**Заочный физико-математический лицей**

**«Авангард»**

Е. Н. Филатов

# алгебра

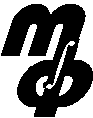
**10**

##### **Экспериментальный учебник**

**Часть 2**

###### 

###### **МОСКВА – 2019**



Заочный физико-математический лицей

«Авангард»

Е. Н. Филатов

# алгебра

10

##### Экспериментальный учебник

Часть 2

###### МОСКВА – 2019

Филатов Е. Н. Математика-10. Часть 2. Экспериментальный учебник. – М.: ЗФМЛ «Авангард», 2019. – с.

Учебник предназначен для углубленного изучения математики в 10-м классе. Главная цель учебника – научить учеников самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» – краткие рекомендации к их решению и ответы.

© *Е.Н. Филатов, 2019*

© *Заочный физико-математический лицей «Авангард», 2019*

Макет подготовлен *Е.Н. Кочубей*

Подписано в печать 1.02.2019. Формат 60×84/16.

Объем 23,0 п.л. Печать офсетная. Тираж экз. Заказ .

Автономная некоммерческая организация

"Заочный физико-математический лицей "Авангард"  
(АНО ЗФМЛ "Авангард"). 115446, Москва, Коломенский проезд, 16

**СОДЕРЖАНИЕ**

**УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ**

§ 9. Дробные уравнения 6

§ 10. Уравнения со знаком модуля 24

§ 11. Уравнения высших степеней 41

§ 12. Системы линейных уравнений 64

§ 13. Системы нелинейных уравнений 80

§ 14. Степень с рациональным показателем 115

§ 15. Иррациональные уравнения 139

**НЕРАВЕНСТВА**

§ 16. Метод интервалов 165

§ 17. Системы линейных неравенств 193

§ 18. Системы рациональных неравенств 220

§ 19. Неравенства, содержащие знак модуля 235

§ 20. Задачи на составление неравенств 252

§ 21. Квадратный трёхчлен и неравенства 262

§ 22. Неравенства на плоскости 283

ПОДСКАЗКИ 300

ОТВЕТЫ 336



**УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ**

**§ 9. Дробные уравнения**

К дробным уравнениям относятся уравнения, в которых неизвестная величина содержится в числителе или знаменателе дроби. Например:

, ,  и т.д.

**В знаменателях – только числа**

**Задача 9.1.** Решите уравнение .

***Решение***. Попробуем «одним махом» избавиться от знаменателей. Для этого просто умножим обе части данного уравнения на *произведение знаменателей*, т. е. на 2⋅3 = 6, получим:

→

2(*х*2 + *х*) – 3(*х* – 2) = 12 → 2*х*2 – *х* – 6 = 0.

*D* = 12 + 4⋅2⋅6 = 25, ,

, , .

*Ответ*: *х* = –1, *х* = 1,5 или *х* ∈ {1; 1,5}.

(В дальнейшем мы будем использовать обе формы записи корней уравнения.)

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б1.** Решите уравнение .

**В1.** Решите уравнение .

**В2.** Решите уравнение .

**Г1.** Алгебраическое выражение  принимает значение  при *b* = –0,5 и при некотором значении *а*. Чему равно значение того же выражения при том же значении *а* и при ?

**Уравнение типа «дробь равна нулю»**

**Задача 9.2.** Решите уравнение .

***Решение***. Дробь равна нулю в том и только в том случае, когда числитель равен 0, а знаменатель отличен от нуля. Приравнивая числитель дроби к 0, получим уравнение: *х*2 – 2*х* – 15 = 0. Найдём его корни: , *х*1 = –3, *х*2 = 5.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Автор*: Итак, числитель равен нулю, если *х* = –3 или *х* = 5. А при каких *х* равен нулю знаменатель? | |  |
|  | *Читатель*: Для этого надо решить уравнение: 3*х* + 9  = 0 → 3*х* = –9 → *х* = –3.  *Автор*: Верно! Значит, при *х* = –3 и числитель, и знаменатель равны нулю, а наше уравнение принимает вид = 0. Можно |

ли утверждать, что *х* = –3 – корень нашего уравнения?

*Читатель*: Нет! Ведь выражение , как мы знаем, не имеет смысла!

*Автор*: Правильно. Следовательно, наше уравнение имеет единственный корень *х* = 5. При желании это можно проверить:

.

*Ответ*: *х* = 5.

Заметим, что значение *х* = –3 в этом уравнении ещё называют *посторонним* корнем.

*Читатель*: А почему посторонним?

*Автор*: Потому что *х* = –3 – это корень уравнения *х*2 – 2*х* – 15 =

= 0, т.е. это корень, но не исходного уравнения. Получается, что этот корень как бы пришёл к нам со стороны, поэтому его и назвали посторонним.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б2.** Решите уравнение:

а); б); в); г).

**В3.** Найдите корни уравнения:

а) ; б) ;

в) ; г) .

**Дробь равна дроби, а их знаменатели равны**

**Задача 9.3.** Решите уравнение .

***Решение***. Сначала заметим, что знаменатель дроби не может быть равен нулю: *х* + 2 ≠ 0 → *х* ≠ –2, т.е. *х* может принимать любое значение, кроме *х* = –2. Это можно записать так: *х* ∈ (–∞, –2)∪(–2, +∞). Данный числовой промежуток назовём *областью допустимых значений* (ОДЗ) неизвестной величины.

Заметим также, что у наших дробей одинаковые знаменатели. А две дроби, у которых знаменатели равны, будут равны только в том случае, если равны их числители: *х*2 = 4 → *х*1 = 2, *х*2 = –2. Корень *х* = 2 нам подходит, а *х* = –2 – нет, так как он не входит в нашу ОДЗ (потому что при *х* = –2 знаменатели дробей обращаются в нуль).

*Читатель*: Получается, *х* = –2 – посторонний корень?

*Автор*: Совершенно верно. А наше уравнение имеет только один корень *х* = 2.

*Ответ*: *х* = 2.

СТОП! Решите самостоятельно.

Решите уравнение:

**Б3.** а); б) ; в) .

**В4.** а); б) ;

в) ; г) .

**Используем свойство пропорций**

**Задача 9.4.** Решите уравнение .

***Решение***. Это уравнение можно решить, используя основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних членов. Отсюда

*х*(5*х* + 1) = (*х* + 2)(*х* + 1).

5*х*2 + *х* = *х*2 + 3*х* + 2,

4*х*2 – 2*х* – 2 = 0,

2*х*2 – *х* – 1 = 0,

*х*1 = , *х*2 = 1.

