**Заочный физико-математический лицей**

**«Авангард»**

Е. Н. Филатов

# алгебра

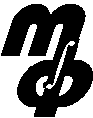
**10**

##### **Экспериментальный учебник**

**Часть 1**

###### 

###### **МОСКВА – 2018**



Заочный физико-математический лицей

«Авангард»

Е. Н. Филатов

# алгебра

10

##### Экспериментальный учебник

Часть 1

###### МОСКВА – 2018

Филатов Е. Н. Математика-10. Часть 1. Экспериментальный учебник. – М.: ЗФМЛ «Авангард», 2018. – 344 с.

Учебник предназначен для углубленного изучения математики в 10-м классе. Главная цель учебника – научить учеников самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» - краткие рекомендации к их решению и ответы.

© *Е.Н. Филатов, 2018*

© *Заочный физико-математический лицей «Авангард», 2018*

**СОДЕРЖАНИЕ**

От автора 4

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ**

§ 1. Числовые последовательности 5

§ 2. Арифметическая прогрессия 40

§ 3. Геометрическая прогрессия 95

**ОЛИМПИАДНЫЕ ТЕМЫ**

§ 4. Метод математической индукции 163

§ 5. Комбинаторика 182

§ 6. Арифметика остатков 215

§ 7. Инварианты 248

§ 8. Графы 263

ПОДСКАЗКИ 282

ОТВЕТЫ 325



*Дорогой друг!*

Данный учебник – по сути, *самоучитель* по математике. По нему можно научиться математике, даже если рядом нет ни учителя, ни родителей. Необходимо только желание ученика *научиться*.

Первая часть учебника содержит два больших раздела: «Последовательности и прогрессии» и «Олимпиадные задачи». Раздел «Олимпиадные задачи включает в себя темы: «Метод математической индукции», «Комбинаторика», «Арифметика остатков», «Инварианты» и «Графы».

Вторая часть учебника состоит из двух разделов: «Уравнения и системы уравнений» и «Неравенства».

Все темы даны на высоком уровне трудности.

Большой объем книги не должен пугать ни учеников, ни их родителей: книга написана очень понятно и очень подробно.

Работать с книгой надо так: сначала прочитать теоретический материал и разобранные в тексте задачи до того места, пока не появится указание: СТОП! Решите самостоятельно.

Далее даются задания для самостоятельного решения, которые нужно решить в тетради и тут же, немедленно (!) записать решения в отдельной тетради.

После изучения всего параграфа очень желательно выполнить Домашнее задание, которое дается в конце каждого параграфа.

Задачи разделены на пять категорий трудности: А – очень легкие, Б – легкие, В – средней трудности, Г – трудные и Д – очень трудные.

Можно ограничиться только решением задач категорий А и Б – это хороший школьный уровень. Если решить все задачи категории В – это уже твердая школьная «пятерка». Ну а те, кто осилят уровни Г и Д, будут знать математику на «пять с плюсом». Чем больше задач Вы решите, тем лучше Вы будете знать математику.

Желаю удачи!

*Автор*

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ**

**§ 1. Числовые последовательности**

*Автор*: Рассмотрим следующие последовательности чисел:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1) 1, 2, 3, 4, 5, …  2) 2, 4, 6, 8, 10, …  3) 1,  4) 1, 4, 9, 16, 25, …  5)  6) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … | |
| Не могли бы Вы *словесно* описать каждую последовательность? | | |
| *Читатель*: Легко! Первая – это последовательность *натуральных* чисел; вторая – последовательность *чётных натуральных* чисел; третья – последовательность чисел, *обратных натуральным*; четвёртая | |  |

последовательность *квадратов натуральных* чисел; пятая – последовательность *правильных положительных дробей со знаменателем 11*; шестая – последовательность простых чисел. Замечу, что все последовательности, кроме пятой, – бесконечные, а пятая последовательность содержит ровно 10 чисел.

*Автор*: Всё правильно! А теперь давайте попробуем задать каждую из этих последовательностей с помощью *формулы*. Например, пусть *хп* – *п*-й член первой последовательности, тогда очевидно, что *хп*= *п*, где *п* ∈ *N*, т.е. *п* – натуральное число.

*Читатель*: Тогда вторую последовательность чётных чисел можно задать так: *хп* = 2*п*, *п* ∈ *N, п=*10.

*Автор*: Верно, продолжайте.

*Читатель*: Третья последовательность  *п* ∈ *N*; четвёртая последовательность *хп*= *п*2, *п* ∈ *N*; пятая последовательность  *п* ∈ *N*. А вот шестую последовательность задать с помощью формулы *невозможно*! Ведь не существует формулы для простых чисел!

*Автор*: Всё правильно! Теперь дадим определение.

***Определение 1.1.*** *Если каждому натуральному числу п (п = 1, 2, 3,…) поставлено в соответствие по некоторому закону число хп, то говорят, что задана* ***числовая последовательность: х1, х2,…, хп, … .***

Числа *х*1, *х*2, …, *хп* называются *членами последовательности*, член последовательности с номером *п* – *п*-м членом.

*Задать последовательность* – это значит указать закон, по которому можно вычислить каждый её член.

Мы пока освоили два способа задания последовательности: 1) словесное описание; 2) задание с помощью формулы *п*-го члена.

Рассмотрим ещё один способ задания числовой последовательности на конкретном примере.

Пусть *а*1 = 1, *а*2 = 1, а для всех *п* > 2 выполняется условие *ап = ап* – 1 + *ап* – 2. Вычислим несколько первых членов этой последовательности:

*а*3 = *а*2 + *а*1 = 1 + 1 = 2;

*а*4 = *а*3 + *а*2 = 2 + 1 = 3;

*а*5 = *а*4 + *а*3 = 3 + 2 = 5;

*а*6 = *а*5 + *а*4 = 5 + 3 = 8;

*а*7 = *а*6 + *а*5 = 8 + 5 = 13;

*а*8 = *а*7 + *а*6 = 13 + 8 = 21.

Мы получили последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... . С одной стороны, понятно, как вычислить любой член этой последовательности, а с другой – формулы, с помощью которой можно задать *п*-й член этой последовательности, у нас нет. Более того, эту формулу ещё никому не удалось получить. (Может быть, удастся Вам? Попробуйте!)

|  |  |
| --- | --- |
| Рассмотренная нами последовательность называется *числами Фибоначчи*.  Формула *ап = ап* – 1 + *ап* – 2 называется *рекуррентной* формулой (от латинского слова *recurro* – возвращаться). Рекуррентная формула выражает любой член последовательности, начиная с некоторого, через один или несколько предыдущих членов.  *Автор*: Давайте попробуем задать с помощью рекуррентных формул наши последовательности (1)–(6): | *Фибоначчи*  (Леонардо Пизанский,  1170–1250 гг.) –  итальянский математик |

1, 2, 3, 4, 5, … *хп = п*,

2, 4, 6, 8, 10, … *хп =* 2*п*,

1,  

1, 4, 9, 16, 25, … *хп*= *п*2

  *n <* 10*.*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … формулы для *хп* не существует.

Начнём с первой последовательности: *х*1 = 1, *хп* + 1 *= хп* + 1. В самом деле, тогда *х*2 = 1 + 1 = 2, *х*3 = 2 + 1 = 3 и т.д.

*Читатель*: Тогда для второй последовательности будет такая рекуррентная формула: *х*1 = 2, *хп* + 1 *= хп*+ 2.

*Автор*: Верно. А для третьей?

*Читатель*: Я думаю так: *х*1 = 1,  тогда    и т.д.

*Автор*: Правильно, продолжайте.

*Читатель*: Для четвёртой последовательности *х*1 = 1,   для пятой:   *п* ≤ 10, а для шестой это не возможно!

*Автор*: Всё верно.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А1.** Определите, является ли заданная функция последовательностью ( Z – множество целых чисел, Q- множество рациональных чиел):

а) *у* = 2*х* – 1, *х* ∈ (0; +∞); б) *у* = 2*х* – 1, *х* ∈ *Q*;

в) *у* = 2*х* – 1, *х* ∈ *Z*; г) *у* = 2*х* – 1, *х* ∈ *N*.

**А2.** Назовите член последовательности (*уп*), который:

а) следует за членом *у*31, *уп*, *уп* + 9, *у*2*п*;

б) предшествует члену *у*91, *у*639, *уп* – 1, *у*3*п*.

**Б1.** Выясните, является ли указанное ниже соответствие последовательностью. Если да, то составьте формулу *п*-го члена последовательности и найдите её первые пять членов:

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие его квадрат;

б) каждому натуральному числу ставится в соответствие его куб;

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие число 7;

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие обратное ему число.

**Вычисляем первые несколько членов числовой**

**последовательности по формуле *п*-го члена**

**Задача 1.1.** Вычислите первые пять членов последовательности (*сп*), заданной формулой:

а) *сп* = –2*п*2 + 7; б) *сп* = –2,5⋅2*п*; в) .

***Решение***.

а) *сп* = –2*п*2 + 7: *с*1 = –2⋅12 + 7 = 5; *с*2 = –2⋅22 + 7 = –8 + 7 = –1; *с*3 = –2⋅32 + 7 = –18 + 7 = –11; *с*4 = –2⋅42 + 7 = –2⋅16 + 7 = –25; *с*5 = –2⋅52 + 7 = –50 + 7 = –43.

Итак, первые пять членов: 5, –1, –11, –25, –43.

б) *сп* = –2,5⋅2*п*: *с*1 = –2,5⋅11 = –5; *с*2 = –2,5⋅22 = –2,5⋅4 = –10; *с*3 = –2,5⋅23 = –2,5⋅8 = –20; *с*4 = –2,5⋅24 = –2,5⋅16 = –40; *с*3 = = –2,5⋅25 = –2,5⋅32 = –80.

Первые пять членов: –5, –10, –20, –40, –80.

в): ; ; ; ; .

Первые пять членов: .

*Ответ*: а) 5, –1, –11, –25, –43; б) –5, –10, –20, –40, –80;

в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

Вычислите первые пять членов последовательности по заданной формуле.

**А3.** а) *ап* = 4*п* + 1; б) *сп* = –7*п* + 3; в) *bп* = 5*п* + 2; г) *ап* = –3*п* – 7.

**Б2.** а) ; б)  в) ; г) .

**Б3.** а) *хп* = *п*2 + 1; б) *уп* = –*п*3 – 10; в) *zп* = –*п*2 + 5; г) *wп* = *п*2 – 15.

**Б4.** Дана формула общего члена последовательности:

а) *ап* = 3*п* – 1. Найдите *а*1, *а*2, *а*5, *а*100;

б) *ап* = 3 + 2(*п* – 1). Найдите *а*1, *а*2, *а*12, *а*20.

**В1.** По заданной формуле *п-*го члена последовательности вычислите её первые пять членов:

а) *хп* = (–2)*п*; б) *сп* = (–1)*п*+1 – (–1)*п*;

в) *bп* = 2(–3)*п*–1; г) *dп* = (–2)*п* + (–2)*п*–1.

**В2.** Найдите первые три члена последовательности:

а) *bп* = (–1)*п*; б) ; в) *уп* = (–1)*п*+1 + 1;

г) *ап* = (–1)*п*⋅*п*; д) ; е) .

**Задача 1.2.** Определите, при каких значениях *п* члены последовательности, заданной формулой *хп* = (*п* + 4)(*п* – 5), удовлетворяют условию –18 ≤ *хп* ≤ 360.

***Решение***. Здесь должно выполняться двойное неравенство: –18 ≤ (*п* + 2)(*п* – 1) ≤ 360.

Решим два квадратных неравенства: (*п* + 4)(*п* – 5) ≥ –18 и (*п* + 4)(*п* – 5) ≤ 360.

1. (*п* + 4)(*п* – 5) ≥ –18 → *п*2 – *п* – 20 ≥ –18 → *п*2 – *п* – 2 ≥ 0 → (*п* + 4)(*п* – 5) ≥ 0.

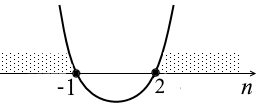


Рис. 1.1

Как видно из рис. 1.1, решение: *п* ≤ – 1 и *п* ≥ 2. Поскольку *п* – натуральное число, то берём только положительное решение *п* ≥ 2.

2. (*п* + 4)(*п* – 5) ≤ 360 → *п*2 – *п* – 20 ≤ 360 → *п*2 – *п* – 380 ≤ 0. Заметим, что 380 = 20⋅19, тогда, используя теорему Виета, легко сообразить, что *п*2 – *п* – 380 = (*п* + 19)(*п* – 20). Получаем: (*п* + 19)(*п* – 20) ≤ 0. Как видно их рис. 1.2, решение: –19 ≤ *п* ≤ 20. Берем только натуральные числа *п*: 1 ≤ *п* ≤ 20.

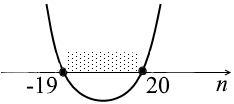


Рис. 1.2

Теперь надо найти такие натуральные *п*, которые одновременно удовлетворяют и неравенству (*п* + 4)× ×(*п* – 5) ≥ –18, и неравенству (*п* + 4)(*п* – 5) ≤ 360. Это – пересечение двух множеств: *п* ≥ 2 и 1 ≤ *п* ≤ 20 (рис. 1.3). Как видим, ответ на вопрос задачи – это множество натуральных чисел *п*: 2 ≤ *п* ≤ 20.



Рис. 1.3

*Ответ*: 2 ≤ *п* ≤ 20, *п* ∈ *N*.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б5.** Последовательность задана формулой *п-*го члена:

а) *ап* = 177 – 3*п*; б) *bп* = 125 – 7*п*;

в) *хп* = 23 – 1,5*п*; г) *уп* = 100 – .

Сколько положительных членов у этой последовательности?

**Б6.** Последовательность (*zп*) задана формулой *п-*го члена: .

а) Выпишите все члены этой последовательности, меньшие 10. Сколько таких членов?

б) Сравните *z*10 – *z*9 и *z*100 – *z*99.

**В3.** Найдите все члены последовательности (*ап*), заданной формулой *ап = п*2 – 3*п*, для которых выполняется неравенство *ап* < 3.

**Г1.** Определите, существуют ли члены последовательности (*хп*), заданной формулой *хп* = 78 – 15*п*, принадлежащие области определения функции . Если существуют, то укажите их.

**Вычисляем первые члены числовой последовательности,**

**заданной рекуррентной формулой**

**Задача 1.3.** Вычислите несколько первых членов последовательности (*уп*), если:

а) *у*1 = –3, *уп*+1 – *уп* = 10; б) *у*1 = 10, *уп*+1 ⋅ *уп* = 2,5;

в) *у*1 = 1,5, *уп*+1 – *уп* = *п*; г) *у*1 = –4, *уп*+1 : *уп* = –*п*2.

***Решение***.

а) *у*1 = –3, *уп*+1 – *уп* = 10 → *уп*+1 = *уп* + 10. Отсюда:

*у*2 = *у*1 + 10 = –3 + 10 = 7;

*у*3 = *у*2 + 10 = 7 + 10 = 17;

*у*4 = *у*3 + 10 = 17 + 10 = 27;

*у*5 = *у*4 + 10 = 27 + 10 = 37.

Итак, получили –3, 7, 17, 27, 37.

б) *у*1 = 10, *уп*+1 ⋅ *уп* = 2,5 . Отсюда:

; ;

; .

Итак: 10, , 10, , 10.

в) *у*1 = 1,5, *уп*+1 – *уп* = *п* → *уп*+1 = *уп* + *п*. Отсюда:

*у*2 = *у*1 + 1 = 1,5 + 1 = 2,5;

*у*3 = *у*2 + 2 = 2,5 + 2 = 4,5;

*у*4 = *у*3 + 3 = 4,5 + 3 = 7,5;

*у*5 = *у*4 + 4 = 7,5 + 4 = 11,5.

Итак: 1,5; 2,5; 4,5; 7,5; 11,5.

г) *у*1 = –4, *уп*+1 : *уп* = –*п*2 → *уп*+1 = –*п*2 ⋅ *уп*. Отсюда:

*у*2 = –12 ⋅ *у*1 = –12 ⋅ (–4) = 4;

*у*3 = –22 ⋅ *у*2 = –22 ⋅ 4 = –4⋅4 = –16;

*у*4 = –32 ⋅ *у*3 = –32 ⋅ (–16) = 9⋅16 = 144;

*у*5 = –42 ⋅ *у*4 = –42 ⋅ (–4) = –16⋅144 = –2304.

Итак: –4, 4, –16, 144, –2304.

*Ответ*: а) –3, 7, 17, 27, 37; б) 10, , 10, , 10; в) 1,5; 2,5; 4,5; 7,5; 11,5; г) –4, 4, –16, 144, –2304.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б7.** Запишите пять первых членов последовательности, заданной рекуррентным способом:

а) *а*1 = 2, *ап*+1 = *ап* + 3; б) *b*1 = –2, *bп*+1 = 5⋅*bп*;

в) *с*1 = 4, *сп*+1 = *сп* – 8; г) *х*1 = 8, *хп*+1 = 0,25⋅*хп*.

**Б8.** Выпишите шесть первых членов последовательности (*хп*), заданной рекуррентно:

а) *х*1 = 1, *хп* = –*хп*–1 + 5 (*п* = 2, 3, 4, …);

б) *х*1 = –5, *хп* = *хп*–1 + 10 (*п* = 2, 3, 4, …);

в) *х*1 = 1, *хп* = 2 + *хп*–1 (*п* = 2, 3, 4, …);

г) *х*1 = –3, *хп* = –*хп*–1 – 2 (*п* = 2, 3, 4, …).

**В4.** Выпишите шесть первых членов последовательности, если:

а) *х*1 = 7, *хп*+1  = 10*хп*; в) *с*1 = 0, *с*2 = 1, *сп* = *сп*–2 – *сп*–1, где *п* ≥ 3;

б) *а*1 = –10, *ап*+1  =; г) *b*1 = –1, *b*2 = –2, , где *п* ≥ 3.

**Записываем *п* первых членов последовательности,**

**заданной словесным описанием**

**Задача 1.4.** Напишите первые шесть членов последовательности:

а) чётных натуральных чисел, не делящихся на 4;

б) нечётных натуральных чисел, делящихся на 3;

в) натуральных чисел, которые при делении на 10 дают остаток 9;

г) натуральных чисел, кратных 3 и 4;

д) квадратов простых чисел;

е) приближённых значений числа  с точностью до (по недостатку).

Составьте, если это возможно, формулу *п*-го члена для каждой последовательности.

***Решение***.

а) Чётные числа, не делящиеся на 4, – это числа вида *хп* = 4(*п* – 1) + 2. Первые шесть чисел: 2, 6, 10, 14, 18, 22.

б) Выпишем шесть нечётных натуральных чисел, кратных 3: 3, 9, 15, 21, 27, 33. Легко видеть, что разность между двумя соседними членами этой последовательности равна 6: 9 – 3 = = 15 – 9 = 21 – 15 = 27 – 21 = 33 – 27 = 6. Тогда формула *п*-г члена: *хп* = 3 + 6(*п* – 1).

в) Если натуральное число при делении на 10 даёт остаток 9, то оно имеет вид *а* = 10⋅*k* + 9. Выпишем шесть таких чисел: 9, 19, 29, 39, 49, 59. Общая формула: *хп* = 9 + 10(*п* – 1).

г) Поскольку 3 и 4 – взаимно простые числа, то числа, кратные и 3, и 4, должны быть кратны числу 3⋅4 = 12, т.е. это числа 12, 24, 36, 48, 60, 72. Общая формула: *хп* = 12*п*.

д) Квадраты простых чисел – это 22, 32, 52, 72, 112, 132 или 4, 9, 25, 49, 121, 169. Формулы *п*-го члена не существует.

е) Находим приближённые значения  с точностью до  по недостатку. Сначала с помощью микрокалькулятора вычислим . На дисплее мы увидим: =2,236067977.

Если мы оборвём запись на первом знаке, т.е. запишем , то получим явно неточное значение корня, меньшее истинного с точностью до *единиц*, т.е. с точностью .

Если мы оборвём запись на втором знаке, т.е. запишем ,2 – получим приближённое значение корня, меньшее истинного с точностью до  и т.д.

