и правая части равны 1. Таким образом, $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

4. Докажите, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2019^2}<1$.

Решение.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2019^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2018\cdot 2019}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=1-\frac{1}{2019}<1.$$

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\xy=1\end{cases}$ при различных значениях параметра a?

Решение. $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\xy=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)^2=a^2+2,\\(x-y)^2=a^2-2.\end{cases}$ Отсюда следует, что:

если $|a|<\sqrt{2}$, то решений нет;

если $|a|=\sqrt{2}$, то решений два;

если $|a| > \sqrt{2}$, то решений четыре.
Это легко показать графически.