*Читатель*: А нет ли среди найденных корней посторонних?

*Автор*: Давайте определим ОДЗ: *х* + 2 ≠ 0 → *х* ≠ –2 и 5*х* + 1 ≠ 0 →. Как видите, ОДЗ такова, что «не запрещаются» значения *х*1 = , *х*2 = 1.

*Ответ*: *х*1 = , *х*2 = 1 или .

СТОП! Решите самостоятельно.

Решите уравнение:

**Б4.** а); б) ; в) ;

г) ; д) .

**В5.** а); б) ;

в) ; г) .

**Уравнения, которые легко приводят к виду**

**(дробь 1) = (дробь 2)**

**Задача 9.5.** Решите уравнение .

***Решение.*** ОДЗ: *z* ≠ 0. .

Используем свойство пропорции:

(6 + *z*) *z* = 1⋅5 → *z*2 + 6*z* – 5=0, .

Видим, что *z* ≠ 0, значит, , – корни нашего уравнения.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б5.** Решите уравнение:

а); б) ; в) .

**В6.** Решите уравнение: а); б) .

**Уравнения вида (дробь 1) ± (дробь 2) = (число)**

**Задача 9.6.** Решите уравнение .

***Решение***. Заметим, что 9*х* + 3 = 3(3*х* + 1). Значит, для того, чтобы привести дроби к общему знаменателю, достаточно умножить числитель и знаменатель первой дроби на 3:

.

Теперь определим ОДЗ: 3*х* + 1 ≠ 0 →. Дальше воспользуемся свойством пропорции:

(15*х* –1)⋅6 = 7⋅3(3*х* + 1) → 90*х* – 6 = 63*х* + 21 →

27*х* = 27 → *х* = 1.

Нетрудно видеть, что этот корень входит в ОДЗ, так как .

*Ответ*: *х* = 1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б6.** Решите уравнение:

а); б) ;

в) ; г) .

**Задача 9.7.** Решите уравнение .

***Решение***. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним сложение:





.

Далее воспользуемся свойством пропорции:

1⋅(12*а*2 + 70*а* – 32) = 2⋅(6*а*2 + 13*а* – 5) →

12*а*2 + 70*а* – 32 = 12*а*2 + 26*а* – 10 → 44*а* = 22 → .

Найдём ОДЗ: , .

Видим, что  – это «разрешённое» значение корня, т.е. он не является посторонним.

*Ответ*:  или .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В7.** Решите уравнение: а);

б); в); г) 

**Уравнения вида** 

**Задача 9.8.** Решите уравнение .

***Решение***. Сначала найдём ОДЗ:

*х* – 4 ≠ 0 → *х* ≠ 4, *х* – 3 ≠ 0 → *х* ≠ 3.

Теперь избавимся от дробей, умножив обе части уравнения на произведение (*х* – 4)(*х* – 3), получим:



(*х* – 3)⋅*х* – (*х* – 4)⋅2*х* = 6 → *х*2 – 3*х* – 2*х*2 + 8*х* = 6 →

–*х*2 + 5*х* – 6 = 0 → *х*2 – 5*х* + 6 = 0,

*D* = 52 – 4⋅6 = 1, , *х*1 = 2, *х*2 = 3.

Как видим, *х* = 3 – посторонний корень, так как это значение не входит в ОДЗ. Значит, корень единственный *х* = 2.

*Ответ*: *х* ∈ {2}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В8.** Решите уравнение: а);

б); в).

**Используем формулу сокращённого умножения**

***а*2 – *b*2 = (*a – b*)(*a + b*)**

**Задача 9.9.** Решите уравнение: .

***Решение***. Сначала разложим на множители каждый знаменатель: 6*х* + 30 = 6⋅(*х* + 5); 4*х* – 20 = 4⋅(*х* – 5); 2*х*2 – 50 = 2(*х*2 – 25)= = 2(*х* – 5)(*х* + 5). Теперь наше уравнение будет выглядеть так:

.

*Читатель*: Дальше всё понятно! Надо умножить обе части уравнения на такое выражение, чтобы все дроби «исчезли»!

*Автор*: Верно! И какое это выражение?

*Читатель*: Например: 12(*х* + 5)(*х* – 5), ведь 12 ⋮ 6, 12 ⋮ 4, 12 ⋮ 2.

*Автор*: Да, 12 = НОК (4, 6, 12). Только не забудьте указать ОДЗ.

*Читатель*: Это просто: *х* + 5 ≠ 0 → *х* ≠ –5, *х* – 5 ≠ 0 → *х* ≠ 5. Теперь умножаем:

12(*х* + 5)(*х* – 5)=

=12(*х* + 5)(*х* – 5),

2⋅7(*х* – 5) + 3⋅3(*х* + 5) = 6⋅15 →

14*х* – 70 + 9*х* + 45 = 90 → 23*х* = 115 → *х* = 115 : 23 → *х* = 5.

Но это значение не входит в ОДЗ!

При *х* = 5 дробь  – имеет знаменатель, равный нулю…

*Автор*: Это означает, что наш единственный корень – посторонний, а уравнение не имеет корней.

*Ответ*: *х* ∈ ∅.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В9.** Решите уравнение:

а); б);

в); г) .

**Используем формулу сокращённого умножения**

***а*2 – *b*2 = (*a – b*)(*a + b*)**

**Задача 9.10.** Решите уравнение

.

***Решение***. Заметим, что:

2*х* + *х*2 + 1 = *х*2 + 2*х* + 1 = (*х* + 1)2,

*х* + 2*х*2 + *х*3 = *х*(1 + 2*х* + *х*2) = *х*(*х* + 1)2,

2*х* + 2*х*2 = 2*х*(1 + *х*) = 2*х*(*х* + 1).

Тогда наше уравнение можно переписать так:

.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Автор*: Как Вы думаете, на какое выражение надо умножить обе части этого уравнения, чтобы дроби «исчезли»?  *Читатель*: На наименьшее общее кратное знаменателей, т.е. на такое выражение, которое делится и на (*х* + 1)2, и на *х*(*х*+1)2, и на 2*х*(*х* + 1). По-моему, это 2*х*(*х* + 1)2 |

*Автор*: Верно! Продолжайте.

*Читатель*: Получим

2*х*(*х* + 1)2 ⋅= 2*х*(*х* + 1)2 ⋅→

[2*x* ⋅ 1 + 2 ⋅ 4] = 5⋅(*x* + 1) → 2*х* + 8 = 5*х* + 5 → 3 = 3*х* → *х* = 1.