Такие приближения называются приближёнными значениями иррационального числа *по недостатку* (т.е. меньшие истинного значения).

А наша последовательность будет иметь вид: 2; 2,2; 2,23; 2,236; 2,2360; 2,23606… Задать её формулой невозможно.

*Ответ*: а) *хп* = 4(*п* – 1) + 2; 2, 6, 10, 14, 18, 22;

б) *хп* = 3 + 6(*п* – 1); 3, 9, 15, 21, 27, 33;

в) *хп* = 9 + 10(*п* – 1); 9, 19, 29, 39, 49, 59;

г) *хп* = 12*п*; 12, 24, 36, 48, 60, 72;

д) 4, 9, 25, 49, 121, 169;

е) 2; 2,2; 2,23; 2,236; 2,2360; 2,23606.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А4.** Известно, что (*ап*) – возрастающая последовательность кубов всех натуральных чисел. Найдите *а*1, *а*2, *а*3, *а*4, *ап*.

**А5.** Известно, что (*сп*) – возрастающая последовательность всех натуральных степеней числа 2. Найдите *с*1, *с*2, *с*3, *с*4, *сп*.

**Б9.** Выпишите несколько первых членов последовательности (*ап*) и подберите формулу её *п*-го члена, если (*ап*):

а) последовательность натуральных чисел, кратных 5;

б) последовательность натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

**В5.** Выпишите первые десять членов последовательности правильных несократимых дробей со знаменателем 100:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *п* | 1 | 2 | 3 |  |
| *сп* | *с*1 | *с*2 |  |  |
| Число |  |  |  |  |

а) Укажите номер члена последовательности, равного  , .

б) Запишите, чему равны *с*5, *с*9, *с*17.

в) Найдите последний член этой последовательности и укажите его номер.

**Является ли данное число членом**

**данной последовательности?**

**Задача 1.5.** Последовательность (*ип*) задана формулой *ип* = = 2*п*2 – 11*п* + 442. Является ли членом этой последовательности число: а) 463; б) 876? Если является, то укажите номер этого члена.

***Решение***.

а) Если число 463 является членом последовательности *ип* = = 2*п*2 – 11*п* + 442, то при каком-то значении *п* должно выполняться равенство 463 = 2*п*2 – 11*п* + 442. Решим это уравнение относительно *п* и получим:

463 = 2*п*2 – 11*п* + 442 → 2*п*2 – 11*п* – 21 = 0 →



*п*1 = –1,5, *х*2 = 7.

Подходит только натуральный корень *п* = 7. Это значит, что *и*7 =463, т.е. число 463 является седьмым членом последовательности *ип* = 2*п*2 – 11*п* + 442.

б) Рассуждая аналогично пункту а), попробуем решить уравнение 876 = 2*п*2 – 11*п* + 442 → 2*п*2 – 11*п* – 434 = 0. Дискриминант *D* = 112 + 4⋅2⋅434 = 3593,  – иррациональное число. Значит, уравнение 876 = 2*п*2 – 11*п* + 442 не имеет натуральных корней, а следовательно, число 876 не является членом числовой последовательности *ип* = 2*п*2 – 11*п* + 442.

*Ответ*: а) да; б) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б10.** Последовательность (*хп*) задана формулой *п*-го члена *хп* = *п*2 – *п*. Найдите: а) члены *х*10, *х*15; б) каким членом этой последовательности является число 56; 110.

**В6.** Докажите, что число *А* является членом последовательности (*уп*), если:

а)  в) 

б) *уп* = 23*п*–11, *А* = 128; г) *уп* = (*п* – 2)3 – 1, *А* = 342.

**В7.** Укажите номер члена последовательности , равного: а); б); в); г).

**Записываем формулу *п*-го члена числовой**

**последовательности по её первым членам**

**Задача 1.6.** Запишите формулу *п*-го члена числовой последовательности:

а) 

б) 

в) 

г) 

***Решение***.

а) 

1. Заметим, что числители – это чётные натуральные числа, а знаменатели – натуральные числа, которые начинаются с числа 2 и растут на 3 с увеличением номера члена последовательности на 1. Значит, формула для числителей 2*п*, а для знаменателей 2 + 3(*п* – 1).

2. Теперь учтём, что знак всё время меняется: у нечётных членов – это минус, а у чётных – плюс. Точно так же меняется знак у членов числовой последовательности *хп* = (–1)*п*.

Записываем формулу *п*-го члена:

 или .

б) 

1. Заметим, что числители – это нечётные натуральные числа, которые можно задать формулой 2*п* – 1.

2. Знаменатели каждый раз получаются умножением знаменателя предыдущего члена на : , ,  и т.д. Поэтому знаменатель можно задать формулой . Записываем формулу *п*-го члена:  .

в) 

1. Здесь числители – это степени числа 2: 21 = 2, 4 = 22, 8 = 23, 16 = 24, 32 = 25, т.е. 2*п*. Знаменатели – это числа, кратные 5, т.е. 5*п*.

2. Последовательность знакопеременная, как и последовательность из п. а), только здесь нечётные члены положительны, а чётные отрицательны, как у последовательности (–1)*п*–1.

Записываем формулу *п*-го члена: .

г) 

1. Последовательность знакопеременная, причём знаки у членов меняются так же, как у членов числовой последовательности (–1)*п*.

2. Числители – это квадраты натуральных чисел, т.е. *п*2.

3. В знаменателях под знаком квадратного корня стоят произведения двух последовательных натуральных чисел: *п*(*п* + 1).

Записываем формулу *п*-го члена: .

*Ответ*: а) ; б) ; в) ;

г) .

СТОП! Решите самостоятельно.

Составьте одну из возможных формул *п*-го члена последовательности по первым её пяти членам.

**А6.** а) 1, 2, 3, 4, 5, …; б) –2, –1, 0, 1, 2, …; в) 6, 7, 8, 9, 10, …; г) –1, –2, –3, –4, –5, … .

**Б11.** а) 1, 3, 5, 7, 9, …; б) 3, 6, 9, 12, 15, …; в) 4, 6, 8, 10, 12, …; г) 4, 8, 12, 16, 20, … .

**В8.** а) 1, 4, 9, 16, 25, …; б) 4, 9, 16, 25, 36, …; в) 2, 5, 10, 17, 26, …; г) 1, 8, 27, 64, 125, … .

**Г2.** а) 4, 16, 36, 64, 100, …; б) 

в)  г) –1, 1, –1, 1, –1, …;

д) 2, –2, 2, –2, 2, …; е) 3, 1, 3, 1, 3, …;

ж)  з) 

и) 19, 32, 45, 58, 71, …; к) 99, 74, 49, 24, –1, …;

л)  м) 1⋅2, 3⋅4, 5⋅8, 7⋅16, 9⋅32, …;

н) 1, 2, 6, 24, 120, …; о) 6, 12, 24, 48, 96, …;

п) 0, 5, 8, 17, 24, …; р) 1, 5, 19, 65, 211, … .

**Задаём последовательность рекуррентным способом**

**Задача 1.7.** Определите правило, по которому строится последовательность, запишите следующие два члена и задайте её рекуррентным способом:

а) 64, 60, 56, 52, 48, … (*ап*); б) 3, 8, 13, 18, 23, … (*сп*);

в) 1, 3, 9, 27, 81, … (*хп*); г) 500; 50; 5; 0,5; 0,05; … (*bп*).

***Решение***.

а) 64, 60, 56, 52, 48, … (*ап*). Каждый последующий член на 4 меньше предыдущего, поэтому *а*1 = 64, *ап* + 1 = *ап* – 4.

б) 3, 8, 13, 18, 23, … (*сп*). Каждый последующий член на 5 больше предыдущего, поэтому *с*1 = 3, *сп* + 1 = *сп* + 5.

в) 1, 3, 9, 27, 81, … (*хп*); Каждый последующий член в 3 раза больше предыдущего, поэтому *х*1 = 1, *хп* + 1 = *хп* ⋅3.

г) 500; 50; 5; 0,5; 0,05; … (*bп*). Каждый последующий член в 10 раз меньше предыдущего, поэтому *b*1 = 500, *bп* + 1 = .

*Ответ*: а) *а*1 = 64, *ап* + 1 = *ап* – 4; б) *с*1 = 3, *сп* + 1 = *сп* + 5;

в) *х*1 = 1, *хп* + 1 = *хп* ⋅3; г) *b*1 = 500, *bп* + 1 = .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б12.** Последовательность задана первыми членами:

а) 5, 10, 15, 20, …; б) 32, 16, 8, 4, …; в) 2, – 2, 2, –2, … .

Задайте последовательность рекуррентным способом, вычислите её 8-й член.

**В9.** Задайте последовательность рекуррентным способом:

а) 2, 6, 18, 54, 162, …; б) 1, 8, 15, 22, 29, …;

в)  г) 3, –9, 27, –81, 243, … .

**В10.** Числовая последовательность задана формулой *п*-го члена: а) *ап* = 5*п*; б)  в) *сп* = (–0,5)*п*. Задайте последовательность рекуррентным способом.

**По рекуррентной формуле задаём формулу**

***п*-го члена**

**Задача 1.8.** Последовательность задана рекуррентным способом: а) *а*1 = 3, *ап*+1 = *ап* + 2; б) *b*1 = –5, *bn*+1 = 2*bп*. Задайте последовательность формулой *п*-го члена, вычислите пять первых её членов.

***Решение***.

а) *а*1 = 3, *ап*+1 = *ап* + 2. Запишем несколько членов последовательности: 3, 5, 7, 9, 11, … . Очевидно, что это – последовательность нечётных чисел, начиная с 3. Тогда *ап* = 2*п* + 1.

б) *b*1 = –5, *bn*+1 = 2*bп*. Запишем несколько членов последовательности: –5, –10, –20, –40, –80, … . Видим, что (–5) = (–5)⋅1, (–10) = (–5)⋅2, –20 = (–5)⋅22, –40 = (–5)⋅23, –80 = (–5)⋅24. Отсюда формула общего члена *bп* = (–5)⋅2*п*–1.

*Ответ*: а) *ап* = 2*п* + 1; 3, 5, 7, 9, 11;

б) *bп* = –5⋅2*п*–1; –5, –10, –20, –40, –80.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б13.** Вычислите первые шесть членов последовательности и найдите формулу *п*-го члена этой последовательности:

а) *а*1 = 1, *ап*+1 = –*ап*; б) *а*1 = –5, *аn*+1 = –*ап*.

**В11.** Последовательность задана рекуррентным способом. Перейдите к аналитическому заданию, т.е. найдите формулу её *п*-го члена:

а) *х*1 = 3, *хп* = *хп*–1 + 5 (*п* = 2, 3, 4, …);

б) *х*1 = 2, *хп* = 3*хп*–1 (*п* = 2, 3, 4, …);

в) *х*1 = 11, *хп* = *хп*–1 – 4 (*п* = 2, 3, 4, …);

г) *х*1 = 3, *хп* = (*п* = 2, 3, 4, …).

**Последовательности возрастающие и убывающие**

***Определение 1.2.*** *Числовая последовательность (хп), для которой при каждом натуральном п выполняется неравенство хп+1 > хп, называется* ***возрастающей*.**

***Определение 1.3.*** *Числовая последовательность (хп), для которой при каждом натуральном п выполняется неравенство хп+1 < хп, называется* ***убывающей*.**

Например:

1, 2, 3, …, *п* – возрастающая последовательность;

 – убывающая последовательность.

**Задача 1.9.** Докажите, что числовая последовательность:

а) *уп* = –*п*3 + 8 является убывающей;

б) *уп* = 3*п* – 2*п* является возрастающей;

в) *уп* = 3 + 12*п* не является ни возрастающей, ни убывающей.

***Решение***.

а) *уп* = –*п*3 + 8. Составим разность *уп+*1 – *уп* и докажем, что *уп*+1 – *уп* < 0 для любого натурального *п*:

*уп+*1 – *уп* = [–(*n* + 1)3 + 8] – [–*n*3 + 8] =

= –(*n*3 + 3*п*2 + 3*п+*1) + 8 + *п*3 – 8 = –3*п*2 – 3*п* – 1= –3(*п*2+ *п*) – 1.

Ясно, что поскольку *п* – натуральное число, то *п* > 0 и *п*2 > 0, а значит, –3⋅(*п*2 + *п*) – 1 < 0.

Мы доказали, что для любого натурального *п*  *уп*+1 – *уп* < 0 → *уп*+1 < *уп* , т.е. числовая последовательность *уп* = –*п*3 + 8 – убывающая.

б) *уп* = 3*п* – 2*п*. Составим разность *уп+*1 – *уп* и докажем, что *уп*+1 – *уп* > 0 для любого натурального *п*:

*уп+*1 – *уп* = (3*п*+1 – 2*п*+1) – (3*п* – 2*п*) = (3*п*+1 – 3*п*) – (2*п*+1 – 2*п*) =

3*п*⋅(3 – 1) – 2*п*⋅(2 – 1) = 3*п*⋅ 2 – 2*п* ⋅ 1 = 2⋅3*п*– 2*п*.

Поскольку 3 > 2, то 3*п* > 2*п* → 2⋅3*п*> 2⋅2*п*> 2*п* → 2⋅3*п*– 2*п* > 0.

Мы доказали, что для любого натурального *п*  *уп*+1 – *уп* > 0 → *уп*+1 > *уп* , т.е. числовая последовательность *уп* = 3*п* – 2*п* – возрастающая.

в) *уп* = 3 + 12*п* . Чисто интуитивно ясно, что при малых *п* эта последовательность будет возрастать (3 + 12*п* >), а при больших *п* – убывать, так как  будет много больше, чем 3 + 12*п*. Вычислим несколько первых членов этой последовательности:

*у*1 = 3 + 12⋅1; *у*2 = 3 + 12⋅2;

*у*3 = 3 + 12⋅3 ; *у*4 = 3 + 12⋅4 ;

*у*5 = 3 + 12⋅5 ; *у*6 = 3 + 12⋅6 ;

*у*7 = 3 + 12⋅7 .

Теперь заметим, что *у*6 = 51 > , *у*7 = .

Итак, для *п* = 5 *уп*+1 > *уп*, а для *п* = 6 *уп*+1 < *уп*.

Значит, нельзя утверждать, что *для любого* натурального *п* *уп*+1 > *уп*, и нельзя утверждать, что *для любого* натурального *п* *уп*+1 < *уп*. Следовательно, наша последовательность не подходит под определение ни убывающей, ни возрастающей последовательности, т.е. числовая последовательность *уп* = 3 + 12*п* не является ни возрастающей, ни убывающей. Что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б14.** Докажите, что числовая последовательность является убывающей: а) *уп* = –2*п* – 3; б) *уп* = –3*п*3 + 4; в) *уп* = 4 – 5*п.*

**В12.** Докажите, что числовая последовательность возрастает:

а)  б)  в)  г) .

**В13.** Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, не являются ни возрастающими, ни убывающими:

а)  в) 

б)  г) .

**Последовательности ограниченные и неограниченные**

***Определение 1.4.*** *Числовая последовательность (хп), для которой при каждом натуральном п выполняется нестрогое неравенство хп+1* ***≥*** *хп, называется* ***неубывающей.***

Например, *неубывающей* является последовательность 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, … .

***Определение 1.5.*** *Числовая последовательность (хп), для которой при каждом натуральном п выполняется нестрогое неравенство хп+1* ***≤*** *хп, называется* ***невозрастающей.***

Например, *невозрастающей* является последовательность 100, 100, 99, 99, 98, 98, … .

Разумеется, любая возрастающая последовательность «по совместительству» ещё и неубывающая, а любая убывающая – невозрастающая. Например, последовательность 1, 2, 3, 4, …, *п*, … – возрастающая, так как *хп*+1 > *хп*, и неубывающая, так как *хп*+1 ≥ *хп*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Автор*: Как Вы считаете, какой является последовательность 1, 1, 1, 1, …, 1, …?  *Читатель*: По-моему, для этой последовательности одновременно выполняются два условия: для всякого натурального *п* *хп*+1 ≥ *хп* и *хп*+1 ≤ *хп*, так как 1 ≥ 1 и 1 ≤ 1. А значит, данная последовательность является одновременно и *неубывающей*, и *невозрастающей*.  *Автор*: Совершенно верно! |

***Определение 1.6.*** *Числовые последовательности возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются* ***монотонными***.

*Автор*: А не могли бы Вы привести пример *немонотонной* последовательности?

*Читатель*: Например, *хп* = (–1)*п* – она точно не монотонная: –1, 1, –1, 1, …

*Автор*: Правильно!

***Определение 1.7.*** *Числовая последовательность (хп) называется* ***ограниченной сверху****, если существует такое число В, что для каждого члена последовательности выполняется неравенство хп ≤ В.*

Например, ограниченной сверху является числовая последовательность , так как для любого *п* .

***Определение 1.8.*** *Числовая последовательность (хп) называется* ***ограниченной снизу****, если существует такое число А, что для каждого члена последовательности выполняется неравенство хп ≥ А.*

Например, ограниченной снизу является числовая последовательность *хп* = *п*2, так как для любого *п* *п*2 ≥ 1.

***Определение 1.9.*** *Числовая последовательность (хп) называется* ***ограниченной****, если она ограничена и сверху, и снизу.*

*Автор*: Как Вы думаете, можно ли утверждать, что неубывающая последовательность ограничена снизу?

*Читатель*: Если числовая последовательность *неубывающая*, то *х*1 ≤ *х*2 ≤ *х*3 ≤ … ≤ *хп* ≤ *хп*+1 ≤ …, т.е. любой член этой последовательности не меньше первого члена этой последовательности. Значит, существует такое число *А* = *х*1, что для всех *п* *хп* ≥ *А*, а тогда согласно определению 1.5 последовательность ограничена снизу.

*Автор*: Совершенно верно! Отсюда, кстати, следует, что и всякая *возрастающая* последовательность также ограничена снизу, ведь всякая *возрастающая* последовательность – неубывающая! Нетрудно доказать, что всякая *невозрастающая* последовательность *ограничена сверху*. (Попробуйте это доказать самостоятельно!)

**Задача 1.10.** Последовательность задана формулой *п*-го члена: а) ; б) ; в) ; г) *уп* = *п⋅* (–1)*п*. Является ли последовательность возрастающей, убывающей, ограниченной?

***Решение.***

а) . Дробь тем меньше, чем больше её знаменатель, поэтому , а значит, *ап*+1 =. Таким образом, данная последовательность убывающая и *ограниченная сверху*. В самом деле, при любом *п* .

*Автор*: А является ли она *ограниченной снизу*?

*Читатель*: Да! Ведь при любом *п* , значит, наша последовательность ограничена и сверху и снизу, т.е. просто *ограниченная*.

*Автор*: Верно!

б) ; Сделаем такое «хитрое» преобразование: 3*п* – 5 = 1,5⋅(2*п* – 1) – 3,5. Тогда получим:

.

Заметим, что чем больше *п*, тем больше знаменатель дроби , следовательно, тем меньше сама дробь . Значит, чем больше *п*, тем меньшее число вычитается из 1,5, т.е. тем больше разность 1,5 –. Из этих рассуждений следует, что для всех *п* *bn*+1 > *bn*, т.е. наша числовая последовательность возрастающая, значит, она *ограничена снизу*: все члены данной последовательности больше её первого члена .

*Автор*: Остаётся вопрос: ограничена ли эта последовательность сверху, т.е. существует ли такое число *В*, что для любого *п* *bn* ≤ *В*?

*Читатель*: Я думаю, что для любого *п* .

*Автор*: Правильно. Значит, эта последовательность ограничена и сверху, и снизу, т.е. является *ограниченной*.

в) . Вычислим несколько членов этой последовательности: . Мы видим, что данная последовательность, во-первых, знакопеременная, а значит, она не является ни возрастающей, ни убывающей. Во-вторых, каждый последующий член *по модулю* в 10 раз меньше предыдущего: . Отсюда следует, что наибольший *по модулю* член данной последовательности , .

Возьмём  и . Тогда для любого *п* будет выполняться двойное неравенство , т.е. наша последовательность является ограниченной.