*Автор*: А что можно сказать про ОДЗ?

*Читатель*: Найдём ОДЗ: *х* + 1 ≠ 0 → *х* ≠ –1 и *х* ≠ 0. Значение *х* = 1 не является посторонним корнем, поэтому это – корень уравнения.

*Ответ*: *х* = 1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В10.** Решите уравнение:

а); б).

**Используем разложение квадратного трёхчлена**

**на множители**

Вспомним, что если *х*1 и *х*2 – корни квадратного трёхчлена *х*2 + *рх + q*, то справедлива формула

*х*2 + *рх* + *q* = (*х – х*1)(*х – х*2). (9.1)

**Задача 9.11.** Решите уравнение .

***Решение***. Заметим, что:

*х*2 – 9 = (*х* – 3)(*х* + 3), *х*2 + 4*х* = *х*(*х* + 4),

*х*2 + *х* – 12 – квадратный трёхчлен, корни которого *х*1 = –4; *х*2 = 3 (в том, что мы не ошиблись с корнями, легко проверить с помощью теоремы Виета: *х*1*х*2 = (–4)⋅3 = –12, *х*1 + *х*2 = –4 + 3 = –1). Тогда по формуле (9.1): *х*2 + *х* – 12 = (*х* + 4)(*х* –3).

Теперь наше уравнение можно переписать так:

.

ОДЗ: *х* – 3 ≠ 0 → *х* ≠ 3, *х* + 3 ≠ 0 → *х* ≠ –3,

*х* ≠ 0, *х* + 4 ≠ 0 → *х* ≠ –4.

НОК[(*x* – 3)(*x* + 3); *x*(*x* + 4); (*x* – 3)(*x* + 4)] = (*х* – 3)(*х* + 3)*х*(*х* + 4).

Умножим обе части нашего уравнения на выражение (*х* – 3)(*х* + 3)*х*(*х* + 4), получим:

(*х* – 3)(*х* + 3)*х*(*х* + 4)  =

= (*х* – 3)(*х* + 3)*х*(*х* + 4) →

[6*x*(*x* + 4) + 2(*x* – 3)(*x* + 3)] = 7(*х* + 3)*х* →

 *х*2 + 3*х* – 18 = 0;

*D* = 32 + 4⋅18 = 81, , , *х*1 = –6, *х*2 = 3.

Здесь *х* = 3 – посторонний корень, так как значение *х* = 3 не входит в ОДЗ. Таким образом, у нас единственный корень *х* = –6.

*Ответ*: *х* = –6.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В11.** Решите уравнение:

а); б).

**Г2.** Решите уравнение:

а); б).

**Метод замены переменной**

**Задача 9.12.** Решите уравнение .

***Решение***. Заметим, что: 12|*x*| – 3*х*2 = 3(4|*х|* – *х*2) = –3(*х*2–4|*x*|). Введём следующее обозначение: *у* = *х*2 – 4|*x*|, т.е. сделаем замену: вместо выражения *х*2 – 4|*x*| запишем *у*, получим:

.

Далее используем свойство пропорции:

(–3*у*)⋅1 = (*у* + 1)⋅*у* → *у*2 + 4*у* = 0 → *у*(*у* + 4) = 0 →

*у* = 0, *у* + 4 = 0 → *у* = –4.

Теперь вспомним, что *у* = *х*2 – 4|*x*|, и получим два уравнения:

1) *х*2 – 4|*x*| = 0;

2) *х*2 – 4*x*| = –4.

Учтём, что *х*2 = *|x*2| и введём ещё одну переменную: *z* = |*x*|, получим:

1) *z*2 – 4*z* = 0 → *z*(*z* – 4) → *z* = 0, *z* = 4;

2) *z*2 – 4*z* = –4 → *z*2 – 4*z* + 4 = 0 → (*z* – 2)2 = 0 → *z* = 2.

Теперь вспомним, что *z* = |*x*|, и получим три уравнения:

|*x*| = 0 → *х* = 0,

|*x*| = 4 → *х* = –4 и *х* = 4,

|*x*| = –2 → *х* = 2 и *х* = –2.

Мы получили целых пять корней: 0, –4, 4, –2, 2. Выясним, нет ли среди них посторонних.

Найдём ОДЗ: *х*2 – 4|*x*| + 1 ≠ 0 , заменяем |*x*| = *и* и получаем: *и*2– 4*и* + 1 ≠ 0, , отсюда  и . Видим, что все пять корней входят в ОДЗ, т.е. не являются посторонними.

*Ответ*: *х* ∈ {0, –4, 4, – 2, 2}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В12.** Решите уравнение: .

**Г3.** Решите уравнение:

а); б).

**«Хитрая» замена**



**Задача 9.13.** Решите уравнение .

***Решение***. Заметим, что

,

тогда наше уравнение примет вид:

.

Введём обозначение , тогда получим *у*2 – *у* – 20 = 0, *D* = 1 + 4⋅20 = 81, = 9, ; *у*1 = –4, *у*2 = 5.

Делаем обратную замену и получаем два уравнения:  и . Решаем эти уравнения:



–4*х* – *х*2 = 4 → *х*2 + 4*х* + 4 = 0 → (*х* + 2)2 = 0 → *х* = –2;



*х*2 – 5*х* + 4 = 0 → *х*1 = 4, *х*2 = 1.

Заметим, что ОДЗ нашего уравнения *х* ≠ 0, поэтому все три корня: –2, 4 и 1 нам подходят.

*Ответ*: *х* ∈ {–2, 4, 1}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г4.** Решите уравнение: а);

б) ; в) .

**Задача 9.14.** Решите уравнение .

***Решение***. Введём обозначение *у* = *х*2 + 15, получим

.

ОДЗ: *у* ≠ 6*х* и *у* ≠ 8*х*.

Воспользуемся свойством пропорции:

(*у* – 10*х*)(*у* – 8*х*) = (*у* – 6*х*)⋅3*х* →

*у*2 – 10*ху* – 8*ху* + 80*х*2 = 3*ху* – 18*х*2 →

*у*2 – 21*ху* + 98*х*2 = 0.

Попробуем разложить на множители левую часть полученного уравнения с двумя неизвестными. Для этого сделаем такую «хитрость»: будем считать *у* – неизвестной величиной, а *х* – известной – т.е. параметром, и решим наше уравнение относительно *у*:

*D* = (21*х*)2 – 4⋅1⋅98*х*2 = 49*х*2 → 

 *у*1 = 7*х*, *у*2 = 14*х*.

Заметим. что оба значения *у* удовлетворяют ОДЗ. Теперь вспомним, что *у* = *х*2 + 15, и получим два уравнения:

7*х* = *х*2 + 15 → *х*2 – 7*х* + 15 = 0, *D* = 49 – 4⋅15 < 0 – корней нет;

14*х* = *х*2 + 15 → *х*2 – 14*х* + 15 = 0  .

*Ответ*: *х =* .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Д1.** Решите уравнение:

а); б) .

**✍ Домашнее задание**

**Задачи лёгкие**

**А1.** Решите уравнение .

**Задачи лёгкие**

**Б7.** Решите уравнение:

а); б) ;

в) ; г) .

**Б8.** Решите уравнение: а); б) ;

в) ; г) .

**Б9.** Решите уравнение:

а); б) ; в) ; г) .

**Задачи средней трудности**

**В13.** Решите уравнение:

а); б) ;

в); г) .

**B14.** Решите уравнение .

**B15.** Решите уравнение .

**В16.** Функции заданы формулами:

а); б); в); г).

Для каждой функции определите, пересекает ли её график ось *х*, и если пересекает, то в каких точках.

**В17.** Решите уравнение: а); б) ;

в); г) .

**В18.** При каких значениях *а* значения дробей  и равны?

**В19.** Решите уравнение: а); б) ;

в); г) .

**В20**. Решите уравнение: а); б) ;

в); г) ; д) .

**В21.** Даны две дроби и . Найдите значения переменной *а*, при которых:

а) значение первой дроби равно 10;

б) значение второй дроби равно 10;

в) значение дробей равны;

г) разность первой и второй дробей равна их произведению.

**В22.** Решите уравнение:

а); б) ; в);

г) ; д) ; e) .

**В23.** Решите уравнение:

а); б); в);

г) ; д); e).

**В24.** Решите уравнение: а); б);

в); г) ; д);

e); ж) ; з) .

**В25.** Существует ли такое значение *d*, при котором разность дробей  и  равна 1?

**В26.** Существует ли такое значение *b*, при котором разность дробей  и  равна 3?

**В27.** При каких значениях *а* сумма дробей  и  равна 2?

**В28.** Решите уравнение: а);

б).

**В29.** Решите уравнение: а);

б); в) .

**В30.** Решите уравнение:

а); б) ;

в); г) .

**В31.** Решите уравнение:

а); б) .

**В32.** Решите уравнение:

а); б) .

**В33.** Решите уравнение:

а); б) ;

в); г) .

**В34.** Решите уравнение: а);

б) ; в);

г) ; д) .

**В35.** Решите уравнение:

а); б) ;

в) ; г) .

**Задачи трудные**

**Г5**. Алгебраическое выражение  принимает значение 16 при *z* = –2 и при некотором значении *s*. Чему равно значение этого же выражения при том же значении *s* и при *z* = 0,5?

**Г6**. Алгебраическое выражение  принимает значение 1 при *х* = и при некотором значении *с*. Чему равно значение этого же выражения при том же значении *с* и при ?

**Г7**. Алгебраическое выражение  принимает значение –21 при *у* = –3 и при некотором значении *п*. Чему равно значение этого же выражения при том же значении *п* и при ?

**Г8.** Даны выражения: а) ; б) ; в) .

Для каждого выражения определите: 1) существуют ли такие выражения переменной, при которых значение выражения равно 0; 2) при каких значениях переменной выражение имеет смысл.

**Г9.** Решите уравнение: а); б) ;

в); г) .

**Г10.** Решите уравнение: а); б).

**Г11.** Решите уравнение:

а); б) ;

в); г) .

**Г12.** Решите уравнение:

а); б) ;

в); г) .

**Г13.** Решите уравнение:

а);

б) ;

в);

г);

д) ; е) .

**Г14.** Решите уравнение:

а); б) .

**Г15.** Решите уравнение:

а); б) .

**Г16.** Решите уравнение:

а); б) .

**Г17.** Решите уравнение методом замены переменной:

а); б) ; в) .

**Г18.** Решите уравнение: а);

б) ; в) .

**Задачи очень трудные**

**Д2.** Решите уравнение методом замены переменной:

а); б) ;

в) .

**Д3.** Решите уравнение: а); б) .

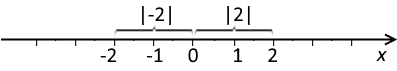


**§ 10. Уравнения со знаком модуля**

Напомним, что модулем (абсолютной величиной) числа *а* называется величина |*a*|, которая определяется так:

 (10.1)

Геометрически это означает, что |*a*| – *расстояние* от точки, изображающей число *а* на числовой оси, до начала координат (рис. 10.1).

 Рис. 10.1

**Задача 10.1.** Решите уравнение: а) |*x*| = 2; б) |*x*| = 0; в) |*x*| = –2.

***Решение***.

а) |*x*| = 2. Ясно, что только два числа удовлетворяют этому равенству: *х* = –2 и *х* = 2, так как |–2| = 2 и |2| = 2.

б) |*x*| = 0. Согласно формуле (10.1) |0| = 0, значит, *х* = 0.

в) |*x*| = –2. Модуль любого числа есть величина неотрицательная, поэтому данное уравнение не имеет решений.

*Ответ*: а) *х* ∈ {–2; 2}; б) *х* ∈ {0}; в) *х* ∈ ∅.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А1.** Решите уравнение: а) |*x*| = 5,5; б) |*x*| = 1; в) |*x*| = 0,2; г) |*x*| = 0,2; д) |*x*| = –0,5; e) .

**Замена переменной: |*x*| = *y***

**Задача 10.2.** Решите уравнение *х*2 – |*x*| = 0.

***Решение***. Учтём, что *х*2 = |*x*|2. В самом деле, если *х* > 0, то |*x*| = *x* и |*x*|2=*х*2; если *х* < 0, то |*x*| = –*x* и |*x*|2 =(–*х*2) = *х*2. Таким образом, наше уравнение можно записать так: |*x*|2 – |*x*| = 0.

Сделаем замену переменной: |*x*| = *у*, получим

*у*2 – *у* = 0 → *у*(*у* – 1) = 0 → *у* = 0 и *у* = 1.

Отсюда находим

|*x*| = 0 → *x* = 0; |*x*| = 1 → *x* = 1 и *х* = –1.

*Ответ*: *х* ∈ {–1; 0; 1}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А2.** Решите уравнение 2|*x*| – 2 = 1.