г) *уп* = *п*(–1)*п*. Вычислим несколько членов этой последовательности: –1, 2, –3, 4, –5, 6, –7, … Ясно, что ни убывающей, ни возрастающей эта последовательность не является.

*Автор*: Как Вы думаете, ограниченная она или нет?

*Читатель*: По-моему, нет. Потому что какие бы числа *А* и *В* мы ни ввзяли, всегда можно найти такие члены последовательности, которые будут меньше *А*, и такие, которые будут больше *В*.

*Автор*: Пусть для простоты *А* < 0 – целое число и *В* > 0 – тоже целое число. Сможете Вы указать такой член последовательности *хп*, чтобы выполнялось неравенство *уп* < *А*, и такой член последовательности *хт*, чтобы выполнялось неравенство *ут* > *В*?

*Читатель*: Конечно.

1. Возьмём *т* = 2*В* – натуральное число и докажем, что *ут* > *В*. В самом деле, *ут* = *т* ⋅ (–1)*т* =2*В*⋅ (–1)2*B* =2*В*⋅ 1 = 2*В.* Так как *В* > 0, то 2*В* > *В*, т.е. *ут* > *В*, ч. т.д.

2. Возьмём *п* = |2*A* – 1| – натуральное число и докажем, что *уп* < *А*. В самом деле:

*уп* = *п* ⋅ (–1)*п* = |2*A* – 1|⋅(–1)|2*A* –1| = |2*A* – 1|⋅(–1) *=*

*= –*(2*A* – 1)⋅(–1) = 2*А* – 1.

Так как *А* < 0, то 2*А –* 1 < 2*А* < *А*, т.е. *уп* < *А*, ч. т.д.

*Автор*: Совершенно верно! Итак, наша последовательность *уп* = = *п*⋅(–1)*п* – *неограниченная.*

*Ответ*: а) возрастающая, ограниченная; б) убывающая, ограниченная; в) не является ни возрастающей, ни убывающей, ограниченная; г) не является ни возрастающей, ни убывающей, неограниченная.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А7.** Придумайте свой пример последовательности: а) монотонной; б) немонотонной; в) ограниченной снизу; г) ограниченной.

**Б15.** Верно ли, что: а) всякая возрастающая последовательность ограничена снизу; б) всякая убывающая последовательность ограничена сверху?

**В14.** Последовательность задана формулой *п*-го члена:

а) *ап* = 7*п* – 11; б) *bn* = 6*n*; в) *cп* = –3 + (1,2)*п*;

г) *ап* = 2 + 3*п*; д) *bn* = 3⋅2*n*; е) *cп* = –3⋅(0,2)*п*.

Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной снизу.

**В15.** Последовательность задана формулой *п*-го члена:

а) *ап* = (–2)*п*; б) *bn* = 2⋅(–1)*n*; в) *cп* = *п* ⋅ (–1)*п*;

г) ; д) *хn* = 2 + (–1)*n*; е) *уп* = (–1)*п*.

Покажите, что последовательность не является монотонной. Какие из приведённых последовательностей являются ограниченными?

**Г3.** Последовательность задана формулой *п*-го члена:

а) ; б) ; в) ; г) .

Докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной.

**Ищем наибольший (наименьший) член**

**числовой последовательности**

**Задача 1.11.** Найдите наибольший член последовательности, заданной формулой *п*-го члена:

а) *ап* = 10 + 9*п* – 2*п*2; б) .

***Решение***.

а) *ап* = 10 + 9*п* – 2*п*2. Построим график функции *у =* 10 + 9*x* –

– 2*x*2. Выделим полный квадрат:

10 + 9*x* – 2*x*2= 



.

Итак: *у=*. Это график функции *у* = – 2*х*2, смещённый на  вправо и поднятый на  вверх (рис. 1.4), т.е. вершины параболы имеют координаты *А*(*х*в, *у*в), где *х*в = , *у*в = .

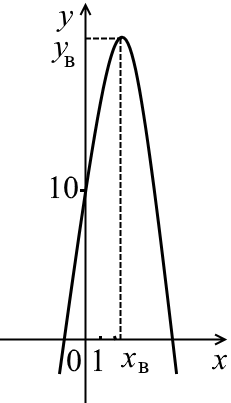


Рис. 1.4

Наша последовательность *ап* = 10 + 9*п* – 2*п*2 – это функция натурального аргумента, поэтому значения *у* = 10 + 9*x* – 2*x*2 и *ап* = 10 + 9*п* – 2*п*2 совпадают только при *натуральных* значениях *х.*

Наибольшее значение *ап* достигается при значении *п*, наиболее близком к значению *х*в =. Скорее всего, максимум достигается при *п* = 2. Но для полной уверенности вычислим также значения *ап* при *п* = 1 и *п* = 3, получим:

*а*1 = 10 + 9⋅1 – 2⋅12 = 17,

*а*2 = 10 + 9⋅2 – 2⋅22 = 20,

*а*3 = 10 + 9⋅3 – 2⋅32 = 19,

Итак, наибольший член *а*2 = 20.

б) . Вычислим значения нескольких первых членов последовательности:

|  |  |
| --- | --- |
| ;  ;  ;  ; | ;  ………………………….  ;  …………………………. |

*Читатель*: Чисто интуитивно ясно, что наибольшее значение – это . Но как это доказать?

*Автор*: Давайте докажем неравенство . Если нам это удастся, то станет ясно, что  – это действительно наибольшее значение числовой последовательности . Итак:



.

Последнее неравенство очевидно, так как для любого *п* . Поскольку все наши преобразования были равносильными, то верно и неравенство , а значит, наибольшее значение нашей числовой последовательности – это .

*Ответ*: а) *а*2 = 20; б) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б16.** Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены последовательности (*хп*) будут больше заданного числа *А*:

а) *хп* = 2*п* – 5, *А* = 10; б) *хп* = 3*п*–1, *А* = 30;

в) *хп* = *п*2 – 27, *А* = –2; г) *хп* = 2*п*–5, *А* = 1,5.

**В16.** Найдите наименьший член последовательности, заданной формулой *п*-го члена:

а) *ап* = *п*2 – 17*п* + 21; б) *ап* = (*п* – 1)(*п* – 3)(*п* – 5); в) .

**Г4.** Докажите, что у последовательности (*ап*), заданной формулой , не существует наименьшего члена.

**Г5.** Найдите наибольший член последовательности, заданной формулой *п*-го члена: а) *ап* = 18*п –* *п*3; б) *ап* = –*п*3 + 25*п* – 1.

**Разные задачи**

**Задача 1.12.** Докажите, что ни один из членов последовательности (*ап*), заданной формулой *ап* = 6*п* + 5, при делении на 18 не может дать в остатке 10.

***Решение***. Если число *ап* при делении на 18 даёт остаток 10, то справедливо равенство *ап* = 18*k* + 10, где *k* – целое число. Поскольку *ап* = 6*п* + 5, получаем следующее уравнение:

6*п* + 5 = 18*k* + 10 → 6*п* – 18*k* = 5.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Автор*: Попробуем выяснить, имеет ли это уравнение хотя бы одно решение в целых числах. Если докажем, что не имеет, то задача решена!  *Читатель*: Преобразуем левую часть уравнения:  6*п* – 18*k* = 5 → 2(3*п* – 9*k*) = 5. |

Из последней записи видим, что левая часть делится на 2 при любых *п* и *k*, а правая часть на 2 не делится. Значит, ни при каких *целых* *п* и *k* данное равенство невозможно! Следовательно, уравнение в целых числах решения не имеет. Задача решена!

СТОП! Решите самостоятельно.

**В17.** Существуют ли члены последовательности (*bп*), заданной формулой *bn*= 8*п* – 6, которые при делении на 12 дают в остатке 3?

**Г6.** Существуют ли члены последовательности (*сп*), заданной формулой *сn*= *п*3 – *п* +2, которые при делении на 6 дают в остатке 4?

**✍ Домашнее задание**

**Задачи очень легкие**

**А8**. Определите, является ли заданная функция числовой последовательностью (здесь Q – множество рациональных чисел, Z – множество целых чисел, N – множество натуральны чисел):

а) , *х* ∈ (0; +∞); б) , *х* ∈ *Q*;

в) , *х* ∈ *Z*; г) , *х* ∈ *N*.

**А9.** а) Впишите все предшествующие члены последовательности: …, *а*12, …

б) Впишите все члены последовательности, содержащиеся между двумя указанными:

…, *а*25, …, *а*32, …

…, *аk*–1, …, *аk* + 5, …

в) Для каждого из указанных членов последовательности впишите два предшествующих и два последующих члена:

…, *а*104, …

…, *аk*, …

…, *ап*–3, …

**А10.** Найдите несколько начальных членов возрастающей последовательности всех натуральных чисел, кратных пяти. Укажите её шестой, девятый, двадцать первый, *п*-й члены.

**А11.** Найдите несколько начальных членов возрастающей последовательности всех натуральных чисел, кратных семи. Укажите её восьмой, десятый, тридцать седьмой, *п*-й члены.

**А12.** Последовательность задана первыми членами: 1, 5, 9, … . Запишите формулу общего члена.

**А13.** Дана последовательность чисел (*хп*): 2, 4, 6, 8, 10, 12, … .

а) Назовите её первый, второй, третий, четвёртый, пятый и шестой члены.

б) Запишите формулу общего члена последовательности. Найдите *х*7, *х*8, *х*20.

**Задачи легкие**

**Б17.** Приведите примеры последовательностей, заданных:

а) с помощью формулы *п*-го члена;

б) словесно;

в) рекуррентным способом.

**Б18.** Вычислите первые шесть членов последовательности (*ап*), заданной формулой *п*-го члена, и дайте ей «имя»:

а) *ап = п*; б) *ап* = 2*п* – 1; в) *ап* = 4*п*; г) *ап* = 1 – *п*.

*Образец*. Формулой *ап* = 2*п* задаётся последовательность, которая начинается так: 2, 4, 6, 8, 10, 12, … . Это последовательность чётных чисел.

**Б19.** Последовательность задана формулой *п*-го члена *ап* = 5 – 3*п*.

а) Вычислите первые восемь членов этой последовательности.

б) Найдите *а*100, *а*99, *а*101.

в) Найдите *аk*, *ak*–1, *ak*+1.

**Б20.** Последовательность задана формулой *п*-го члена *bп* = 0,1⋅2*п*–1.

а) Вычислите первые семь членов этой последовательности.

б) Найдите *b*10, *b*11, *b*9.

в) Найдите *bn*–1, *bn*+2.

**Б21.** Последовательность задана формулой *п*-го члена:

а) *ап* = –117 + 3*п*; б) ;

в) *хп* = –237 + 5*п*; г) .

Сколько отрицательных членов у этой последовательности?

**Б22.** Выпишите шесть первых членов последовательности (*хп*), заданной рекуррентно:

а) *х*1 = 1, *хп* = *п*⋅*хп*–1 (*п* = 2, 3, 4, …);

б) *х*1 = –3, *хп* = –*хп*–1 (*п* = 2, 3, 4, …);

в) *х*1 = –512, *хп* = 0,5⋅*хп*–1 (*п* = 2, 3, 4, …);

г) *х*1 = 1, *хп* = *хп*–1 : 0,1 (*п* = 2, 3, 4, …).

**Б23.** Выпишите первые четыре члена последовательности десятичных приближений числа : а) по недостатку; б) по избытку.

**Б24.** Запишите формулу общего члена последовательности:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …; б) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …;

в) 4, 8, 12, 16, 20, 24, …; г) 

д) 1, –1, 1, –1, 1, –1, …; е) –1, 1, –1, 1, –1, 1, … .

**Б25.** Составьте математическую модель следующей задачи. Сосулька тает со скоростью 5 капель в минуту. Сколько капель упадёт на землю через 1 мин, 2 мин, 3мин, 17 мин и т.д. от начала таяния сосульки. Является ли эта математическая модель числовой последовательностью?

**Б26.** Запишите формулу *n-*го члена последовательности:

а)  в) 

б)  г) .

**Б27.** Задайте последовательность рекуррентным способом:

а) 2, 2, 2, 2, 2, …; б) 2, 4, 6, 8, 10, …;

в) 9, 7, 5, 3, 1, …; г) 5, –5, 5, –5, 5, –5, … .

**Б28.** Докажите, что последовательность убывает:

а)  б)  в)  г) 

**Б29.** Докажите, что последовательность десятичных приближений числа π с недостатком 3; 3,1; 3,14; 3,141; … является ограниченной.

**Б30.** Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены последовательности (*хп*) будут меньше заданного числа *А*:

а) *хп* = 3 – 2*п*, *А* = –9; б) *хп* = 34–*п*, *А* = 0,5;

в) *хп* = 2 – 3*п*2, *А* = –25; г) *хп* = 25–*п*, *А* = 0,75.

**Б31.** Найдите сумму первых семи членов последовательности, заданной словесно: *п*-й член последовательности равен десятичной дроби, целая часть которой равна 0, а после запятой стоят подряд ровно *п* единиц.

**Б32.** Последовательность (*сп*) задана формулой *сп* = 2*п*. Проверьте справедливость равенства *сп*+1 + *сп*+2 = 6*сп*.

**Задачи средней трудности**

**В18.** Последовательность задана формулой *п*-го члена:

а) *ап* = 3*п* – 2; б) ; в) *сп* = (–2)*п*.

Вычислите три первых члена этой последовательности.

**В19.** Последовательность задана формулой *п*-го члена. Вычислите её первых три члена с чётными номерами:

а) *уп* = (–1)*п* + (–2)*п*+1; б) *хп* = (–2)*п*+1 – (–2)*п*–1;

в) *zп* = (–2)*п* – (–2)*п*+1; г) *wп* = (–1)*п*+1 – (–2)*п*.

**В20.** Последовательность задана формулой *п*-го члена. Вычислите её первых три члена с нечётными номерами:

а) *уп* = (–1)*п* + 2*п*; б) *хп* = (–2)*п* + 16;

в) *zп* = (–2)*п* + 4*п*; г) *wп* = (–1)*п* – 1.

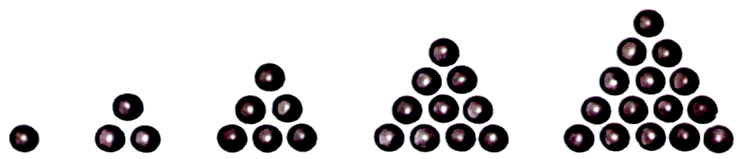
**В21.** Последовательность (*уп*) задана формулой *п*-го члена *уп* = 3*п*–5.

а) Выпишите все члены этой последовательности, большие  и меньшие 10. Укажите номера этих членов.

б) Сравните отношения:  и .

**В22.** Найдите числа Фибоначчи: *и*10­  и *и*15.

**В23.** Пусть (*ап*) – последовательность треугольных чисел (рис. 1.5).



1 1 + 2 1 + 2 + 3 1 + 2 + 3 + 4 1 + 2 + 3 + 4 + 5

Рис. 1.5

а) Заполните таблицу, вычислив первые десять членов этой последовательности.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер члена | 1 | 2 |  |  |
| Обозначение | *а*1 | *а*2 |  |  |
| Член последовательности | 1 | 3 |  |  |

б) Чему равен пятый член последовательности, девятый член последовательности?

в) Найдите *а*11.

г) Укажите член последовательности, предшествующий *а*7; следующий за *а*9.

**В24.** Последовательность задана формулой *ап* = (2*п* – 1)(3*п* + 2). Является ли членом последовательности число:

а) 0; б) 24; в) 153; г) –2?

**В25.** Является ли членом последовательности (*уп*) данное число *В*? Если является, то укажите номер соответствующего члена последовательности:

а) *уп* = –*п*5 + 3, *В* = –240; б) , *В* = 1,8;

в) *уп* = *п*2 + 15*п* + 16, *В* = –40; г) , *В* = 243.

**В26.** Определите правило, по которому строится последовательность, запишите следующие два числа в этой последовательности и задайте её формулой *п*-го члена. Найдите десятый и двадцатый члены последовательности.

а) 1, 4, 9, 16, 25, … (*сп*); б) 5, 10, 15, 20, 25, … (*хп*);

в) 4, 5, 6, 7, 8, … (*ап*); г)  (*bп*);

д) (*уп*); е)  (*zn*).

**В27.** Задайте формулой *п*-го числа каждую из последовательностей:

а) 64, 60, 56, 52, 48, … (*ап*); б) 3, 8, 13, 18, 23, … (*сп*);

а) 1, 3, 9, 27, 81, … (*хп*); г) 500, 50, 5, 0,5, 0,05, … (*хп*).

**В28.** Плата за парковку машины на автостоянке начисляется следующим образом: за первый час берётся 20 руб., за каждый следующий час (полный или неполный) автовладелец платит 12 руб. Заполните таблицу и запишите формулу, по которой можно вычислить плату за *п* часов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Число часов | Сумма оплаты (в рублях) |  |
| 1 | *с*­1 = 20 |
| 2 | *с*2 = 20 + 12 |
| 3 | *с*3 = (20 + 12) + 12 = 20 + 12⋅2 |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |

Сколько должен заплатить автовладелец за парковку, если он оставит автомобиль на стоянке на 20 ч 40 мин; на 10 суток?

**В29.** Николай начал заниматься в тренажёрном зале. В первый день он занимался 10 мин, а каждый следующий день увеличивал время занятий в 1,1 раза. Используя калькулятор, заполните таблицу и запишите формулу, по которой можно вычислить время занятий Николая в *п*-й день.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | День  занятий | Длительность занятий  (в минутах) | Правило  вычисления |
| 1 | 10 | 10 |
| 2 | 10⋅1,1 = 11 | 10⋅1,1 |
| 3 | (10⋅1,1)⋅1,1 = 12,1 ≈ 12 | 10⋅(1,1)2 |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |

Через три недели Николай перестал увеличивать время занятий. Сколько минут он стал проводить в тренажёрном зале?

**В30.** Предположим, что родители дали вам 1 рубль, и у вас есть две возможности дальнейшего получения денег. Первый способ: ежедневно вы будете получать сумму, на 2 руб. большую, чем получали в предыдущий день. Второй способ: во второй день вы получите 1 руб., а начиная с третьего дня будете получать ежедневно столько рублей, сколько получили за предыдущие два дня вместе.

1. Заполните таблицу для первых десяти дней.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | День | Сумма (в рублях) | |
| I способ | II способ |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| … |  |  |

2. Изобразите каждую из получившихся последовательностей точками в координатной плоскости: по горизонтальной оси откладывайте номер дня, а по вертикальной – полученную в этот день сумму денег. Какой из способов выгоднее, если вы планируете получать деньги в течение одной недели; в течение одного месяца?

3. Задайте каждую из этих последовательностей рекуррентной формулой, обозначив первую из них через (*ап*), а вторую – через (*bп*).

**В31.** Докажите, что последовательность (*уп*) является возрастающей: а) *уп* = 3*п* + 4; б) *уп* = 5*п*2 – 3; в) *уп* = 7*п* – 2; г) *уп* = 4*п*2 – 1.

**В32.** Последовательность задана формулой *п*-го члена, докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной снизу:

а) *ап* = –2*п* + 1; б) *bn* = (0,2)*п*; в) *сп* = 3 – (1,1)*п*;

г) *ап* = 3 – 2*п*; д) ; е) *сп* = –16⋅2*п*.

**В33**. Укажите все значения *b*, при которых последовательность, заданная формулой , является: а) возрастающей; б) убывающей.

**В34**. Докажите, что у последовательности (*bn*), заданной формулой , не существует наибольшего члена.

**В35.** Последовательность (*ип*) задана формулой . Верно ли равенство ?

**Задачи трудные**

**Г7.** Напишите первые шесть членов последовательности (*ап*), заданной формулой *п*-го члена:

а) *ап =* 5; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) *ап* = 2*п* + (–2)*п*;

ж) *ап* = (–1)*п* + (–1)*п*+1; з) ; и) ;

к) ; л) ; м) .

**Г8.** Укажите номера тех членов последовательности (*хп*), заданной формулой , которые не превосходят –0,5.

**Г9.** Последовательность (*хп*) задана формулой . Сколько членов последовательности принадлежит промежутку (0,02; 0,22)?