**Б1.** Решите уравнение *х*2 + 2|*x*| + 1 = 0.

**В1.** Решите уравнение *х*2 + 3|*x*| – 2 = 0.

**Г1.** При каком значении *а* уравнение *х*10 – *а*|*x*| + *а*2 – *а* = 0 имеет единственное решение?

**Уравнения вида |*x* ± *a*| = *b***

**Задача 10.3.** Решите уравнение:

а) |*x* + 2| = 0; б) |*x* + 2| = –3; в) |*x* + 2| = 3.

***Решение***.

а) |*x* + 2| = 0 → *х* + 2 = 0 → *х* = –2, или *х* ∈ {–2}.

б) |*x* + 2| = –3. |*x* + 2| ≥ 0 при любом *х*, значит, решения нет, *х* ∈ ∅.

в) |*x* + 2| = 3. Если |*x*| = *a*, то либо *х* = *а*, либо *х* = –*а*. Тогда:

*х* + 2 = –3 → *х* = –5; *х* + 2 = 3 → *х* = 1.

*Ответ*: а) *х* ∈ {–2}; б) *х* ∈ ∅; в) *х* ∈ {–5; 1}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А3.** Решите уравнение:

а) |*x* – 1| + 1 = 0; б) |*x* – 1| = 0; в) |*x* + 2| + 2 = 0.

**Б2.** Решите уравнение

а) |2*x* – 1| – 3 = 0; б) |*x* + 2| – 2 = 0; в) |*x* + 2| – 4 = 0.

**В2.** Решите уравнение: а)|19 – *x*| + 3 = ; б) .

**В3.** Решите уравнение:

а)|2*x –* 1| = 5; б) |3*x +* 2| = 4; в) |7 – 3*x*| = 4; г) |–2 – 3*x*| = 5.

**Г2.** Решите уравнение  при всех значениях параметра *а*.

**Уравнения вида |*аx*2 + *bx + c| = d***

**Задача 10.4.** Решите уравнение |*x*2 – 2*x*| = 1.

***Решение***. Вспомним, что равенство |*a*| = 1 выполняется в двух случаях: либо *а* = 1, либо *а* = –1. Поэтому наше уравнение эквивалентно двум уравнениям: *x*2 – 2*x* = 1 и *x*2 – 2*x* = –1. Решим каждое уравнение и получим:

*x*2 – 2*x* = 1 → *x*2 – 2*x* – 1 = 0 → ;

*x*2 – 2*x* = –1 → *x*2 – 2*x* + 1 = 0 → (*х* –1)2 = 0 → *х*3 = 1.

*Ответ*: *х* ∈ .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б3.** Решите уравнение |*x*2+ 2*x*| = –1.

**В4.** Решите уравнение|*x*2+ 3*x* + 1| = 1.

**Г3.** Решите уравнение|2*x*2 + *х* – 3| = 1.

**Уравнения вида |*аx* + *b| = сх + d***

**Задача 10.5.** Решите уравнение |*x* – 2| = 3 – *х*.

***Решение***. Рассмотрим два случая: *х* – 2 ≥ 0 и *х* – 2 < 0.

1. Пусть *х* – 2 ≥ 0, тогда *х* ≥ 2, т.е. *х* ∈ [2; +∞). В этом случае |*x* – 2| = *x* – 2, а наше уравнение примет вид

*х* – 2 = 3 – *х* → 2*х* = 5 → *х* = 2,5.

Мы видим, что 2,5 ∈ [2; +∞), значит, *х* = 2,5 – корень уравнения. При желании это можно проверить простой подстановкой:

|2,5 – 2| = 3 – 2,5 → |0,5| = 0,5 → 0,5 = 0,5.

2. Пусть *х* – 2 < 0, тогда *х* < 2 или *х* ∈ (–∞; 2). В этом случае

|*x* – 2| = –(*x* – 2) = –*х* + 2,

а наше уравнение примет вид

*–х* + 2 = 3 – *х* → –*х* + 2 – 3 + *х* = 0 → –1 = 0.

Это неверное числовое равенство, следовательно, в данном случае корней нет.

*Ответ*: *х* = 2,5.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В5.** Решите уравнение:

а) |2*x* + 1| – *х* = 3; б) |*x* + 1| – *х* + 1 = –1;

в) 2*х* + |1 – *x*| = 0; г) |*x* + 2| + *х* = –2; д) *х +* |*x*| = 0.

**Уравнения вида *х*2 + |*аx* + *b| + с* = 0**

**Задача 10.6.** Решите уравнение *х*2 – 4*х* + |*x* – 3| + 3 = 0.

***Решение***. Рассмотрим два случая: *х* – 3 ≥ 0 и *х* – 3 < 0.

1. Пусть *х* – 3 ≥ 0, тогда *х* ≥ 3, т.е. *х* ∈ [3; +∞). В этом случае |*x* – 3| = *x* – 3, а наше уравнение примет вид:

*х*2 – 4*х* + *х* – 3 + 3→ *х*2 – 3*х* = 0 → *х*(*х* – 3) = 0 →

*х* = 0 и *х* = 3.

Корень *х* = 0 нам не подходит, так как 0 ∉ [3; +∞), а *х* = 3 подходит, так как 3 ∈ [3; +∞).

2. Пусть *х* – 3 < 0, тогда *х* < 3, т.е. *х* ∈ (–∞; 3). В этом случае |*x* – 3| = –(*x* – 3) = –*х* + 3, а наше уравнение примет вид

*х*2 – 4*х* + (–*х* + 3) + 3→ *х*2 – 5*х* + 6 = 0,

*D* = 25 – 4⋅6 = 1, → *х*1 = 2 и *х*2 = 3.

Корень *х*1 = 3 нам не подходит, так как 3 ∉ (–∞; 3), а *х* = 2 подходит, так как 2 ∈ (–∞; 3).

Итак, мы получили три корня: *х* = 0, *х* = 3 и *х* = 2.

*Ответ*: *х* ∈ {0; 3; 2}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В6.** Решите уравнение:

а) *х*2 – |2*x* – 1| + 1 = 0; б) *х*2 + |*x* – 1| = 0; в) *х*2 + |*x* + 2| + 2 = 0.

**Г4.** Решите уравнение:

а) ; б) ;

в) ; г) *x*⋅|*x*| + 7*x* + 12 = 0.

**Уравнения вида |*x*2 + *рx + q| = f*(*x*)**

**Задача 10.7.** Решите уравнение |*x*2 – 1| = *x*.

***Решение***. Вспомним, что равенство |*a*| = *b* выполняется в двух случаях: либо *а* = *b*, либо *а* = –*b*. При этом должно выполняться условие *b* ≥ 0. Тогда наше уравнение эквивалентно двум уравнениям: *x*2 – 1 = *х* и *x*2 – 1 = –*х*. Решим каждое уравнение и проверим выполнение условия *х* ≥ 0.