**Г10.** Напишите первые шесть членов последовательности (*bп*), заданной рекуррентно:

а) *b*1 = 9, *bп*+1 = 0,1*bп* + 10; б) *b*1 = –3, *bп*+1 = 9 – 2*bп*;

в) *b*1 = 5, *bп*+1 = (–1)*п*⋅*bп* – 8; г) *b*1 = 1, *bп*+1 = *bп*!;

д) *b*1 = *b*2 = 1, *bп*+2 = *bп*+1 + *bп*; е) *b*1 = –1, *b*2 = 1, *bп*+2 = 3*bп*+1 – 2*bп*;

ж) *b*1 = –10, *b*2 = 2, *bп*+2 = |*bп*| – 6*bп*+1.

**Г11.** В последовательности (*хп*) каждый член с нечётным номером равен 2*а*, а с чётным 2*b*. Напишите формулу *п*-го члена этой последовательности.

**Г12.** Последовательность (*уп*) задана формулой *уп* = *п*3 + *п*2 – 9*п* + + 383. Является ли членом этой последовательности число 1112? Если да, то укажите номер этого члена.

**Г13.** Задайте формулой последовательность:

а) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, …;

б) 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, …;

в) 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, … .

**Г14**. Выпишите первые шесть членов последовательности (*хп*), у которой *х*1 = –3, *х*2 = –2 и каждый член, начиная с третьего, равен удвоенной сумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

**Г15.** Докажите, что последовательности, заданные данными формулами, являются убывающими:

а)  б)  в) 

г)  д)  е) 

**Г16.** Докажите, что последовательности, заданные данными формулами, являются возрастающими:

а)  б)  в)  г) 

**Г17.** Последовательность заданная формулой *п*-го члена:

а) ; б) ; в) ; д) .

Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной.

**Г18.** Определите, является ли ограниченной последовательность, заданная формулой *п*-го члена:

а) 17 *–* 5*п*; б) 17*п* – 5; в) ; г) ;

д) ; е) (–1)*пп*2; ж); з) |154*n* – *n*3|;

и).

**Г19.** Докажите, что последовательность (*ап*), заданная формулой , ограничена снизу.

Проверьте, является ли число 1 верхней границей для данной последовательности. Если является, то можно ли найти меньшую верхнюю границу?

**Г20.** Найдите сумму *п* первых членов последовательности (*хп*), если .

**Г21.** Последовательности (*хп*) и (*уп*) заданы формулами *хп* = 2*п* – 1 и *уп* = *п*2. Если выписать в порядке возрастания все общие члены этих последовательностей, то получится последовательность (*сп*). Напишите формулу члена последовательность (*сп*).

**Задачи очень трудные**

**Д1.** Докажите, что для любых натуральных *п* последовательность чисел Фибоначчи (*ип*) обладает свойством:

а) *и*1 + *и*2 + … + *ип* = *ип*+2 – 1;

б) *и*1 + *и*3 + *и*5 + … + *и*2*п*–1 = *и*2*п*;

в) *и*2 + *и*4 + *и*6 … + *и*2*п* = *и*2*п*+2 – 1;

г) .



**§ 2. Арифметическая прогрессия**

*Автор*: Рассмотрим следующие последовательности чисел:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6;  2) 10, 20, 30, 40;  3) 100, 80, 60, 40, 20;  4) –0,1, –0,2, –0,3, –0,4;  5) 1, 3, 5, …, (2*п* –1), …;  6) 0, 1,5, 3, 4,5, 6.  Не находите ли Вы в этих последовательностях что-то общее? | |
| *Читатель*: Признаться, на первый взгляд, нет. Первая, вторая, пятая и шестая последовательности возрастающие, третья и четвёртая последовательности убывающие. Первая, вторая, третья и пятая последовательности содержат только целые | |  |

числа, а четвёртая и шестая – дробные. Четвёртая последовательность содержит отрицательные числа, а пятая – последовательность с бесконечным числом членов. Что в них общего – непонятно!

*Автор*: Всё верно. Но обратите внимание: во всех последовательностях разность между последующим и предыдущим членами – одно и то же число! В первой последовательности эта разность равна 1, во второй – 10, в третьей – (–20), в четвёртой – (–0,1), в пятой – 2, в шестой – 1,5.

Если обозначить *п*-й член последовательности через *ап*, а (*п* + 1)-й – через *ап*+1, то будет выполняться равенство

*ап*+1 – *ап*= *d* = const.

Отсюда следует, что каждый последующий член любой из рассмотренных последовательностей получается путём прибавления к предыдущему члену одного и того же числа *d*:

*ап*+1 = *ап* + *d*. (2.1)

Такие последовательности чисел (конечные или бесконечные) называются *арифметическими прогрессиями.*

***Арифметической прогрессией*** *называется последовательность чисел, у которой каждый последующий член равен своему предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называемым* ***разностью прогрессии.***

**Задача 2.1.** Выпишите первые шесть членов арифметической прогрессии (*ап*), если: а) *а*1 = 3, *d* = 7; б) *а*1 = –17,5, *d* = –0,5.

а) *а*1 = 3, *d* = 7. Согласно формуле (2.1) получаем:

*а*2 = *а*1 + *d* = 3 + 7 = 10;

*а*3 = *а*2 + *d* = 10 + 7 = 17;

*а*4 = *а*3 + *d* = 17 + 7 = 24;

*а*5 = *а*4 + *d* = 24 + 7 = 31;

*а*6 = *а*5 + *d* = 31 + 7 = 38.

Первые шесть членов арифметической прогрессии: 3, 10, 17, 24, 31, 38.

б) *а*1 = –17,5, *d* = –0,5. Согласно формуле (2.1) получаем:

*а*2 = *а*1 + *d* = (–17,5) + (–0,5) = –18;

*а*3 = *а*2 + *d* = (–18) + (–0,5) = –18,5;

*а*4 = *а*3 + *d* = (–18,5) + (–0,5) = –19;

*а*5 = *а*4 + *d* = (–19) + (–0,5) = –19,5;

*а*6 = *а*5 + *d* = (–19,5) + (–0,5) = –20.

Первые шесть членов арифметической прогрессии: –17,5; –18; –18,5; –19; –19,5; 20.

*Ответ*: а) 3, 10, 17, 24, 31, 38;

б) –17,5; –18; –18,5; –19; –19,5; 20.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А1.** Запишите четыре первых члена арифметической прогрессии, если *а*1 = 2, *d* = –3.

**Б1.** Запишите конечную арифметическую прогрессию (*ап*), заданную следующими условиями:

а) *а*1 = –2, *d* = 4, *п* = 5; б) *а*1 = 1, *d* = –0,1, *п* = 7;

в) *а*1 = 2, *d* = 3, *п* = 6; г) *а*1 = –2, *d* = 1,5, *п* = 4.

**Задача 2.2.** Известны пятый и шестой члены арифметической прогрессии: …, 11, 7, … .

а) Запишите все предшествующие члены этой прогрессии и все последующие до десятого члена включительно.

б) Определите, сколько положительных членов в этой прогрессии?

в) Начиная с какого номера члены прогрессии отрицательны?

***Решение***.

а) По условию задачи *а*5 = 11, *а*6 = 7. Согласно формуле (2.1)

*ап*+1 = *ап* + *d* → *а*6 = *а*5 + *d* → *d* = *а*6 – *а*5 = 7 – 11 = –4.

Итак, *d* = –4.

Найдём все последующие члены до десятого включительно:

*а*7 = *а*6 + *d* = 7 + (–4) = 3;

*а*8 = *а*7 + *d* = 3 + (–4) = –1;

*а*9 = *а*8 + *d* = (–1) + (–4) = –5;

*а*10 = *а*9 + *d* = (–5) + (–4) = –9.

Найдём все предыдущие члены:

*ап*+1 = *ап* + *d* → *ап* = *ап*+1 – *d*.

Тогда

*а*4 = *а*5 – *d* = 11 – (–4) = 15;

*а*3 = *а*4 – *d* = 15 – (–4) = 19;

*а*2 = *а*3 – *d* = 19 – (–4) = 23;

*а*1 = *а*2 – *d* = 23 – (–4) = 27.

б) Выпишем первые 10 членов нашей прогрессии: 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, –1, –5, –9. Видим, что в ней семь положительных членов.

в) Из нашей прогрессии видно также, что, начиная с восьмого, все члены отрицательные.

*Ответ*: а) 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, –1, –5, –9;

б) семь положительных членов;

в) начиная с восьмого, все члены отрицательные.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А2.** Запишите следующие пять членов арифметической прогрессии: а) 0, 4, 8, 12, …; б) 0, –3, –6, –9, … .

**Б2.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*): 1, 7, 13, … . Найдите: а) разность арифметической прогрессии; б) *а*7, *а*8, *а*9, *а*10.

**В1.** В арифметической прогрессии (*ап*) найдите:

а) *а*2 и *d*, если *а*3 = 5, *а*4 = 9; б) *а*1 и *d*, если *а*2 = 7, *а*3 = 4;

в) *а*5 и *d*, если *а*6 = 8, *а*4 = –12; г) *а*7 и *d*, если *а*6 = –15, *а*8 = –11.

**Прогрессия или НЕ прогрессия?**

**Задача 2.3.** Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) –5, –2, 1, 1, 4, 7, 10, …; б) 7, 0, –7, –14, –21;

в)  г) –1, 4, 9, 14, 19, 24?

***Решение***. Если данная числовая последовательность (*ап*) является арифметической прогрессией, то *для любого* *п* должно выполняться равенство *ап*+1 – *ап* = *d*.

а) –5, –2, 1, 1, 4, 7, 10, … . Здесь *а*2 = –2, *а*3 = 1, *а*4 = 1. Проверяем: *а*3 – *а*2 = 1 – (–2) = 3, *а*4 – *а*3 = 1 – 1 = 0, 0 ≠ 3. Значит, это не арифметическая прогрессия.

б) 7, 0, –7, –14, –21. Здесь *а*1 = 7, *а*2 = 0, *а*3 = –7, *а*4 = –14, *а*5 = –21. Проверяем:

*а*2 – *а*1 = 0 – 7 = –7; *а*4 – *а*3 = (–14) – (–7) = –7;

*а*3 – *а*2 = (–7) – 0 = –7; *а*5 – *а*4 = (–21) – (–14) = –7.

Для всех *п* *ап*+1 – *ап* = –7, значит, это – арифметическая прогрессия.

в) . Здесь   Проверяем:

; , .

Значит, эта числовая последовательность не является арифметической прогрессией.

г) –1, 4, 9, 14, 19, 24. Здесь *а*1 = –1, *а*2 = 4, *а*3 = 9, *а*4 = 14, *а*5 = = 19, *а*6 = 24. Проверяем:

*а*2 – *а*1 = 4 – (–1) = 5; *а*5 – *а*4 = 19 – 14 = 5;

*а*3 – *а*2 = 9 – 4 = 5; *а*6 – *а*5 = 24 – 19 = 5.

*а*4 – *а*3 = 14 – 9 = 5;

Для всех *п* *ап*+1 – *ап* = 5, значит, это – арифметическая прогрессия.

*Ответ*: а, г) да; б, в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А3.** (*Задание с выбором ответа.*) Какая из приведённых последовательностей (а–г) является арифметической прогрессией?

а) 1, 2, 3, 5, 8; б) 4, 9, 16, 25; в) 16, 13, 10, 7; г) 32, 16, 8, 4.

**А4.** Определите, является ли приведенная последовательность арифметической прогрессией:

а) 2, 4, 6, 8, 10, 12; б) 5, 5, 5, 5, 5, 5;

в) 13, 10, 7, 4, 1; г) 3, 1, 3, 1, 3, 1.

**Б3.** Определите, является ли приведенная последовательность арифметической прогрессией:

а) –7, –5 –3, –1, 1; б) 3, 0, –3, –6, –8;

в) ; г) 2, 7, 12, 17, 27.

**Задача 2.4.** Выясните, является ли арифметической прогрессией последовательность (*хп*), заданная формулой *п*-го члена. Если да, то укажите первый член и разность прогрессии:

а) *хп* = 3*п* + 1; б) *хп* = 3⋅2*п*; в) *хп* = *п*2; г) *хп* = 4*п* – 3.

***Решение***.

а) *хп* = 3*п* + 1. Если (*хп*) – арифметическая прогрессия, то должно выполняться условие *хп*+1 – *хп* = *d* для любого *п*.

Проверим: *хп*+1 = 3(*п* + 1) + 1 = 3*п* + 4, *хп*+1 – *хп* = (3*п* + 4) – – (3*п* + 1) = 3 = *d*. Как видим, для любого *п* величина *d* постоянная, не зависящая от *п*. Значит, наша числовая последовательность – арифметическая прогрессия. Найдём её первый член: *х*1 = 3⋅1 + 1 = 4.

б) *хп* = 3⋅2*п*. Выпишем три первых члена последовательности: *х*1 = 3⋅21 = 6, *х*2 = 3⋅22 = 12, *х*3 = 3⋅23 = 24. Тогда

*х*2 – *х*1 = 12 – 6 = 6, *х*3 – *х*2 = 24 – 12 = 12, 6 ≠ 12.

Значит, эта числовая последовательность не является арифметической прогрессией.

в) *хп* = *п*2. Выпишем три первых члена последовательности: *х*1 = 12 = 1, *х*2 = 22 = 4, *х*3 = 32 = 9. Тогда

*х*2 – *х*1 = 4 – 1 = 3, *х*3 – *х*2 = 9 – 4 = 5, 3 ≠ 5.

Значит, эта числовая последовательность не является арифметической прогрессией.

г) *хп* = 4*п* – 3. Проверим, выполняется ли условие: *хп*+1 – *хп* = *d* для любого *п*: *хп*+1 – *хп* = [4(*п* + 1) – 3] – (4*п* – 3) = 4*п* + 4 – 3 – 4*п* + + 3 = 4 = *d*. Для любого *п* разность *хп*+1 – *хп* не зависит от *п* и равна 4. Значит, данная числовая последовательность является арифметической прогрессией.

Найдем её первый член: *х*1 = 4⋅1 – 3 = 1.

*Ответ*: а) *х*1 = 4, *d* = 3; б,в) нет; г) *х*1 = 1, *d* = 4.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б4.** Докажите, что последовательность (*ап*) является арифметической прогрессией, найдите разность прогрессии:

а) *ап* = 2*п* + 1; б) *ап* = 0,5*п* – 4; в) *ап* = –3*п* + 1; г) .

**В2.** Выясните, является ли арифметической прогрессией последовательность (*ап*), заданная формулой *п*-го члена. Если да, то укажите разность прогрессии:

а) *ап* = 2*п* + 5; б) *ап* = 10 – 3*п*; в) *ап* = *п*3; г) *ап* = –4*п*.

**В3.** Возрастающая последовательность состоит из всех натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3. Выясните, является ли она арифметической прогрессией. Если да, то укажите первый член и разность прогрессии.

**В4.** Докажите, что последовательность сумм внутренних углов треугольника, выпуклого четырёхугольника, выпуклого пятиугольника и т.д. является арифметической прогрессией. Чему равна её разность?

**Задача 2.5.** Даны две арифметические прогрессии: *а*1, *а*2, …, *ап*, … и *b*1, *b*2, …, *bп*, … . Определите, является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) *а*1 + *b*1, *a*2 + *b*2, …, *an + bn*, …;

б) *а*1 – *b*1, *a*2 – *b*2, …, *an – bn*, …;

в) *а*1 ⋅ *b*1, *a*2 ⋅ *b*2, …, *an ⋅ bn*, …;

г) |*а*1|, |*a*2|, …, |*an|*, …;

д) , … (все *bi* ≠ 0).

***Решение.*** Если (*ап*) и (*bп*) – арифметические прогрессии, то справедливы равенства для любого *п*:

*ап*+1 – *ап* = *d*1, где *d*1 – разность прогрессии (*ап*);

*bп*+1 – *bп* = *d*2, где *d*2 – разность прогрессии (*bп*).

а) *а*1 + *b*1, *a*2 + *b*2, …, *an + bn*, … . Здесь *п*-й член последовательности *ап* + *bп*. Введём обозначение *хп* = *ап* + *bп* и вычислим разность *хп*+1 – *хп*. Получим:

*хп*+1 – *хп* = (*ап*+1 + *bп*+1) – (*aп* – *bп*) =(*ап*+1 – *ап*) – (*bп*+1 – *bп*) =

*= d*1 + *d*2.

Как видим, разность *хп*+1 – *хп* не зависит от *п*, значит, данная числовая последовательность является арифметической прогрессией.

б) *а*1 – *b*1, *a*2 – *b*2, …, *an – bn*, … . Введём обозначение *хп* = *ап* – – *bп* и вычислим разность *хп*+1 – *хп*. Получим:

*хп*+1 – *хп* = (*ап*+1 – *bп*+1) – (*aп* – *bп*) =(*ап*+1 – *ап*) – (*bп*+1 – *bп*) =

*= d*1 – *d*2.

Так как разность *хп*+1 – *хп* не зависит от *п*, то данная числовая последовательность является арифметической прогрессией.

в) *а*1 ⋅ *b*1, *a*2 ⋅ *b*2, …, *an ⋅ bn*, … . Введём обозначение *хп* = *апbп* и вычислим разность *хп*+1 – *хп*. Получим:

*хп*+1 – *хп* = *ап*+1*bп*+1 – *aпbп* =(*ап*+1 + *d*1)(*bп* + *d*2) – *anbn* =

*anbn + bпd*1 + *апd*2 + *d*1*d*2 – *anbn* *= апd*2 + *bnd*1 + *d*1*d*2.

Как видим, разность *хп*+1 – *хп* зависит от величин *ап* и *bn*. Если для разных *п* величины *ап* и *bп* разные (что бывает почти всегда, за исключением разве что арифметической прогрессии с нулевой разностью), то данная числовая последовательность, вообще говоря, не является арифметической прогрессией.

г) |*а*1|, |*a*2|, …, |*an|*, … . Покажем, что, вообще говоря, данная числовая последовательность не является арифметической прогрессией. Для этого рассмотрим арифметическую прогрессию (*ап*): –1, 0, 1, 2, … (*а*1 *=* –1, *d =* 1). Тогда числовая последовательность |*а*1|, |*a*2|, …, |*an|* будет иметь вид |–1|, |0|, |1|, |2|, … или 1, 0, 1, 2. Ясно, что это не арифметическая прогрессия, так как *а*2 – *а*1 = 0 – 1 = –1, а *а*3 – *а*2 = 1 – 0 = 1, 1 ≠ –1.

*Читатель*: Но если все члены процессии (*ап*) положительные, то числовая последовательность |*а*1|, |*a*2|, …, |*an|*, … будет арифметической прогрессией!

*Автор*: Да! И если все члены этой последовательности будут отрицательными, то тоже да. А вообще говоря, как мы с Вами убедились, – нет!

д) , … . Приведём один пример, доказывающий, что в общем случае данная числовая последовательность не является арифметической прогрессией.

Рассмотрим арифметические прогрессии:

(*ап*): 1, 1, 1, …, 1, …, 1;

(*bп*): 1, 2, 3, …, *п*, … .

Тогда числовая последовательность , … примет вид . Легко убедиться, что это не арифметическая прогрессия, так как

, , .

*Ответ*: а, б) являются арифметическими прогрессиями,

в–д) в общем случае нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б5.** Члены арифметической прогрессии с разностью *d* переписали в обратном порядке. Получится ли арифметическая прогрессия? Если да, то какова будет её разность.

**Б6.** Из арифметической прогрессии с разностью *d* вычеркнули каждый второй член. Получится ли арифметическая прогрессия? Если да, то какова будет её разность.

**В5.** Из арифметической прогрессии с разностью *d* вычеркнули каждый третий член. Получится ли арифметическая прогрессия? Если да, то какова будет её разность.

**Г1.** Известно, что *у* = *f*(*x*) – линейная функция и *х*1, *х*2, *х*3, … – арифметическая прогрессия. Докажите. что последовательность *f*(*x*1), *f*(*x*2), *f*(*x*3), … также является арифметической прогрессией, *f*(*x*) = *ax + b*.

**Между двумя известными членами арифметической**

**прогрессии вставляем ещё несколько членов**

**Задача 2.6.** Между числами 7 и 35 на координатной прямой найдите шесть точек, координаты которых вместе с числами 7 и 35 являются последовательными членами арифметической прогрессии.

***Решение***. Пусть *а*1 = 7 – первый член арифметической прогрессии (*ап*), а *а*8 – её восьмой член. Тогда числа *а*2, *а*3, *а*4, *а*5, *а*6 и *а*7 должны располагаться между этими числами (рис. 2.1), причём величины отрезков *а*1*а*2, *а*2*а*3, …, *а*7*а*8 равны разности прогрессии *d*.

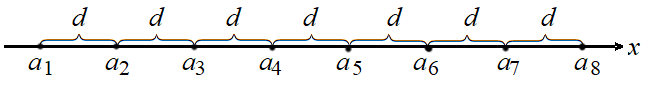


Рис. 2.1

Как видно из рисунка, с одной стороны, длина отрезка *а*1*а*8 равна 35 – 7 = 28, а с другой – *а*1*а*8 = 7*d*. Значит, 28 = 7*d* → *d* = 4. Теперь осталось найти координаты шести точек:

*а*2 = *а*1 + *d* = 7 + 4 = 11, *а*5 = *а*4 + *d* = 19 + 4 = 23,

*а*3 = *а*2 + *d* = 11 + 4 = 15, *а*6 = *а*5 + *d* = 23 + 4 = 27,

*а*4 = *а*3 + *d* = 15 + 4 = 19, *а*7 = *а*6 + *d* = 27 + 4 = 31.

*Ответ*: координаты точек: 11, 15, 19, 23, 27, 31.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б7.** Между числами –8 и –35 вставили два числа так, чтобы получились четыре последовательных члена арифметической прогрессии. Найдите разность этой прогрессии.

**Б8.** Между числами –6 и –15 вставили два числа так, чтобы получились четыре последовательных члена арифметической прогрессии. Найдите разность этой прогрессии.

**В6.** Между числами 6 и 30 вставьте пять чисел так, чтобы вместе с данными они образовали арифметическую прогрессию.

**В7.** Между числами -7 и 23 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными они образовали арифметическую прогрессию.

**Г2.** Между числами –13,5 и –3,7 вставили семь чисел так, чтобы вместе с данными они составляли арифметическую прогрессию. Принадлежит ли разность этой прогрессии множеству значений функции *у* = 1 + *х* – *х*2?

**Известна сумма нескольких членов прогрессии…**

**Задача 2.7.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*), найдите:

а) *а*2 + *а*9, если *а*1 + *а*10 = 120; б) *а*3, если *а*1 + *а*5 = 48.

***Решение***.

а) *а*1 + *а*10 = 120, *а*2 + *а*9 = ?

*а*2 = *а*1 + *d*, *а*9 = *а*10 – *d* → *a*2 + *a*9 = (*a*1 + *d*) + (*a*10 – *d*) =

= *а*1 *+ а*10 = 120.

б) *а*1 + *а*5 = 48, *а*3 = ?

*а*1 = *а*2 – *d* = (*a*3 – *d*) – *d* = *a*3 – 2*d*,

*а*5 = *а*4 + *d* = (*a*3 + *d*) + *d* = *a*3 + 2*d*.

Тогда

*a*1 + *a*5 = (*a*3 – 2*d*) + (*a*3 + 2*d*) = 2*а*3 → .

*Ответ*: а) 120; б) 24.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б9.** Задана арифметическая прогрессия (*ап*).

а) Зная, что *а*1 + *а*20 = 64, найдите *а*2 + *а*19;

б) зная, что *а*3 + *а*17 = –40, найдите *а*1 + *а*19;

в) зная, что *а*2 + *а*15 = 25, найдите *а*1 + *а*16;

г) зная, что *а*1 + *а*25 = –10, найдите *а*10 + *а*16.

**В8.** а) Найдите *а*10 + *а*20, если известно, что *а*9 + *а*11 = 44 и *а*19 + *а*21 = 104.

б) Найдите *а*15 + *а*30, если известно, что *а*16 + *а*16 = –20 и *а*29 + *а*31 = = 40.

**Г3.** Четыре числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма первых трёх равна –21, а сумма трёх последних чисел равна –6. Найдите эти числа.

**Ещё одно важное свойство арифметической прогрессии**

Рассмотрим три члена произвольной арифметической прогрессии: *ап*–1, *ап*, *ап*+1. Согласно формуле (2.1)

*ап*–1 = *ап* – *d*, (1)

*ап*+1 = *ап* + *d*. (2)

Сложим почленно равенства (1) и (2), получим:

*ап*–1 + *ап*+1 = *ап* – *d* + *ап* + *d* → *ап*–1 + *ап*+1 = 2*ап* →

. (2.2)

Запомним: *каждый член арифметической прогрессии (кроме первого) равен полусумме соседних членов.*

**Задача 2.8.** Найдите члены последовательности, обозначенные буквами, если известно, что эта последовательность – арифметическая прогрессия:

а) *а*1, 12, *а*3, 18, *а*5, *а*6, …; б) –7, *а*2, –17, …, *а*15, –82, *а*17, … .

***Решение***.

а) *а*1, 12, *а*3, 18, *а*5, *а*6, … .

1. Воспользуемся формулой (2.2): .

2. Вычислим разность прогрессии: *d* = *а*3 – *а*2 = 15 – 12 = 3.

3. Вычислим неизвестные члены последовательности:

*а*1 = *а*2 – *d* = 12 – 3 = 9;

*а*5 = *а*4 + *d* = 18 + 3 = 21;

*а*6 = *а*5 + *d* = 21 + 3 = 24.

Итак, мы получили: 9, 12, 15, 18, 21, 24.

б) –7, *а*2, –17, …, *а*15, –82, *а*17, … .

1. Воспользуемся формулой (2.2):

.

2. Вычислим разность прогрессии: *d* = *а*2 – *а*1 = –12 – (–7) = –5.

3. Вычислим неизвестные члены последовательности:

*а*15 = *а*16 – *d* = –82 – (–5) = –77;

*а*17 = *а*16 + *d* = –82 + (–5) = –87.

Итак, мы получили: –7, –12, –17, …, –77, –82, –87.

*Ответ*: а) 9, 12, 15, 18, 21, 24;

б) –7, –12, –17, …, –77, –82, –87.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А5.** Первый член арифметической прогрессии равен 5, а третий равен 8. Чему равен второй член?

**А6.** Задана арифметическая прогрессия (*ап*).

а) Зная, что *а*11 + *а*13 = 122, найдите *а*12;

б) зная, что *а*19 = 5, найдите *а*18 + *а*20;

в) зная, что *а*15 + *а*17 = –2, найдите *а*16;

г) зная, что *а*7 = 4, найдите *а*6 + *а*8.

**Б10.** Между числами 15 и 23 вставьте число таким образом, чтобы получившиеся три числа являлись последовательными членами арифметической прогрессии.

**В9.** Задана арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите:

а) *а*17, если *а*16 + *а*18 = 12; б) *а*20, если *а*19 + *а*21 = –20;

в) *а*5, если *а*3 + *а*7 = 6; г) *а*8, если *а*2 + *а*14 = 28.

**Задача 2.9.** Докажите, что если числа  в заданном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию, то верно ли равенство:

а) *ab + bc + ac* = 3*ac*; б) .

***Решение***.

а) *ab + bc + ac* = 3*ac*. Если числа  – три последовательных члена арифметической прогрессии (*ап*), т.е.    то по формуле (2.2):

2*ac* = *ab + bс.*

Прибавим к обеим частям последнего равенства *ас* и получим:

*ас* + 2*ас* = *ab + bc + ac* → 3*ac* = *ab + bc + ac*.

Что и требовалось доказать.

б) . Как мы выяснили выше в пункте а),  . Умножаем обе части этого равенства на *b* и получим:

 или = 2.

Что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А7.** Первый член арифметической прогрессии равен *а*, а третий равен *b*. Чему равен второй член?

**Б11.** Углы некоторого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один их них равен 60°.

**В10.** Найдите значения *у*, при которых числа 2*у* + 5, *у*, 3*у* – 8 являются последовательными членами арифметической прогрессии.

**Г4.** Докажите, что если числа – последовательные члены арифметической прогрессии, то числа *а*2, *b*2, *с*2 также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

**Г5.** Докажите, что если числа *а*, *b*, *с* – три последовательных члена арифметической прогрессии, то между ними существует соотношение *а*2 + 8*bc* = (2*b* + *c*)2.

**Формула *п*-го члена арифметической прогрессии**



*Автор*: Как найти *п*-й член прогрессии, если известен её первый член *а*1 и разность прогрессии *d*?

*Читатель*: Пусть последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Тогда по определению арифметической прогрессии

*****а*2 = *а*1 + *d*,

*а*3 = (*а*1 + *d*) + *d* = *a*1 + *d* ⋅ 2,

*а*4 = (*а*1 + 2*d*) + *d* = *a*1 + *d* ⋅ 3,

*а*5 = (*а*1 + 3*d*) + *d* = *a*1 + *d* ⋅ 4.

Понятно, что *а*6 = *a*1 + *d* ⋅ 5, *а*25 = *a*1 + *d* ⋅ 24, *а*100 = *a*1 + *d* ⋅ 99. И вообще,

*ап* = *a*1 + *d*(*п* – 1). (2.3)

*Автор*: Верно! А формула (2.3) и является формулой *п*-го члена арифметической прогрессии, в которой первый член равен *а*, а разность равна *d*.

**Задача 2.10.** Последовательность (*сп*) –арифметическая прогрессия, в которой *с*1 = 0,62 и *d* = 0,24. Найдите пятидесятый член этой прогрессии.

***Решение***. Согласно формуле (2.3)

*с*50 = 0,62 + 0,24 ⋅ (50 – 1) = 12,38.

*Ответ*: 12,38.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А8.** Арифметическая прогрессия (*ап*) задана формулой общего члена *ап* = *а*1 + (*п –* 1)*d*, где *а*1 = 3, *d* = 2. Найдите пять первых членов прогрессии.

**Б12.** Дана конечная арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *ап*, если:

а) *а*1 = 1, *d* = 2, *п* = 11; б) ;

в) ; г) .

**В11.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) *а*12, если;

б) *а*8, если .

**По первым членам прогрессии находим *п*-й член**

**Задача 2.11.** Найдите 157-й член арифметической прогрессии 120, 116, 112, 108, 104, … .

***Решение***. В этой прогрессии *а*1 = 120, *d* = 116 – 120 = –4. По формуле (2.3) получим:

*а*157 = *a*1 + *d*(*п* – 1) = 120 + (– 4)⋅(157 – 1) = –504.

*Ответ*: –504.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б13.** Найдите 23-й и *п*-й члены арифметической прогрессии:

а) –8, – 6,5, …; б) 11, 7, … .

**Б14.** Составьте формулу *п*-го члена арифметической прогрессии:

а) 2, 5, 8, 11, …; б) 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, …;

в) 7, 5, 3, 1, …; г) .

**Б15.** Найдите разность и десятый член арифметической прогрессии:

а) 1, 3, 5, 7, …; б) ;

в) 100, 90, 80, 70, …; г) .

**По формуле *ап* = *а*1 + *d*(*п* – 1) находим *а*1 и *d***

**Задача 2.12.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) *d*, если *а*1 = 11, *а*20 = 20,5; б) *а*1, если *d* = –3, *а*36 = –15.

***Решение***.

а) *а*1 = 11, *а*20 = 20,5, *d* = ? Используем формулу (2.3):

*а*20 = *а*1 + *d*(20 –1) → 20,5 = 11 + *d*⋅19 → *d*⋅19 = 20,5 – 11 →

.

б) *d* = –3, *а*36 = –15, *а*1 = ? Используем формулу (2.3):

*а*36 = *а*1 + *d*(36 –1) → –15 = *а*1 + (–3)⋅35 →

*а*1 = –15 + 3⋅35 → *а*1 = 90.

*Ответ*: а) *d* = 0,5; б) *а*1 = 90.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б16.** Найдите первый член арифметической прогрессии (*хп*), если: а) *х*30 = 128, *d* = 4; б) *х*45 = –208, *d* = –7.

**Б17.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Найдите: а) *с*1, если *с*36 = 26, *d* = 0,7; б) *d*, если *с*1 = –10, *с*15 = 1,2.

**В12.** Найдите первый член арифметической прогрессии (*ап*), если:

а) *а*7 = 9, *d* = 2; б) *а*37 = –69, *d* = –2,5;

в) *а*26 = –71, *d* = –3; г) *а*14 =  *d* = –.

**В13.** Зная формулу *п*-го члена арифметической прогрессии (*ап*), найдите *а*1 и *d*:

а) *ап* = 3*п* – 2; б) ; в) *ап* = –0,1*п* + 3; г) *ап* = 5 – 2*п*.

**Принадлежит ли число данной**

**арифметической прогрессии?**

**Задача 2.13.** Является ли число –122 членом арифметической прогрессии (*хп*): 23; 17,2; 11,4; 5,6; …?

***Решение***. В данной прогрессии первый член *х*1 = 23, а разность прогрессии *d* = *х*2 – *х*1 = 17,2 – 23 = –5,8. Отсюда по формуле (2.3) *п*-й член прогрессии равен

*хп* = *х*1 + *d*(*п* – 1) = 23 – 5,8(*п* –1).

Предположим, что число –122 является *п*-м членом нашей арифметической прогрессии: –122 = *хп*, тогда должно выполняться равенство –122 = 23 – 5,8(*п* – 1). Решим получившееся уравнение относительно *п*:



*п* – 1 = 25 → *п* = 26.

Значит, –122 = *х*26 – это 26-й член нашей прогрессии!

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Читатель*: А что должно было получиться, если бы число –122 не являлось членом этой арифметической прогрессии?  *Автор*: В этом случае *п* получилось бы или *отрицательным* числом, или *положительным дробным* числом, или *нулём*.  *Ответ*: да, –122 = *х*26. |

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б18.** Определите, содержит ли арифметическая прогрессия 2, 9, … число: а) 156; б) 295.

**Б19.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*), у которой *а*1 = 32 и *d* = –1,5. Является ли членом этой прогрессии число: а) 0; б) –28?

**Б20.** Найдите число членов в прогрессии 1, 3, 5, 7, …, 993, 995, 997, 999.

**В14.** Число 29 является членом арифметической прогрессии 9, 11, 13, … . Найдите номер этого члена.

**В15.** Число 43 является членом арифметической прогрессии 3, 7, 11, … . Найдите номер этого члена.

**В16.** Проверьте:

а) является ли число 4,5 членом арифметической прогрессии –1,5; –1; –0,5; … ;

а) является ли число 43,5 членом арифметической прогрессии 7,5; 11; 14,5, … .

**Прогрессии и неравенства**

**Задача 2.14.** В арифметической прогрессии (*хп*) первый член равен 8,7, а разность –0,3. Для каких членов прогрессии выполняется условие: а) *хп* ≥ 0; б) *хп* < 0?

***Решение***. По условию *х*1 = 8,7, *d* = –0,3. Воспользуемся формулой (2.3) и получим:

*хп* = *х*1 + *d*(*п* – 1) = 8,7 – 0,3(*п* – 1).

а) *хп* ≥ 0 → 8,7 – 0,3(*п* – 1) ≥ 0 → 0,3(*п* – 1) ≤ 8,7 → *п* –1 ≤ 29 → *п* ≤ 30. Значит, условие *хп* ≥ 0 выполняется, если *п* ≤ 30, т.е. для первых *тридцати* членов прогрессии.

б) *хп* < 0 → 8,7 – 0,3(*п* – 1) < 0 → 0,3(*п* – 1) > 8,7 → *п* –1 > 29 → *п* > 30. Значит, условие *хп* < 0 выполняется, если *п* > 30, т.е. для всех членов прогрессии, начиная с 31-го.

*Ответ*: а) *п* ≤ 30; б) *n* > 31.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б21.** Найдите номера отрицательных членов арифметической прогрессии –20,3; –18,7; … . Чему равен первый положительный член этой прогрессии?

**Б22.** Определите, сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия: а) 3,8; 3,5; 3,2; …; б) 7,1; 6,9; 6,7; …; в)  г) .

**В17.** Найдите:

а) первый положительный член арифметической прогрессии 

а) первый отрицательный член арифметической прогрессии .

**В18.** Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (*ап*) будут меньше заданного числа *А*:

а) 2; 1,9; 1,8; 1,7; …, *А* = 0; б) 15,9; 15,5; 15,1; …, *А* = 0,9;

в) 110, 100, 90, …, *А* = 15; г) –1; –1,75; –2,5; …, *А* = –16,3.

**Г6.** Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (*ап*) будут меньше заданного числа *А*:

а) *ап* = 7*п* – 121, *А* =; б) *ап* = , *А* = 21;

в) *ап* = 5*п* – 17,7, *А* = 2 +; г) *ап* =, *А* = 5.

**По данным членам арифметической прогрессии**

***ai* и *aj* ищем *а*1 и *d***

**Задача 2.15.** В арифметической прогрессии (*хп*) *х*20 = 1,4 и *х*30 = 2,4. Запишите первые пять членов этой прогрессии.

***Решение***. Воспользуемся формулой (2.3) и получим:



Решаем полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными относительно *х*1 и *d*:



Подставим *d* = 0,1 в уравнение (1) и получим:

1,4 = *х*1 + 19⋅0,1 → *х*1 = 1,4 – 1,9 → *х*1 = –0,5.

Теперь нам осталось вычислить пять первых членов этой арифметической прогрессии:

*х*1 = –0,5;

*х*2 = *х*1 + *d* = –0,5 + 0,1 = –0,4;

*х*3 = *х*2 + *d* = –0,4 + 0,1 = –0,3;

*х*4 = *х*3 + *d* = –0,3 + 0,1 = –0,2;

*х*5 = *х*4 + *d* = –0,2 + 0,1 = –0,1.

*Ответ*: –0,5; –0,4; –0,3; –0,2; –0,1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б23.** Найдите разность арифметической прогрессии, четвёртый член которой равен 1,25, а девятый равен.

**В19.** В арифметической прогрессии *а*7 = 8, *а*11 = 12,8. Найдите *а*1 и *d*.

**В20.** Первый член прогрессии равен *а*, а четвёртый член равен *d*. Чему равны её второй и третий члены?

**В21.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) *d*, если *а*20 = 1,7 и *а*37  = 0; б) *а*100, если *а*10 = 270 и *d* = –3.

**Г7.** Составьте формулу *п*-го члена арифметической прогрессии (*ап*), если:

а) *а*5 = 15, *а*12 = 29; б) *а*9 = –30, *а*19 = –45;

в) *а*7 = 20, *а*15 = 40; г) *а*5 = 0,2, *а*16 = –7,5.

**Прогрессии и системы уравнений**

**Задача 2.16.** Известно, что *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 – 7*х* + + *а* = 0, *х*3 и *х*4 – корни уравнения *х*2 – 19*х* + *b* = 0, причем числа *х*1, *х*2, *х*3, *х*4 составляют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите *а* и *b*.

***Решение***. Согласно формуле (2.3) *х*2 = *х*1 + *d*, *х*3 = *х*1 + 2*d*, *х*4 = *х*1 + 3*d*. По теореме Виета из того, что *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 – 7*х* + *а* = 0, следует, что *х*1 + *х*2 = 7 → *х*1 + (*х*1 + *d*) = 7, а из того, что *х*3 и *х*4 – корни уравнения *х*2 – 19*х* + *b* = 0, следует, что *х*3 + *х*4 = 19 → (*х*1 + 2*d*) + (*х*1 + 3*d*) = 19. Мы получили систему уравнений:





Подставим значение *d* = 3 в уравнение (1) и получим:

2*х*1 + 3 = 7 → 2*х*1 = 4 → *х*1 = 2.