1. .

Заметим, что корень , поэтому он нам не подходит. Корень , поэтому берем его в качестве ответа.

2. .

Корень , поэтому он нам не подходит. Корень  и нам подходит.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

Решите уравнение:

**Б4.** *х*2 – 2 = |*x*2– 1|.

**В7.** а) |*х*2 – *х*| = *x* – 1; б) |*х*2 –1| = 2*х*.

**Г5.** (*х* – 1)3 = |*x*2 – 4*x* + 3|.

**Уравнения вида |*аx* + *b| = |cx+d|***

**Задача 10.8.** Решите уравнение |*x* + 1| = |2*x* – 1|.

***Решение***. Мы знаем, что если |*a*| = |*b|*, то справедливо одно из равенств: либо *а* = *b*, либо *а* = –*b*. Значит, наше уравнение эквивалентно уравнениям: либо *x* + 1 = 2*х* – 1, либо *x* + 1 = –(2*х –* 1). Решим каждое уравнение:

*x* + 1 = 2*х* – 1 → 2 = *х* → *х* = 2;

*x* + 1 = –(2*х –* 1) → *х* + 1 = –2*х* + 1 → 3*х* = 0 → *х* = 0.

*Ответ*: *х* ∈ {2; 0}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б5.** Решите уравнение:

а) |2*x* – 3| = |*x* + 1|; б) |3 – *x*| = |*х* + 1|;

в) |10*x* + 9| = |8*x* + 7|; г) |*x* – 3| + |*х|* = 0.

**Уравнения вида |*f*(*x*)*| = |g*(*x*)*|***

**Задача 10.9.** Решите уравнение |*x*2 + 1| = |2*x*|.

***Решение***. Вспомним, что |*a*| = |*b|*, если справедливо одно из равенств: либо *а* = *b*, либо *а* = –*b*. Тогда наше уравнение эквивалентно двум уравнениям: *x*2 + 1 = 2*х* и *x*2 + 1 = –2*х*. Решим каждое уравнение и получим:

*x*2 + 1 = 2*х* → *х*2 – 2*х* + 1 → (*х* – 1)2 = 0 → *х* = 1;

*x*2 + 1 = –2*х* → *х*2 + 2*х* + 1 → (*х* + 1)2 = 0 → *х* = –1.

*Ответ*: *х* ∈ {–1; 1}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В8.** Решите уравнение: а) |*x*| = |*x*2 + *х*|; б) |*x*2 – *х*| = |*х*2 + 2*х*|.

**Используем метод интервалов**

**Задача 10.10.** Решите уравнение 2|*x* + 4| – |*x* + 1| = 4.

***Решение.*** Воспользуемся методом интервалов. Определим значения *х*, при которых каждое из «подмодульных» выражений обращается в ноль:



Рис. 10.2

*х* + 4 = 0 → *х* = –4,

*х* + 1 = 0 → *х* = –1.

Отметим эти точки на числовой оси (рис. 10.2). Они разбивают ось на три интервала: (–∞; –4]; (–4; –1); [–1; +∞). Теперь раскроем знаки модулей и решим наше уравнение в каждом из указанных интервалов.

1. При (–∞; –4] *х* + 4  0, *х* + 1 < 0, тогда

|*х* + 4| = –(*х* + 4), |*x* + 1| = –(*х* + 1).

А наше уравнение принимает вид:

2[–(*x* + 4)] – [–(*х* + 1)] = 4 → –2*х* – 8 + *х* + 1 = 4 →

–*х* = 4 – 1 + 8 → *х* = –11.

Полученное значение *х* принадлежит первому интервалу: –11 ∈ (–∞; –4]. Поэтому *х* = –11 –корень нашего уравнения.

2. При *х* ∈ (–4; –1) *х* + 4 > 0, *х* + 10, тогда |*х* + 4| = (*х* + 4), |*x* + 1| = –(*х* + 1). А наше уравнение принимает вид:

2(*x* + 4) – [–(*х* + 1)] = 4 → 2*х* + 8 + *х* + 1 = 4 →

3*х* = 4 – 8 – 1 → .

Полученное значение *х* принадлежит второму интервалу: . Поэтому  – корень нашего уравнения.

3. При  [–1; +∞) *х* + 4 > 0, *х* + 1 ≥ 0. Тогда |*х* + 4| = (*х* + 4), |*x* + 1| = (*х* + 1). А наше уравнение принимает вид:

2(*x* + 4) – (*х* + 1) = 4 → 2*х* + 8 – *х* – 1 = 4 →

*х* = 4 – 8 + 1 → *х* = –3.

–3 ∉ [–1; +∞), следовательно, значение *х* = –3 не является корнем уравнения.

*Ответ*: *х* = –11, .

СТОП! Решите самостоятельно.

Решите уравнение:

**В9.** а) |3 – *x*| – 2|1 + *x*| = 2; б) |*x* – 3| + |2*х* + 1| = 4.

**Г6.** а) |*x* – 1| + |*x* + 2| – 2*х* = 1; б) |*x* + 2| + 2|3 – *х| – |x* – 1| = 3.

**Уравнения, которые содержат несколько**

**«вставленных друг в друга» модулей**

**Задача. 10.11.** Решите уравнение –||*x*| – 2| = –2.

***Решение***. Уравнения такого типа лучше решать графически (аналитическое решение будет слишком утомительным).

Перепишем наше уравнение в виде –||*x*| – 2| + 2 = 0 и построим график *y* = –||*x*| – 2| + 2. Построение будем проводить последовательно:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) *у* = |*x* – 2| (рис. 10.3);  2) *у* = –|*x* – 2| (рис. 10.4); | 3) *у* = 2 – |*x* – 2| (рис. 10.5);  4) *у* = 2 – ||*x|* – 2| (рис. 10.6). |

Точки пересечения графика и оси 0*х* и есть корни уравнения. Как видим из рис. 10.6, таких точек три: *х* = –4, *х* = 0, *х* = 4.