Теперь вычислим значения *х*2, *х*3, *х*4:

*х*2 = *х*1 + *d* = 2 + 3 = 5;

*х*3 = *х*2 + *d* = 5 + 3 = 8;

*х*2 = *х*3 + *d* = 8 + 3 = 11.

Ещё раз вспомним теорему Виета:

если *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 – 7*х* + *а* = 0, то *а* = *х*1*х*2 = = 2 ⋅ 5 = 10;

если *х*3 и *х*4 – корни уравнения *х*2 – 19*х* + *b* = 0, то *b* = *х*3*х*4 = = 8 ⋅ 11 = 88.

*Ответ*: *а* = 10, *b* = 88.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г8.** Сумма первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение второго и четвёртого ее членов равно 45. Найдите шестой член этой прогрессии.

**Г9.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии *а*1, *а*2, …, *ап*, …, если известно, что

а) *а*2 + *а*4 = 16, *а*1*а*5 = 28; б) *а*1*а*11 = 44, *а*2 + *а*10 = 24.

**Г10.** Сумма второго, четвёртого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно –168. Найдите первый член и разность прогрессии.

**Задачи на доказательства**

**Задача 2.17.** Числа *аk*, *аl*, *am* являются членами арифметической прогрессии. Докажите, что   если .

***Решение***. Заметим, что поскольку , то согласно формуле (2.2) *k*, *l*, *m* – три последовательных члена арифметической прогрессии, поэтому *l – k = m – l = n*, где *п* – разность прогрессии *k*, *l*, *m*, а значит, *m = l + п* и *k = l – n*. Тогда:

*am* = *al+n* = *al + nd*,

*ak* = *al–k* = *al – nd*,

где *d* – разность прогрессии (*ап*).

Преобразуем левую часть нашего равенства:



Преобразуем правую часть нашего равенства:



Как видим, левая часть равна правой, что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В22.** Докажите, что если (*уп*) – арифметическая прогрессия, то:

а) *у*2 + *у*7 = *у*4 + *у*5; б) *уп*–5 + *уп*+10 = *уп* + *уп*+5.

**Г11.** Докажите, что если *d* – разность арифметической прогрессии, а *хт* и *хп* – её члены, причём *т* ≠ *п*, то .

**Текстовые задачи**

****

**Задача 2.18.** В январе в городе произошло 60 автомобильных аварий. Благодаря мерам, принимаемым дорожными службами, в каждый последующий месяц число аварий становилось на 4 меньше.

а) Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую количество аварий в городе с января по май.

б) Запишите формулу для вычисления количества аварий через *п* месяцев.

в) Какое число аварий можно ожидать в декабре, если тенденция сохранится?

***Решение***. Поскольку в каждый последующий месяц аварий было на 4 меньше, чем в предыдущий, то мы получаем арифметическую прогрессию, в которой первый член *а*1 = 60 – количество аварий в январе, а разность прогрессии *d* = –4. Тогда *п*-й член равен: *ап* = *а*1 + *d*(*n* – 1) = 60 – 4(*п* – 1), где *п* – порядковый номер месяца в году.

Вычислим количество аварий в каждом из пяти первый месяцев:

январь: *а*1 = 60;

февраль: *а*2 = *а*1 + *d* = 60 + (–4) = 56;

март: *а*3 = *а*2 + *d* = 56 + (–4) = 52;

апрель: *а*4 = *а*3 + *d* = 52 + (–4) = 48;

май: *а*5 = *а*4 + *d* = 48 + (–4) = 44.

Построим столбчатую диаграмму, иллюстрирующую количество аварий с января по май (рис. 2.2).

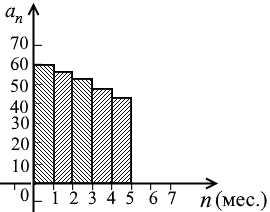


Рис. 2.2

Количество аварий в 12-м месяце – декабре – можно вычислить по формуле

*а*12 = 60 – 4(12 –1) = 60 – 4⋅11 = 16.

*Ответ*: в) 16.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б24.** Тело в первую секунду движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду – на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду?

**В23.** У Николая есть 10 руб., и он имеет возможность увеличивать эту сумму ежедневно на 2 руб.

а) Запишите формулу для вычисления суммы *сп*, которая будет у Николая через *п* дней.

б) С помощью этой формулы определите, сколько рублей будет у Николая через 20 дней; через 30 дней.

в) Николаю требуется 90 руб. для покупки компакт-диска. Через сколько дней у него будет эта сумма?

**В24.** Самолёт начал снижение на высоте 8000 м и в первые 10 мин снижался на 500 м в минуту.

а) Запишите формулу для вычисления высоты *hn*, на которой будет находиться самолёт через *п* минут после начала снижения.

б) С помощью этой формулы определите, на какой высоте будет самолёт через 3 мин после начала снижения; через 8 мин.

в) На какой минуте самолёт окажется ниже 4000 м над уровнем земли?

г) Изобразите точками координатной плоскости десять членов последовательности (*h­n*).

**Сумма членов арифметической прогрессии**

# Начнем с того, что попробуем вычислить сумму всех натуральных чисел от одного до десяти включительно:

# *S* = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.

Обратим внимание на следующий замечательный факт: сумма двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее краев, равна сумме крайних членов:

1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11.

# Тогда нашу сумму можно представить в виде пяти равных сумм:

*S* = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) =

= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 11 ⋅ 5 = 55.

Итак, мы вычислили сумму арифметической прогрессии, у которой *а*1 = 1, *d* = 1, *а*10 = 10, *п* = 10. При этом мы фактически воспользовались формулой:

.

Покажем теперь, что для произвольной арифметической прогрессии, состоящей из *п*  членов, с первым членом *а*1 и последним *ап* сумма всех ее членов вычисляется по формуле:

. (2.4)

Прежде всего, докажем, что сумма двух членов любой конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов:

*a*1 + *an = a*2 + *an* – 1 = *a*3 + *an*–2 = … = *ak + an–k+*1

для любого *k*  = 1, 2, 3, …, *n*.

Воспользуемся формулой (2.3):

*an* = *a*1 + *d*(*n* – 1),

*ak* = *a*1 + *k*(*n* – 1),

*an–k*+1 = *a*1 + *d*[(*n* – *k +* 1) – 1] = *a*1 + *d*(*n – k*).

Тогда

*a*1 + *an* = *a*1 + *a*1 + *d*(*n* – 1) *=* 2*a*1 + *d*(*n* – 1),

*ak* + *an–k+*1 = *a*1 + *d*(*k* – 1) + *a*1 + *d*(*n – k*) *=* 2*a*1 + *d*(*n* – 1).

Следовательно, *a*1 + *an* = *ak* + *an–k+*1, что и требовалось доказать.

Теперь приступим непосредственно к выводу формулы (2.4). Сделаем следующую «хитрость»: запишем сумму *п*первых членов арифметической прогрессии сначала в обычном порядке, а затем в обратном порядке:

*Sn = a*1 + *a*2 + *a*3 +…+ *an*–2 + *an*–1 + *an*; (1)

*Sn = an* + *an*–1 + *an*–2 +…+ *a*3 + *a*2 + *a*1. (2)

А теперь сложим равенства (1) и (2) и получим:

2*sn =* (*a*1 + *an*) + (*a*2 + *an*–1) + (*a*3 + *an*–2) +…

…+ (*an*–2 + *a*3) + (*an*–1 + *a*2) + (*an* + *a*1). (3)

Заметим, что все выражения, стоящие в скобках, представляют собой суммы двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее концов и поэтому равные сумме крайних членов, т.е. (*a*1 + *an*).

Всего таких скобок ровно *n*, поэтому равенство (3) можно записать в виде:

.

Формула (2.4) доказана!

**Задача 2.19.** Вычислите сумму первых 13 членов арифметической прогрессии (*а­п*­), у которой *а*1 = 17, *а*13 = 13.

***Решение***. Воспользуемся формулой (2.4):

.

*Ответ*: 195.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А9.** Дана арифметическая прогрессия (*а­п*­). Найдите:

а) *S*20, если *а*1 = 1, *а*20 = 20; б) *S*30, если *а*1 = –10, *а*30 = 20.

**Б25.** Вычислите сумму первых 60 членов арифметической прогрессии (*а­п*­), если: а) *а*1 = 3, *а*60 = 57; б) *а*1 = –10,5, *а*60 = 51,5.

**В25.** Вычислите сумму *Sn* членов арифметической прогрессии (*ап*), если известны первый и последний её члены:

а) *а*1 = –1, *а*30 = 86; б) *а*1 = 41, *а*20 = –16;

в) *а*1 = –13, *а*10 = –5; г) *а*1 = 17, *а*25 = 31.

**Вычисляем сумму *п* первых членов**

**арифметической прогрессии**

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Автор*: Сможете ли Вы, используя формулу  найти формулу для суммы первых *п* натуральных чисел?  *Читатель*: Последовательность первых *п* натуральных чисел 1, 2, 3, …, *п* – это арифметическая прогрессия, у которой первый член *а*1 = 1, разность *d* = 1, а *п*-й член равен *п*. Подставляя в |

****формулу  *а*1 =1 и *ап* = *п*, получим .

*Автор*: Совершенно верно! А можем ли мы теперь вычислить сумму первых 500 натуральных чисел?

*Читатель*: Легко! .

*Автор*: Правильно!

**Задача 2.20.** Арифметическая прогрессия задана формулой *ап* = 3*п* + 5. Найдите: а) *S*10; б) *S*20; в) *Sn*.

***Решение***. Если *ап* = 3*п* + 5, то *а*1 = 3⋅1 + 5 = 8; *а*10 = 3⋅10 + 5 = = 35; *а*20 = 3⋅20 + 5 = 65. По формуле (2.4) получим:

;

;

.

*Ответ*: а) *S*10 = 215; б) *S*20 = 730; в) *Sn* =.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А10.** Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 1500.

**Б26.** Найдите:

а) сумму 2 + 4 + 6 + … + 2*п*, слагаемыми которой являются все чётные натуральные числа от 2 до 2*п*;

б) сумму 1 + 3 + 4 + … + (2*п* + 1), слагаемыми которой являются все нечётные натуральные числа от 2 до 2*п* –1.

**Б27.** Арифметическая прогрессия задана формулой *ап* = 3*п* + 2. Найдите сумму двадцати её первых членов.

**Б28.** Для любого натурального *п* вычислите сумму

3 + 8 + 13 + … + (5*п* – 2).

**В26.** Найдите сумму пятидесяти, ста и *п* первых членов последовательности (*хп*), если: а) *хп* = 4*п* + 2; б) *хп* = 2*п* + 3.

**Г12.** Найдите натуральное число, которое:

а) в 5 раз меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел;

б) равно сумме предшествующих ему натуральных чисел.

**Задача 2.21.** Дана сумма, слагаемые которой являются членами арифметической прогрессии. Впишите недостающие слагаемые и найдите значение этой суммы:

а) 23 + 27 + 31 + … + 51; б) 28 + 25 + 22 + … + 1.

***Решение***.

а) 23 + 27 + 31 + … + 51. В этой прогрессии разность равна *d* = 27 – 23 = 4, т.е. каждый последующий член на 4 больше предыдущего. Впишем недостающие члены: 23 + 27 + 31 + **35** + + **39** + **43** + **47** + 51. Всего получили 8 членов, где *а*1 = 23, *а*8 = 51. Тогда .

б) 28 + 25 + 22 + … + 1. В этой прогрессии разность равна *d* = 25 – 28 = –3, т.е. каждый последующий член на 3 меньше предыдущего. Впишем недостающие члены: 28 + 25 + 22 + **19**  + + **16** + **13** + **10** + **7** + **4**+ 1. Всего получили 10 членов, где *а*1 = = 28, *а*10 = 1. Тогда .

*Ответ*: а) *S*8 = 296; б) *S*10 = 145.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А11.** Вычислите:

а) 1 + 2 + 3 + 4 + … + 17 + 18 + 19;

б) 30 + 31 + 32 + … + 47 + 48 + 49 + 50.

**Б29.** Найдите сумму:

а) чётных чисел от 30 до 98; б) нечётных чисел от 15 до 85.

**В27.** Выпишите первые десять членов данной арифметической прогрессии и найдите их сумму:

а) 0,2; 0,5; 0,8; …; б) –50, –35, –20.

**Арифметические прогрессии и кратные числа**

**Задача 2.22.** Найдите сумму натуральных чисел:

а) всех двузначных чисел, кратных 2 или 3;

б) всех трёхзначных чисел, не кратных 7;

в) всех трёхзначных чисел, кратных 3, но не кратных 2.

***Решение***.

а) Требуется найти сумму двузначных чисел, которые делятся на 2 или на 3, причём подходят и те, которые делятся и на 2, и на 3.

Прежде всего, отметим, что самое большое двузначное число 99, а однозначных чисел ровно 9. Значит, количество двузначных чисел равно: 99 – 9 = 90.

Половина двузначных чисел – чётные числа, следовательно, их будет 90 : 2 = 45, при этом наименьшее чётное двузначное число 10, а наибольшее – 98. Найдём их сумму:

.

В эти 45 чисел входят и те числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3 (например, 10), и те числа, которые делятся и на 2, и на 3 (например, 12).

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Автор*: Все ли требуемые числа мы сложили?  *Читатель*: Нет! Мы не учли числа, которые делятся на 3, но не делятся на 2 (например, 15).  *Автор*: Согласен. Давайте выпишем несколько таких чисел в порядке возрастания:  15, 21, 27, 33, … . |

*Читатель*: Получается арифметическая прогрессия с разностью *d* = 21 – 15 = 6! А последний член этой прогрессии: 99.

*Автор*: И сколько же членов этой прогрессии?

*Читатель*: Это можно легко вычислить: *а*1 = 15, *d* = 5 и *ап* = 99, тогда применим формулу (2.3), получим:

*ап* = *а*1 + *d*(*п* – 1) → 99 = 15 + 6(*п* – 1) → 

*п* – 1 = 14 → *п* = 15.

*Автор*: Осталось найти сумму этих 15 чисел…

*Читатель*: А это просто: *а*1 = 15, *ап* = 99, *п* = 15, по формуле (2.4) получим . А общая сумма всех двузначных чисел, кратных 2 или 3, равна 2430 + 855 = 3285.

б) Требуется найти сумму трёхзначных чисел, которые не делятся на 7.

*Автор*: Сначала попробуем выяснить, сколько всего трёхзначных чисел.

*Читатель*: Это просто: надо от наибольшего трёхзначного числа 999 вычесть количество нетрёхзначных чисел – однозначных и двузначных, а таких 99, получим 999 – 99 = 900.

*Автор*:А можно ли теперь найти сумму *всех* трёхзначных чисел?

*Читатель*: Легко! Здесь *а*1 = 100, *а*900 = 999, *п* = 900, тогда получим: .

*Автор*: Верно! А теперь давайте найдём сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7. Для этого определим наименьшее и наибольшее трёхзначные числа.

*Читатель*: Наименьшее трёхзначное число, кратное 7, будет 105, так как 105 : 7 = 15, а наибольшее 994, так как 994 : 7 = = 142.

*Автор*: Правильно. И сколько таких чисел?

*Читатель*: *ап* = *а*1 + *d*(*п* – 1) → 994 = 105 + 7⋅(*п* –1), отсюда  *п* = 128.

*Автор*: Ну, а теперь, я думаю, Вам не составит труда подсчитать сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7.

*Читатель*: Конечно!

.

Но ведь в задаче спрашивается найти сумму всех трёхзначных чисел, *не кратных* 7!

*Автор*: Да. Но мы с Вами нашли сумму всех трёхзначных чисел (494500) и сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7 (70336). Ясно, что любое число либо кратно 7, либо не кратно 7. Поэтому чтобы найти сумму всех трёхзначных чисел, не кратных 7…

*Читатель*: Надо из суммы всех трёхзначных чисел вычесть сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7:

494500 – 70336 = 424164.

*Автор*: Верно!

в) Здесь требуется найти сумму всех трёхзначных чисел, кратных 3, но не кратных 2.

*Автор*:Выше мы уже выяснили, что всего существует 900 трёхзначных чисел. Наименьшее из них, кратное 3, 102 (102 : 3 = = 34), а наибольшее 999 (999 : 3 = 333). Всего таких чисел ровно 300 (убедитесь в этом самостоятельно!). Значит, сумма всех трёхзначных чисел, кратных 3, равна

.

*Читатель*: Но в эту сумму входят числа, кратные и 3, и 2.

*Автор*: Да. Но поскольку числа 2 и 3 взаимно простые, то числа, кратные и 3, и 2, кратны произведению 2⋅3 = 6. Поэтому нам надо вычислить сумму всех трёхзначных чисел, кратных 6, и вычесть эту сумму из числа 165150. В самом деле, число, кратное 3, может быть либо кратно 2, либо не кратно 2, третьего не дано.

*Читатель*: Первое трёхзначное число, кратное 6 – это 102 (102 : 6 = 17), а последнее – 996 (996 : 6 = 166). Мы получили арифметическую прогрессию: 102, 108, …, 996. Разность прогрессии 108 – 102 = 6. Отсюда

*ап* = *а*1 + *d*(*п* – 1) → 996 = 102 + + 6⋅(*п* –1) → *п* = 150.

Найдём сумму этих чисел:

.

*Автор*: Нам остался последний шаг.

*Читатель*: 165150 – 82350 = 82800.

*Автор*: Всё верно!

*Ответ*: а) 3285; б) 424164; в) 82800.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А12.** Делится ли на 1999 сумма чисел 1 +2 + 3 + … + 1999?

**Б30.** Найдите сумму:

а) первых 40 чётных чисел;

б) всех натуральных чисел от 1 до 100, кратных 3.

**В28.** Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел, кратных 5;

б) всех трёхзначных чисел, кратных 15;

в) всех двузначных чисел, которые не делятся на 6.

**В29.** Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 120;

б) всех натуральных чисел, кратных 4 и заключённых между 50 и 150;

в) всех натуральных чисел, меньших 100, которые не делятся на 5.

**В30.** Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, не превосходящих 150;

б) всех натуральных чисел от 20 до 120 включительно;

в) всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 300;

г) всех натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих 130.

**В31.** Найдите сумму всех двузначных чисел, не кратных ни 2, ни 3.

**Г13.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые:

а) делятся на 7 и не делятся на 13;

б) которые не делятся ни на 7, ни на 13.

**Арифметические прогрессии**

**и треугольники**

**Задача 2.23.** Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду находится один шар, во втором – два, в третьем – три и т.д. (рис. 2.3).

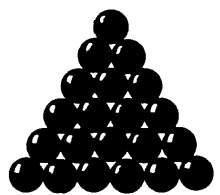
****

Рис. 2.3

а) Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 120?

б) Сколько потребуется шаров, чтобы составить треугольник из 30 рядов?

***Решение.*** Число шаров в каждом последующем ряду на 1 больше, чем в предыдущем. Поэтому получается арифметическая прогрессия: 1, 2, 3, …, *п*, … . Сумма *п* первых членов этой прогрессии . Теперь ответим на вопросы задачи.

а) Если всего шаров 120, то получаем уравнение:

 240 = *п + п*2 → *п*2 + *п* – 240 = 0,

, *п*1 = –16, *п* = 15.

Нам подходит положительный корень *п* = 15. Значит, шары расположены в 15 рядах.

б) Подсчитаем, сколько шаров потребуется для 30 рядов:

.

*Ответ*: а) в 15 рядов; б) 465 шаров.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б31.** Треугольные числа изображаются треугольниками, составленными из шаров (см. рис. 2.3). Определите:

а) сколько шаров в двадцать пятом треугольнике;

б) в каком по счёту треугольнике 55 шаров.

**В32.** Треугольники, соответствующие треугольным числам, составляют пирамиду (рис. 2.4).

а) Сколько шаров в основании пирамиды, если она состоит из восьми слоёв?