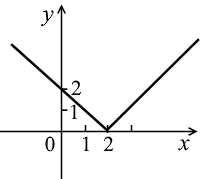
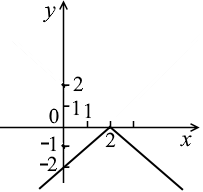
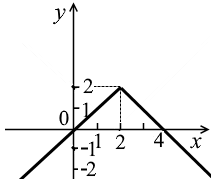
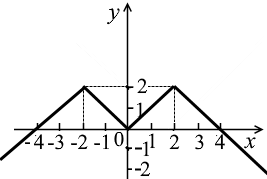
Рис. 10.3  Рис. 10.4 

Рис. 10.5  Рис. 10.6 

*Ответ*: *х* = –4, *х* = 0, *х* = 4.

СТОП! Решите самостоятельно.

Решите уравнение:

**В10.** а) ||*x*| – 1| = 2; б) ||1 – *х|* –3| –2 = 0. **Г7.** |2|*x* +2| – 3| – 2 = 0.

**Уравнения с параметром**

***Уравнения вида |x*± 1*| = |a* ± 2*|***

**Задача 10.12.** Решите уравнение |*x* – 1| = |*a* + 2| для любых значений параметра *а*.

***Решение***. Из свойства модуля нам известно, что



Следовательно,



Заметим, что в данном случае никаких ограничений на значения параметра *а* нет. Это значит, что оба корня существуют при любых значениях параметра *а*.

*Ответ*: *х* = *а* + 3, *х* = –*а* –1 при *а* ∈ (–∞; +∞).

СТОП! Решите самостоятельно.

**В11.** Решите уравнение для любых значений параметра *а*:

а) |*x* + 3| = |2 – *а*|; б) |*х +* 1*|* = |2*а*|; в) |*x* + 3| = |2*a|*.

***Уравнения вида |f*(*x*)*| = g*(*a*)**

**Задача 10.13.** Решите уравнение |*x* – 1| = *a* для любых значений параметра *а*.

***Решение***.

1. Очевидно, что при *а* < 0 решений нет, так как |*x* + 1| ≥ 0 при любом значении *х*. Значит, при *а* < 0 *х* ∈ ∅.

2. Если *а* > 0, то возможны два варианта: либо *х* – 1 = *а*, либо –(*х* – 1) = *а*, поскольку *а* > 0 справедливо: |*a*| = *a*, |–*a*| = *а*.

Таким образом, при *а* > 0 получаем:

*х* – 1 = *а* → *х* = 1 + *а*;

–(*х* – 1) = *а* → –*х* + 1 = *а* → *х* = 1 – *а*.

3. При *а* = 0 имеем |*х* – 1| = 0 → *х* – 1 = 0 → *х* = 1.

*Ответ*: при *а* < 0 *х* ∈ ∅; при *а* > 0 *х* = 1 – *а* и *х* = 1 + *а*; при *а* = 0 *х* = 1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В12.** Решите уравнение для любых значений параметра *а*:

а) |2*x* – 3| = *а*; б) |*х +* 3*|* = –*а*.

**Г8.** Решите уравнение |*а – x*| = 1 – 2*а* для любых значений параметра *а*.

***Графический метод решения***

***уравнений с параметром***

**Задача 10.14.** Решите уравнение |2*x* + 1| = *a* для любых значений параметра *а*.

***Решение***. Применим для решения графический метод. Построим на одной координатной плоскости графики *у* = |2*х* + 1| и *у = а* (рис. 10.7). Для каждого значения *а* на плоскости будет существовать горизонтальная прямая *у* = *а*. В точках пересечения графиков *у* = |2*х* + 1| и *у = а* выполняется равенство |2*х* + 1| = = *а*. Следовательно, значения координаты *х* точек пересечения этих графиков – корни нашего уравнения.

Как видно из рис. 10.7, при *а* < 0 графики не пересекаются, значит, решений нет, *х* ∈ ∅.

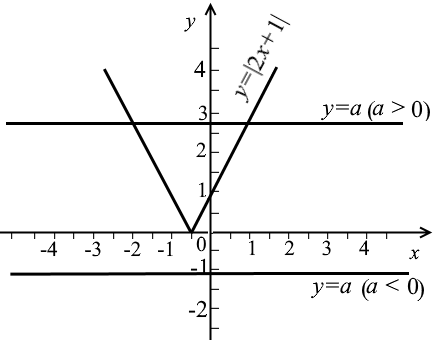


Рис. 10.7

При *а* = 0 имеем одну точку пересечения с координатой .

При *а* > 0 имеем две точки пересечения (см. рис. 10.7). Координаты *х* этих точек легко найти, решив уравнение |2*х* + 1| = *а*. Данное равенство выполняется в двух случаях:

2*х* + 1 = *а* →  и –(2*х* + 1) = *а* → .

*Ответ*: при *а* < 0 *х* ∈ ∅; при *а* = 0 ; при *а* > 0  и .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г9.** Решите графически уравнение для любых значений параметра *а*: а) |*x* – 4| + *а* = 0; б) |*х –* 2*|* = *а* + 1.

***Строим графики в координатах (х, а)***

**Задача 10.15.** Решите уравнение |*x*| + |*x* – 1| = *a* для любых значений параметра *а*.

***Решение***. Введём необычную систему координат: по вертикали будет откладывать параметр *а*, а по горизонтали – неизвестную величину *х*. Построим в этой системе координат график *а* = |*x*| + |*x* – 1|. Этот график будет представлять собой геометрическое место точек на плоскости, координаты которых (*х*, *а*) удовлетворяют исходному уравнению |*x*| + |*x* – 1| = *а*.

Будем строить график методом интервалов. «Подмодульные» выражения, как легко видеть, обращаются в ноль при *х* = 0 и *х* = 1. Поэтому рассмотрим три интервала:

1) *х* < 0: –*х* – (*х* – 1) = *а* → *а* = –2*х* + 1;

2) 0 ≤ *х* ≤ 1: *х* – (*х* – 1) = *а* → *а* = 1;

3) *х* > 1: *х* + *х* – 1 = *а* → *а* = 2*х* – 1.

Построим три прямых в указанных интервалах и получим график, показанный на рис. 10.8.

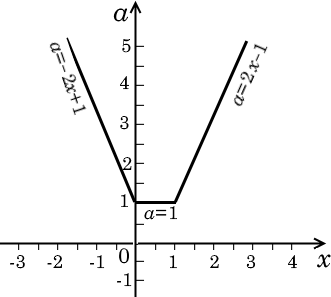


Рис. 10.8

Теперь, глядя на график, начнём записывать ответ. Будем мысленно двигаться вдоль оси *а* снизу вверх.

В области *а* < 1 нет ни одной точки графика, значит, решений в этой области нет.

При *а* = 1 *х* – любое действительное число из промежутка [0; 1].