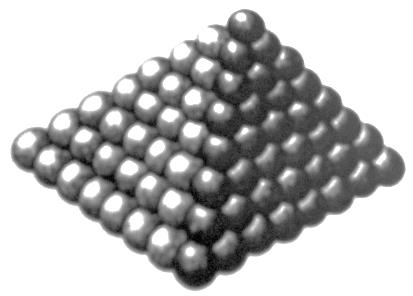
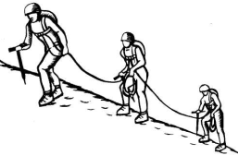


Рис. 2.4

б) Можно ли найти общее число шаров в пирамиде из восьми слоёв по формуле суммы первых *п* членов арифметической прогрессии? Сколько всего шаров в такой пирамиде?

**Г14.** Шары одинакового радиуса расположены один раз в форме правильного треугольника, а другой – в форме прямоугольника. Найдите количество шаров, если известно, что и на стороне треугольника, и на большей стороне прямоугольника располагается на два шара больше, чем на меньшей стороне прямоугольника.

**Текстовые задачи**

****

**Задача 2.24.** Альпинисты в первый день восхождения поднялись на высоту 1400 м, а затем каждый следующий день поднимались на 100 м меньше, чем в предыдущий. За сколько дней они покорили высоту 5000 м?

***Решение***. Запишем, на сколько метров поднимались альпинисты каждый день: 1400, 1300, 1200, …, . Мы видим арифметическую прогрессию, у которой *а*1 = 1400, разность *d* = 100. За *п*-1 день они поднимались на высоту *ап* = 1400 – 100(*п* –1). Значит, за *п* дней они поднимутся на высоту



= [1400 – 50(*n* – 1)] ⋅ *п* = 1450*п* – 50*п*2.

По условию задачи *Sn*= 5000, получаем уравнение

1450*п* – 50*п*2 = 5000 → *п*2 – 29*п* + 100 = 0 →

, *п*1 = –25, *п*2 = 4.

Нам подходит только положительное значение *п* = 4.

*Ответ*: за 4 дня.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б32.** В первом ряду лекционной аудитории 20 мест, а в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем. В аудитории 16 рядов. Сколько всего мест в аудитории?

**В33.** Сколько ударов сделают настенные часы, если они бьют только один раз в час, отбивая число часов?

**Г15.** Лекарственную настойку пьют каплями: в 1-й день 6 капель, в каждый следующий на 3 капли больше, чем в предыдущий. Начиная с 11-го дня дневную дозу ежедневно убавляют на 3 капли и заканчивают курс лечения на 19-й день после его начала. Определите, сколько капель лекарства: а) примет больной за первые 10 дней лечения; б) назначено всего на курс лечения.

**Ещё одна формула для вычисления**

**суммы арифметической прогрессии**

Если подставить в формулу (2.4) значение *an* = *a*1 + *d*(*n* – 1) из формулы (2.3), то получим



Итак, запомним:

 (2.5)

**Задача 2.25.** Задана арифметическая прогрессия (*ап*). Вычислите: а) *S*20, если *а*1 = 1, *d* = 1; б) *S*11, если *а*1 = –2, *d* = 4.

***Решение***. Воспользуемся формулой (2.5):

а) .

б) .

*Ответ*: а) 210; б) 198.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б33.** Вычислите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии (*bn*), если: а) *b*1 = –17, *d* = 6; б) *b*1 = 6,4, *d* = 0,8.

**В34.** Найдите сумму первых ста членов арифметической прогрессии (*ап*), если известно, что:

а) *а*1 = –12, *d* = 2; б) *а*1 = 1,5, *d* = 0,5;

в) *а*1 = 73, *d* = –1; г) *а*1 = –7,3, *d* = –1,1.

**В35.** Задана арифметическая прогрессия (*хп*). Вычислите:

а) *S*10, если *х*1 = 38, *d* = –4; б) *S*64, если *х*1 = –25, *d* = 3;

в) *S*15, если *х*1 = 1,2, *d* = 1,5.

**Г16.** Найти сумму  где *a*1, *a*2, *a*3, *a*4, …, *a*2*n*–1, *a*2*n* – последовательные члены арифметической прогрессии с разностью *d.*



**Задача 2.26.** Студент, устраиваясь на работу разносчиком газет, ознакомился с условиями оплаты: первый месяц он получит 300 руб., а в каждый последующий месяц он будет получать больше на 20 руб., чем в предыдущий. Сколько студент заработает за год?

***Решение***. Здесь получаем арифметическую прогрессию, в которой *а*1 = 300, *d* = 20. Находим сумму первых двенадцати её членов: .

Таким образом, студент заработает 4920 руб.

*Ответ*: 4920 руб.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б34.** Денис поступил на работу курьером. В первый месяц его зарплата составляла 200 руб., а в каждый последующий месяц она повышалась на 30 руб. Сколько всего он заработал за год?

**В36.** Игорь начал утренние тренировки в беге с 2 км в день. Каждую неделю он решил увеличивать эту дистанцию в арифметической прогрессии так, чтобы в одиннадцатую неделю пробегать 4 км в день. На какое расстояние ему надо увеличивать дистанцию еженедельно? Сколько всего километров он пробежит за 11 недель?

**Г17.** Для асфальтирования участка длиной 99 м используются два катка. Первый каток был установлен в одном конце участка, второй – в противоположном. Работать они начали одновременно. За первую минуту второй каток прошёл 1,5 м, а за каждую последующую – на 0,5 м больше, чем за предыдущую. Первый каток в каждую минуту проходил 5 м. Через сколько минут оба катка встретились?

**Задача 2.27.** Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,2; 7,4; … .

***Решение***. В данной арифметической прогрессии *а*1 = 8,2, разность *d* = 7,4 – 8,2 = –0,8.

Запишем формулу *п*-го члена прогрессии:

*ап* = *а*1 + *d*(*п* – 1) = 8,2 – 0,8(*п* – 1).

Выясним, при каких значениях *п* *ап* > 0. Для этого решим неравенство:

8,2 – 0,8(*п* – 1) > 0 → 8,2 > 0,8(*п* – 1) → 

*п* – 1 < 10,25 → *п* < 11,25.

Значит, если *п* ≤ 11, то *ап* > 0.

Нам остаётся только вычислить сумму первых 11 членов арифметической прогрессии, у которой *а*1 = 8,2 и *d* = –0,8:

.

*Ответ*: 46,2.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б35.** Найдите сумму всех тридцати членов арифметической прогрессии 4; 5,5; … .

**Б36.** Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии: а)  б) .

**В37.** Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 4,6; 4,2; … .

**В38.** Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии –102; –99; … .

**В39.** В арифметическойпрогрессии (*ап*) *а*1 = 5, *d* = 4.Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии с 20-го по 30-й включительно.

**Задача 2.28.** Арифметическая прогрессия (*ап*­) задана формулой *ап* = 10 – 4*п*.

а) Составьте формулу для вычисления суммы первых *п* членов этой прогрессии.

б) Пользуясь этой формулой, найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.

в) Определите, сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, сложили, если в сумме получилось –120.

***Решение***.

а) *ап* = 10 – 4*п* → *а*1 = 10 – 4⋅1 = 6, тогда по формуле (2.4)

.

б) *S*30 = (8 – 2⋅30)⋅30 = –1560.

в) *Sп* = (8 – 2*п*)*п* = –120. Решим это уравнение относительно *п* и получим: 8*п* – 2*п*2 = –120 → 2*п*2 – 8*п* –120 = 0 → *п*2 – 4*п* – 60 = 0 →

 *п*1 = –6, *п*2 = 10.

Так как *п*1 = –6 < 0, то этот корень нам не подходит, значит, *п* = 10. Проверим: *S*10 = (8 – 2⋅10)⋅10 = –120 – всё верно!

*Ответ*: а) *Sп* = (8 – 2*п*)*п*; б) *S*30 = –1560; в) *п* = 10.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б37.** Сумма членов конечной арифметической прогрессии. состоящей из тридцати членов, равна 3645. Первый член этой прогрессии равен 20. Найдите второй член прогрессии.

**В40.** Сколько натуральных чисел, кратных 5, надо сложить, чтобы получить сумму, большую 275; большую 330?

**В41.** Сложили несколько первых членов прогрессии (*ап*) и получили 430. Сколько членов сложили, если *а*1 = –7, *d* = 3?

**Задача 2.29.** *Задача из папируса Ахмеса*[[1]](#footnote-1). Разделите 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между количеством хлеба у каждого человека и ему предшествующего составляет 1/8 меры.

***Решение***. Доли каждого человека – это арифметическая прогрессия, в которой первый член *а*1 – это доля человека, получившего меньше всех. Разность прогрессии , число членов *п* = 10, тогда сумма всех членов равна

.

По условию задачи *S*10 = 10, тогда получаем уравнение



.

Находим остальные члены прогрессии:

|  |  |
| --- | --- |
| ;  ;  ;  ;  ; | ;  ;  ;  ;  . |

Это и есть доли каждого из 10 человек.

Проверим, равна ли сумма этих долей 10 меркам хлеба:



Всё верно.

*Ответ*: доли каждого человека

 .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б38.** В амфитеатре концертного зала 15 рядов, число кресел в каждом ряду увеличивается на 2 по сравнению с предыдущим. В последнем ряду 35 кресел. Сколько кресел в первом ряду? Сколько всего кресел в амфитеатре?

**В42.** Премиальный фонд 10000 руб. надо разделить между десятью сотрудниками так, чтобы каждый следующий получил на 150 руб. больше предыдущего. Как это сделать?

**Известны *аi* и *аj*, ищем сумму *Sn***

**Задача 2.30.** Числа –100 и –78 являются соответственно седьмым и девятым членами арифметической прогрессии. Найдите пятнадцатый член этой прогрессии и сумму её первых двадцати членов.

***Решение***. 



Подставим *d* = 11 в уравнение (1) и найдём *а*1:

*а*1 + 11⋅6 = –100 → *а*1 = –166.

Теперь найдём *а*15 и *S*20:

*а*15 = *а*1 + *d*(15 – 1) = –166 + 11⋅14 = – 12;

.

*Ответ*: *а*15 = –12, *S*20 = -1350.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В43.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*). Вычислите:

а) *S*10, если *а*2 = 1, *d* = –2; б) *S*5, если *а*8 = 4, *d* = –1;

в) *S*17, если *а*9 = 2; г) *S*19, если *а*10 = 4.

**В44.** Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (*сп*), если *с*7 = 18,5 и *с*17 = –26,5.

**В45.** Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, второй член которой равен 0,5, а четырнадцатый равен –33,5.

**В46.** В арифметической прогрессии *а*21 = 32. Найти *S*41.

**Известны *Sm* и *Sk*, ищем сумму *Sn***

**Задача 2.31.** В арифметической прогрессии сумма восьми первых членов равна 32, а сумма первых двадцати членов равна 200. Найдите сумму первых 28 членов прогрессии.

***Решение***. По условию задачи *S*8 = 32 и *S*20 = 200. Тогда





Подставим значение *d* = 1 в уравнение (1):

.

Теперь найдем сумму *S*28:

.

*Ответ*: *S*28 = 392.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В47.** Сумма 40 первых членов арифметической прогрессии равна 340, а сумма 39 первых членов равна 325. Найдите разность прогрессии.

**В48.** Найдите разность арифметической прогрессии (*хп*) и её первый член, если *х*10 = 1 и *S*16 = 4.

**Г18.** Сумма 15 первых членов арифметической прогрессии равна 20, а сумма её 20 первых членов равна 15. Найдите сумму 35 первых членов прогрессии.

**Д1.** В арифметической прогрессии *Sn = Sm* (*n* ≠ *m*). Докажите, что *Sn+m* = 0.

**✍ Домашнее задание**

**Задачи очень лёгкие**

**А13.** Выпишите первые пять членов арифметической прогрессии (*ап*), если:

a) *а*1 = 10, *d*= 4; б)*а*1 = 1,7, *d*= –0,2; в) *а*1 = –3,5, *d*= 0,6.

**А14.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии:

а) 3, –1, –5, –9, …; б) 7, 4, 1, –2, …;

в) 0,7; 0,9; 1,1; 1,3; …; г) –1; –0,9; –0,8; –0,7; … .

**А15.** Между числами 16 и 28 вставьте число таким образом, чтобы получившиеся три числа являлись последовательными членами арифметической прогрессии.

**А16.** Последовательность (*сп*) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) *с*5, если *с*1 = 20, *d* = 3; б) *с*21, если *с*1 = 5,8, *d* = –1,5.

**А17.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) *а*11, если *а*1 = –3, *d* = 0,7; б) *а*26, если *а*1 = 18, *d* = –0,6.

**А18.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Найдите *п*, если:

а)  *ап* = 67; б) *а*1 = 0, , *ап* = 5;

в) ; г) *а*1 = –4,5, , *ап* = 100.

**Задачи лёгкие**

**Б39.** Запишите конечную арифметическую прогрессию (*ап*), если:

а) *п* = 5; б) *а*1 = 13, , *п* = 4;

в) *а*1 = 7,5, *d* = 0,5, *п* = 4; г) *а*1 = –1,7, *d* = –0,15, *п* = 5.

**Б40.** Найдите пятый член арифметической прогрессии (*ап*): … .

**Б41.** Впишите все пропущенные члены арифметической прогрессии 60, …, 39, если известно, что её разность равна –3. Сколько членов прогрессии Вы вписали?

**Б42.** В арифметической прогрессии, разность которой равна 12, известен восьмой член: …, 54, … . Восстановите начало прогрессии. Начиная с какого номера члены этой прогрессии положительны? Сколько в ней отрицательных членов?

**Б43.** Дана последовательность (*ап*): 2, 7, 12, 22, 27, … .

а) Определите разность между каждым последующим членом и предыдущим;

б) Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

**Б44.** Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена: а) *а*­­*п* = 3*п* – 7; б) *а*­­*п* = –3*п* + 5; в) *а*­­*п* = 2*п* + 8; г) *а*­­*п* = –2*п* – 3, является арифметической прогрессией.

**Б45.** Пусть последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Докажите, что если к каждому члену этой прогрессии прибавить одно и то же число, то полученная последовательность также будет арифметической прогрессией. Конкретизируйте это примером.

**Б46.** Докажите, что если каждый член некоторой арифметической прогрессии (*ап*) умножить на одно и то же число, то полученная последовательность также будет арифметической прогрессией. Конкретизируйте это примером.

**Б47.** Найдите восьмой член и разность арифметической прогрессии (*ап*), если:

a) *а*2 = 8, *а*7 = –2; б) *а*7 = 4, *а*9 = –4;

в) *а*7 = –7, *а*9 = –1; г) *а*9 = –0,9, *а*7 = –0,7.

**Б48.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите:

а) *а*6, если *а*1 = 4, *d* = 3; б) *а*15, если *а*1 = –15, *d* = –5;

в) *а*17, если *а*1 = –12, *d* = 2; г) *а*9, если *а*1 = 101, *d* = ½ .

**Б49.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*). Запишите формулу её *п*-го члена: а) –14, –9, –4, …; б) 12, 6, 0, … .

**Б50.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *а*1, если:

а) *d* = 2, *п* = 15, *ап* = –10; б) *d* = ¼, *п* = 7, *ап* = –10½;

в) *d* = –0,6, *п* = 17, *ап* = 9,5; г)  *d* = –0,3, *п* = 15, *ап* = –2,94.

**Б51.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *d*, если:

а) *а*1 = 3, *ап* = 39, *п* = 11; б) *а*1 = –0,2, *ап* = –18,4, *п* = 15;

в) *а*1 =  *ап* =  *п* = 36; г) *а*1 = 3,6, *ап* = 0, *п* = 37.

**Б52.** Определите, является ли членом арифметической прогрессии 20,7; 18,3; … число: а) –1,3; б) –3,3.

**Б53.** Проверьте:

а) является ли число 41 членом арифметической прогрессии (*ап*), у которой *а*1 = –7, *d* = 4;

б) является ли число –33 членом арифметической прогрессии (*ап*), у которой *а*1 = 3, *d* = –6.

**Б54.** Найдите номер члена арифметической прогрессии (*ап*):

а) равного –2,94, если *а*1 = 1,26 и *d* = –0,3;

б) равного –9,7, если *а*1 = –3,7 и *d* = –0,6.

**Б55.** Дана арифметическая прогрессия (*bп*), у которой  и . Является ли членом арифметической прогрессии число: а)  б) 8,35?

**Б56.** Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии (*ап*), в которой *а*1 = 10, *d* = –0,2. Проверьте свой ответ.

**Б57.** Найдите разность арифметической прогрессии (*ап*), если:

а) *а*1 = 12, *а*5 = 40; б) *а*6 = –30, *а*16 = 30;

в) *а*1 = –8, *а*11 = –28; г) *а*11 = 4,6, *а*36 = 54,6.

**Б58.** Дана арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите:

а) *а*2 и *d*, если *а*1 = 5, *а*3 = 13; б) *а*1 и *d*, если *а*2 = 3, *а*10 = 19;

в) *а*2 и *d*, если *а*12 = –2, *а*3 = 7; г) *а*101, если *а*12 = 20,5, *а*7 = 10,5.

**Б59.** Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии *а*1, *а*2, …, *ап*, …, если:

а) *а*1 = 5, *а*2 = –5; б) *а*1 = –3, *а*2 = 0;

в) *а*1 = 6, *а*10 = 33; г) *а*4 = –4, *а*17 = –17.

**Б60.** Поезд, отойдя от станции, равномерно увеличивал скорость на 50 м в минуту. Какова была скорость поезда в конце двадцатой минуты?

**Б61.** Найдите сумму первых пятидесяти членов арифметической прогрессии (*ап*), если известно, что:

а) *а*1 = 2, *а*50 = 147; б) *а*1 = 0,5, *а*50 = –97,5;

в) *а*1 = –10, *а*50 = 137; г) *а*1 = –1,7, *а*50 = –8,1.

**Б62.** Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (*ап*), заданной формулой *п*-го члена:

а) *ап* = 4*п* + 3; б) *ап* = 0,5*п* – 3;

в) *ап* = –2*п* + 8; г) *ап* = –2,5*п* – 6.

**Б63.** Найдите сумму:

а) 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100;

б) 30 + 31 + 32 + … + 38 + 39 + 40;

в) 11 + 12 + 13 + … + 87 + 88 + 89.

**Б64.** Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

**Б65.** Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 250.

**Б66.** Найдите сумму всех натуральных чисел:

а) чётных, не превосходящих 200;

б) нечётных, не превосходящих 150;

а) кратных 3, заключённых в промежутке от 100 до 200.

**Б67.** Найдите сумму первых *п* членов арифметической прогрессии (*ап*), если известно, что:

а) *а*1 = –3, *d* = 1,5, *п* = 16; б) *а*1 = 121, *d* = –3,1, *п* = 25;

в) *а*1 = –2,5, *d* = –0,5, *п* = 40; г) *а*1 = 4,5, *d* = 0,4, *п* = 100.

**Б68.** Найдите сумму восьми первых членов арифметической прогрессии: а) –23, –20, …; б) 14,2; 9,6; … .

**Задачи средней трудности**

**В49.** Известно, что (*ап*) – арифметическая прогрессия. Выразите:

а) *а*2 и *а*10­ через *а*3 и *d*; б) *а*7 и *а*12­ через *а*10 и *d*;

в) *ап*+2 и *ап*–3­ через *ап* и *d*.

**В50.** Определите, является ли арифметической прогрессией последовательность, заданная формулой:

а) *а*­­*п* = 3*п* + 1; б) *а*­­*п* = *п*2 – 5; в) *а*­­*п* = *п* + 3;

г) *а*­­*п* = ; д) *а*­­*п* = –0,5*п* + 1; е) *а*­­*п* = 6*п*.

**В51.** Возрастающая последовательность состоит из всех натуральных степеней числа 3. Выясните, является ли она арифметической прогрессией. Если да, то укажите первый член и разность прогрессии.

**В52.** Возрастающая последовательность состоит из всех натуральных чисел, кратных 11. Докажите, что она является арифметической прогрессией. Укажите первый член и разность прогрессии.

**В53.** Последовательность (*ап*) – арифметическая прогрессия. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) *а*2, *а*4, …, *а*2*п*, …; б) *а*1 – 1, *а*2 – 1, …, *ап* – 1;

в) 2*а*­1, 2*а*2, …, 2*ап*; г) ­…?

**В54.** Между числами 2,5 и 4 вставьте два таких числа, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.

**В55.** Между числами 5 и 1 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

**В56.** Между числами 1 и 6 найдите пять таких чисел, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.

**В57.** Сумма цифр четырёхзначного числа равна 16. Найдите это число, если известно, что его цифры образуют арифметическую прогрессию и цифра единиц на 4 больше цифры сотен.

**В58.** Три числа в заданном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите среднее число, если известно, что утроенная сумма крайних чисел равна 234.

**В59.** Найдите те значения *х*, при которых числа *х*, 2*х* – 1, 5*х* являются последовательными членами арифметической прогрессии.

**В60.** Последовательность (*bп*) – арифметическая прогрессия, первый член которой равен *b*1, а разность равна *d*. Выразите через *b*1 и *d*: а) *b*7; б) *b*26; в) *b*231; г) *bk*; д) *bk*+5; е) *b*2*k*.

**В61.** Дана конечная арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *ап*, если:

а) *а*1 =, *d* = , *п* = 7;

б) *а*1 = 3, *d* = , *п* = 15;

в) *а*1 =, *d* = , *п* = 13;

г) *а*1 =, *d* = , *п* = 9.

**В62.** Найдите десятый и *п*-й члены арифметической прогрессии:

а) , –1, …; б) 2,3; 1; … .

**В63.** Составьте формулу *п*-го члена арифметической прогрессии:

а) 4, –2, –8, –14, –20, …; б) –0,7; –0,5; –0,3; –0,1; 0,1; …;

в) –7, –2, 3, 8, 13, …; г) … .

**В64.** Дана конечная арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *а*1, если:

а) *d* = , *п* = 24, *ап* = ;

б) *d* = 1 + *q*, *п* = 28, *ап* = 28 + 27*q*;

в) *d* = , *п* = 21, *ап* = ;

г)  *d* = 1 – 3*l*, *п* = 22, *ап* = *l*.

**В65.** Дана конечная арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *d*, если:

а) *а*1 = , *ап* = – , *п* = 18;

б) *а*1 = 3 – 7*т*, *ап* = *т* – 5, *п* = 9;

в) *а*1 =  *ап* = 0, *п* = 6;

г) *а*1 = 13 – 8*р*, *ап* = 2*р* + 3, *п* = 11.

**В66.** По формуле *п*-го члена арифметической прогрессии (*ап*) найдите *а*1 и *d*:

а) ; б) :

в) ; г) 

**В67.** Является ли членом арифметической прогрессии (*ап*) число *b*? Если является, то укажите номер этого члена.

а) *а*1 = 5, *d* = 0,3, *b* = 21,2; б) *а*1 = 3, *d* = –0,35, *b* = 0,65;

в) *а*1 = –7, *d* = 5,1, *b* = 44; г) *а*1 = –0,13, *d* = 0,02, *b* = –0,01.

**В68.** Дана конечная арифметическая прогрессия (*ап*). Найдите *п*, если:

а) *а*1 = , *d* = , *ап* = ;

б) *а*1 = , *d* = , *ап* = ;

а) *а*1 = , *d* = , *ап* = ;

а) *а*1 = , *d* = , *ап* = 1.

**В69.** Является ли членом арифметической прогрессии (*ап*) число *b*? Если является, то укажите номер этого члена.

а) *ап* = 13 – 0,4*п*, *b* = 4,6; б) *ап* = 3*п* – 5,7, *b* = 69,4;

в) *ап* = 5*п* – 104, *b* = 21; г) *ап* = 21,3 – 1,7*п*, *b* = 4,3.

**В70.** В арифметической прогрессии (*уп*) известны пятый и шестой члены: *у*5 = –150 и *у*6 = –147. Сколько членов этой прогрессии отрицательны? Проверьте свой ответ.

**В71.** Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (*ап*) будут больше заданного числа *А*:

а) *а*1 = –12, *d* = 3, *А* = 141; б) *а*1 = 4, *d* = 2,2, *А* = 14,7;

в) *а*1 = –4,5, *d* = 5,5, *А* = 0; г) *а*1 = 14,5, *d* = 0,7, *А* = 22,9.

**В72.** Арифметическая прогрессия задана формулой *ап* = 6*п* – 306. Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены прогрессии:

а) больше –12;

б) являются положительными;

в) принадлежат лучу [300; +∞);

г) принадлежат открытому лучу (–6; +∞).

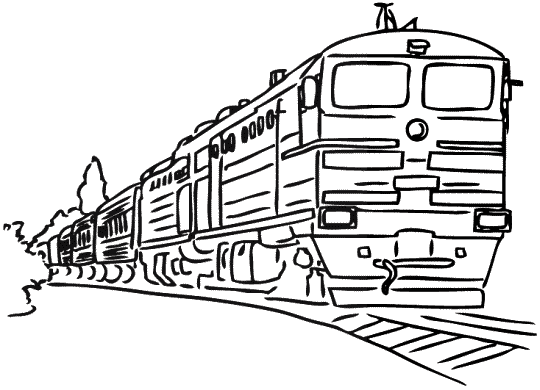
**В73.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (*сп*), если: а) *с*5 = 27, *с*27 = 60; б) *с*20 = 0, *с*66 = –92.

**В74.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (*хп*), если *х*16 = –7 и *х*26 = 55.

**В75.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (*ап*), если *а*15 = 5 и *а*20 = 40.

**В76.** *Определите, является ли последовательность, описанная в задаче, арифметической прогрессией. Если да, то укажите её разность.*

а) Квартплата за июнь составила 1200 руб. Её надо внести не позднее 10 июля, а начиная с 11 июля за каждый просроченный день дополнительно взимается 1 % от квартплаты. Какой будет сумма оплаты в каждый из дней с 10 по 15 июля?

б) В начале учебного года ученику 9 класса купили 300 тетрадей. Он тратит 6 тетрадей в неделю. Сколько тетрадей будет оставаться у него в конце каждой из первых шести недель учебного года? 

в) Население города в 1965 г. составило 25000 человек. Оно ежегодно увеличивалось в 1,2 раза. Каким было население города в каждый год за период с 1995 по 1999 г.?

г) В понедельник Андрей заполнил бак автомобиля, залив в него 40 л бензина. Во вторник он истратил 4 л, а в каждый следующий день тратил на 2 л бензина больше, чем в предыдущий. Сколько литров бензина оставалось в баке в каждый из дней недели с понедельника по пятницу, если он не делал дополнительной заправки?

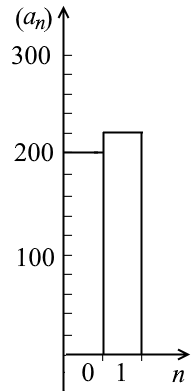


Рис. 2.5

**В77.** В школе-новостройке учатся 200 учеников. Каждый год число учащихся увеличивается на 20.

а) Запишите формулу для вычисления числа учащихся в школе через *п* лет.

б) Сколько учащихся будет в школе через 5 лет, если тенденция сохранится?

в) Школа рассчитана на обучение 350 учащихся. Через сколько лет будет достигнута норма?

г) Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую прирост учащихся в течение пяти лет (рис. 2.5).

**В78.** На стороне *ОА* угла *АОВ* от его вершины отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые (рис. 2.6). Длина отрезка *А*1*В*1 равна 1,5 м. Найдите длину отрезка *А*5*В*5, *А*10*В*10.

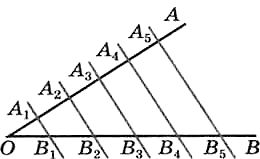


Рис. 2.6

**В79.** Найдите сумму первых сорока членов последовательности (*ап*), заданной формулой *ап =* 5*п* – 4.

**В80.** Запишите формулу суммы *п* первых членов последовательности (*ап*), если: а) *ап* = 2*п* + 1; б) *ап* = 3 – *п*.

**В81.** Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел от 45 до 90;

б) всех целых чисел от –100 до –65;

а) всех двузначных чисел;

а) всех трёхзначных чисел.

**В82.** Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены арифметической прогрессии:

а) 2 + 6 + 10 + … + 198; б) 95 + 85 + 75 + … + (–155).

**В83.** Найдите сумму всех натуральных трехзначных чисел, не делящихся на 3.

**В84.** Найдите сумму всех двузначных чисел:

а) кратных 7;

б) которые при делении на 5 дают в остатке 2.

**В85.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел:

а) кратных 8;

б) которые при делении на 12 дают в остатке 5.

**В86.** Фигура, изображённая на рис. 2.7, состоит из столбцов, каждый из которых на 2 единицы длиннее предыдущего. Основание столбца равно 1. Определите:

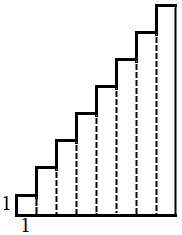


Рис. 2.7

а) площадь фигуры (в кв. ед.), если в ней: 8 столбцов; 100 столбцов; *п* столбцов;

б) сколько столбцов в фигуре, если её площадь равна 100 кв. ед.

**В87.** Вычислите сумму:

а) 502 – 492 + 482 – 472 + … + 42 – 32 + 22 – 12;

б) 12 – 22 + 32 – 42 + … + 972 – 982 + 992 – 1002.

**В88.** Для арифметической прогрессии (*ап*) заполните таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *а*1 | *d* | *ап* | *п* | *Sп* |
| а) | 7 | 4 |  | 13 |  |
| б) | 2 | 2 | 80 |  |  |
| в) | 56 |  | 26 | 11 |  |
| г) | 2 |  | 87 |  | 801 |
| д) |  |  | 21 | 7 | 105 |

**В89.** При свободном падении тело проходит в первую секунду 4.9 м, а в каждую последующую на 9,8 м больше.

1. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло её дна через 5 с после начала падения.

2. Определите, какое расстояние пройдёт свободно падающее тело: а) за седьмую секунду после начала падения; б) за 7 с после начала падения.

**В90.** В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, а за каждый последующий – на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

**В91.** Члены арифметической прогрессии 2, 5, … с чётными номерами заменили противоположными им числами. В результате получили последовательность (*хп*). Напишите формулу *п*-го члена этой последовательности и найдите сумму первых пятидесяти её членов.

**В92.** Упростите выражение:

а) ; б) .

**В93.** Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по тридцатый включительно, если первый член равен 10 и разность равна 3.

**В94.** Найдите сумму членов арифметической прогрессии с шестого по двадцать пятый включительно, если первый член равен 21 и разность равна –0,5.

**В95.** В арифметической прогрессии (*ап*):

а) *d* = –0,4, *п* = 12, *а* = 2,4, найдите *а*1 и *Sп*;

б) *а*1 = –35, *d* = 5, *Sn* = 250, найдите *п* и *ап*;

в) , *ап* = 50, *Sn* = 2525, найдите *а*1 и *п*;

г) , , *sn* = –450, найдите *d* и *п*.

**В96.** Продолжительность прогулки грудного ребёнка в первый день составляет 20 мин. Затем она увеличивается ежедневно на 10 мин и доводится до 2 ч в день. На какой по счёту день длительность прогулки достигает 2 ч и сколько всего времени за эти дни проведёт ребёнок на воздухе?

**В97.** Улитка ползёт вверх по дереву, начиная от его основания. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту – на 5 см больше, чем за предыдущую. За какое время улитка достигнет вершины дерева высотой 5,25 м?

**В98.** Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (*ап*), если *а*4 = 10, *а*10 = 19.

**В99.** Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (*bп*), если *b*1 = 4,2, *b*10 = 15,9.

**В100.** В арифметической прогрессии (*bп*) *b*6 = 20, *b*10 = 18. Найдите *S*20.

**В101.** В арифметической прогрессии (*ап*) *а*5 = 11, *а*8 = 17. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

**В102.** В арифметической прогрессии (*ап*) *а*22 = 20. Найдите *S*41.

**В103.** Тринадцатый член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых 25 её членов.

**В104.** В арифметической прогрессии (*bп*) *S*30 = 147, *S*60 = 474. Найдите *S*20.

**В105.** Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии, если *S*10 = 100, *S*30 = 900.

**В106.** Найдите пятидесятый член арифметической прогрессии, если: а) *S*20 = 1000, *S*40 = 10000; б) *S*5 = 0,5, *S*15 = –81.

**Задачи трудные**

**Г19.** Между числами –19,88 и 19,91 вставлено *п* чисел так, что они вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию. При каком значении *п* разность этой прогрессии принадлежит области определения функции ?

**Г20.** Известно, что четыре положительных чётных числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 100. Найдите эти числа. Сколько решений имеет задача?

**Г21.** Пусть *а*1, *а*2, … – арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите, что сумма *п* первых членов последовательности (*хп*), где  равна .

**Г22.** В арифметической прогрессии *а*1, *а*2, *а*3, *а*4, состоящей из целых чисел, больший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите члены этой прогрессии.

**Г23.** Сумма трех чисел равна , а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

**Г24.** Найдите те значения *х*, при которых данные числа в указанном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию:

а) *х* – 4, , *х* – 6; б) 4*х* + 6, , –*х* – 1.

**Г25.** Числа *а*, *b*, *с* и числа  являются последовательными членами арифметических прогрессий. Докажите, что *а = b = с.*

**Г26.** Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (*ап*) будут меньше заданного числа *А*:

а) *ап* = 12 – 3*п*, *А* = –41; б) *ап* = , *А* = –7;

в) *ап* = 117 – 5,5*п*, *А* = 10; г) *ап* = , *А* = –1.

**Г27.** При делении девятого члена арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2, а в остатке 5. Найдите первый член и разность прогрессии.

**Г28.** Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 18, в произведение второго и третьего её членов равно 21. Запишите первые пять членов этой прогрессии, если известно. что третий член – положительное число.

**Г29.** В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с чётными номерами равна 25, а сумма членов с нечётными номерами равна 10. Найдите седьмой член прогрессии.

**Г30**. Известно, что в некоторую арифметическую прогрессию входят члены *а*2*п* и *а*2*т* такие, что . Имеется ли член этой прогрессии, равный нулю?

**Г31.** Докажите, что если положительные числа *a*, *b*, *c* образуют арифметическую прогрессию, то числа



также образуют арифметическую прогрессию.

**Г32.** Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. а) Найдите эти числа и докажите, что других нет. б) Тот же вопрос про 100 чисел, дающих в сумме 5051.

**Г33.** а) Выразите сумму (2*п* –1) членов арифметической прогрессии (*ап*) через *п* и *ап*.

**Г34.** Определите сумму натуральных чисел:

а) меньших 100 и не кратных 3;

б) больших 50, но меньших 150 и не кратных 5.

**Г35.** Круги укладывают в форме шестиугольника так, как показано на рис. 2.8. В центре расположен 1 круг и вокруг него уложено 6 кругов, образующих первый пояс. Рассмотрите рисунок и определите закономерность, по которой увеличивается число кругов в каждом следующем поясе. Вычислите:

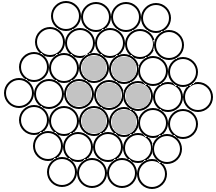


Рис. 2.8

а) сколько всего кругов в шестиугольнике, содержащем 3 пояса, 10 поясов;

б) сколько поясов содержится в шестиугольнике, если в нём 127 кругов.

**Г36.** Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии в 5 раз меньше суммы следующих восьми членов. Найдите отношение суммы следующих восьми членов прогрессии к сумме её первых четырёх членов.

**Г37.** Сколько членов арифметической прогрессии надо взять, чтобы сумма равнялась 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго члена равна 20.

**Г38.** Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством. При любом *n* сумма первых *n* членов равна 5*n*2 . Найти разность прогрессии и три первых члена.

**Г39.** Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

**Г40.** Вычислите: (1 + 32 + 52 +…+ (2*n* – 1)2 +…+ 1992) – (22 + + 42 + 62 +…+ (2*n*)2 +…+ 2002).

**Г41.** Группа туристов вышла из города *А* в направлении города *В*, удалённого от города *А* на *а* км. В первый день группа прошла 40 км, а в каждый следующий день она проходила на 1 км больше, чем в предыдущий. Через *t* дней из города *В* в том же направлении вышла вторая группа, которая прошла в первый день 30 км, а в каждый следующий день проходила на 2 км больше, чем в предыдущий. Через сколько дней после своего выхода первая группа догонит вторую, если: а) *а* = 100, *t* = 1; б) *а* = 114, *t* = 2; в) *а* = 91, *t* = 1; г) *а* = 131, *t* = 2.

**Г42.** Сколько членов арифметической прогрессии надо взять, чтобы их сумма равнялась –122,5, если первый член прогрессии – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству 2*х*2 + 21*х* – – 50 < 0, а разность прогрессии – большее из чисел 0,5 и ?

**Г43.** Найдите сумму пятидесяти пяти первых членов арифметической прогрессии, последний член которой равен 5,8, а сумма двух последних равна 11,5.

**Г44.** В арифметической прогрессии сумма четвёртого, восьмого, девятнадцатого и двадцать третьего членов равна 30. Найдите сумму первых 26 членов прогрессии.

**Г45.** Сумма всех членов арифметической прогрессии равна 28, третий член равен 8, а четвёртый равен 5. Найдите число членов прогрессии и её крайние члены.

**Г46.** Сумма первых семнадцати членов арифметической прогрессии равна 85, Сумма первых её двадцати одного члена равна 189. Сколько положительных трёхзначных чисел содержится в этой прогрессии?

**Г47.** Сумма первых *п* членов некоторой последовательности определяется по формуле: а) ; б) . Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

**Задачи очень трудные**

**Д2.** Три простых числа *a*, *b*, *с*, бóльшие 3, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что разность этой прогрессии делится на 6.

**Д3.** Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел. Найти эти числа.

**Д4.** Найдите арифметическую прогрессию, в которой среднее арифметическое *п* первых её членов равно 2*п*.

**Д5.** В арифметической прогрессии 3, 6, 9, … содержатся 463 члена, в арифметической прогрессии 2, 6, 10, … содержится 351 член. Сколько одинаковых членов содержится в этих прогрессиях?

**Д6.** При каком значении разности арифметической прогрессии, седьмой член которой равен 3, произведение четвёртого и девятого членов будет наибольшим?

**Д7.** В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвёртого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

**Д8.** Найти общий член последовательности 2, 4, 7, 11…, обладающей тем свойством, что разность между соседними членами составляет арифметическую прогрессию. Найти общий член этой последовательности.

**Д9.** Васе на 23 февраля подарили 777 конфет. Вася хочет съесть все конфеты за *n* дней, причем так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа *n* это возможно?

**Д10.** В арифметической прогрессии , , *т* ≠ *п*, найдите сумму ее *тп* первых членов.

**Д11.** Некоторые члены арифметических прогрессий 17, 21, 25, 29,… и 16, 21, 26, 31… одинаковы. Найдите сумму первых ста одинаковых членов.

**Д12.** В арифметической прогрессии отношение суммы первых семи членов к сумме последних семи членов равно –0,2, а отношение суммы всех членов без первых двух к сумме всех членов без последних двух равно 3. Найдите число членов арифметической прогрессии.

**Д13.** Сумма членов арифметической прогрессии и её первый член положительны. Если увеличить разность этой прогрессии на 4, не меняя первого члена, то сумма её членов увеличится в 3 раза. Если первый член исходной прогрессии увеличить в 5 раз, не меняя её разности, то сумма членов увеличится также в 3 раза. Найдите разность исходной прогрессии.

**Д14.** Даны две арифметические прогрессии. В первой из них сумма второго и пятого членов на 15 меньше суммы третьего и седьмого членов, а сумма первых тридцати членов равна 2385. Во второй прогрессии первый член равен 2, а разность равна 3. Найдите сумму первых сорока чисел, встречающихся в обеих прогрессиях.

**Д15.** В арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, сумма первых 3*п* членов равна сумме следующих *п* членов. Найдите отношение суммы первых 2*п* членов к сумме следующих 2*п* членов.



1. **Ахмес** – eгипетский жрец и писарь (XVIII–XVII до н.э.), возможно первый [математик](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0), имя которого известно. **Математический папирус Ахмеса** – древнеегипетское учебное руководство по [арифметике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) и [геометрии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F). [↑](#footnote-ref-1)