При *а* > 1 точки графика лежат на двух прямых: *а* = –2*х* + 1 и *а* = 2*х* – 1.

Выразим *х* их этих уравнений прямых и получим:

; .

*Ответ*: при *а* < 1 решений нет; при *а* = 1 *х* ∈ [0; 1]; при *а* > 1 , .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г10.** Решите уравнение для любых значений параметра *а*:

а) |*x* – 1| + |2 – *x*| = *а*; б) |1 – *х*| *–|x* + 1*|* = *а* – 1; в) |*a*| = |*x* + 1| + |*x* – 1|.

**Задача 10.16.** Решите уравнение |*x*| + |*а*| = 1 для любых значений параметра *а*.

***Решение***. Построим график |*x*| + |*а*| = 1 в системе координат *х*0*а*. График *а* = 1 – |*x*| строится из графика *а* = 1 – *х* отражением правой полуплоскости на левую, при этом левая часть графика *а* = 1 – *х* отбрасывается (рис. 10.9).

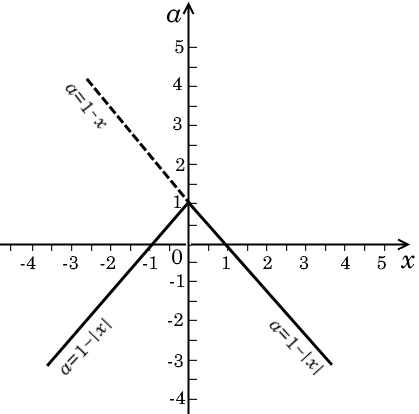


Рис. 10.9

График |*а|* = 1 – |*x*| строится из графика *а* = 1 – |*х|* отражением части графика, лежащей в верхней полуплоскости на нижнюю (нижняя часть графика *а* = = 1 – |*х|* отбрасывается) (рис. 10.10).

Запишем уравнения прямых, образующих наш график. Из рис. 10.10 видно, что это прямые: в верхней полуплоскости *а* = = *х* + 1 и *а* = 1 – *х*; в нижней полуплоскости *а* = –*х* –1 и *а* = *х* – 1. Попробуем получить ответ, мысленно двигаясь вдоль оси *а* снизу вверх:

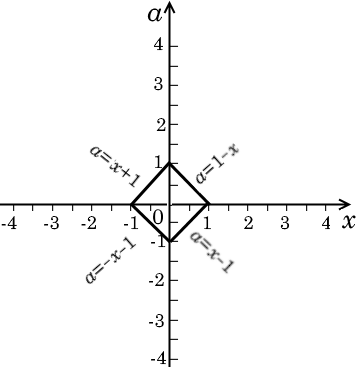


Рис. 10.10

при *а* < 1 *x*∈ ∅;

при *а* = –1 *х* = 0;

при *а* ∈ (–1; 0] выполняются равенства *а* = –*х* – 1 и *а* = *х* –1; выражая из них *х*, получаем *х* = = –*а* – 1 и *х* = *а* + 1;

при *а* ∈ (0; 1) выполняются равенства *а* = *х* + 1 и *а* = 1 – *х*; выражая из них *х*, получаем *х* = = *а* – 1 и *х* = 1 – *а*;

при *а* = 1 *х* = 0;

при *а* > 1 *х* ∈ ∅.

*Ответ*: при *а* ∈ (–∞; –1)∪(1; +∞) *х* ∈ ∅;

при *а* ∈ (–1; 0] *х* = –*а* – 1 и *х* = *а* + 1;

при *а* ∈(0;1) *х* = *а* – 1 и *х* = 1 – *а;*

при *а* = ±1 *х* = 0.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г11.** Решите уравнение для любых значений параметра *а*:

а) |*а* – 2| + |*x*| = 2; б) |*х*| *– |а|* = 1.

**Д1.** Решите уравнение –|*х*| *+ |*3 – *а|* = 1 для любых значений параметра *а*.

**Задача 10.17.** Решите уравнение ||*x*| – 1| + |*а*| = 1 для любых значений параметра *а*.

***Решение***. Построим график ||*x*| – 1| + |*а*| = 1 в системе координат *х*0*а*. Будем строить график последовательно. Сначала перепишем наше уравнение в виде |*а*| = 1 – ||*х*|– 1|. Поскольку график содержит |*a*| и |*x*|, проведём построение только для *а* > 0, *х* > 0.

В первой координатной четверти наш график записывается уравнением *а* = 1 – |*x* – 1|. Его легко построить, последовательно строя графики: 1) *а* = *х* –1 → 2) *а* = |*x* – 1| → 3) *а* = –|*x* – 1| → 4) *а* = 1 – |*x* – 1| (рис. 11.11).

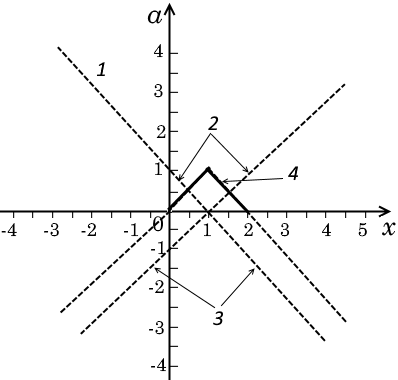
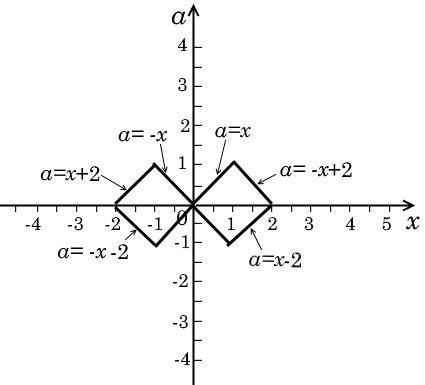
 

Рис. 10.11 Рис. 10.12

Затем ту часть графика, которая получилась в ходе всех этих построений в первой координатной четверти (*4*), мы последовательно зеркально отражаем: сначала на левую полуплоскость, а затем всю верхнюю полуплоскость на нижнюю. В результате получается график, показанный на рис. 10.12.

Аккуратно подписываем все прямые, образующие график: *а* = *х* + 2, *а* = *х*, *а* = *х* – 2, *а* = –*х* – 2, *а* = –*х*, *а* = –*х* + 2.

Теперь нам осталось получить ответ, мысленно двигаясь по оси *а* снизу вверх:

при *а* < –1 решений нет;

при *а* = –1 получаем два корня: *х* = 1 и *х* = –1;

при –1 < *a*  0 имеем четыре прямые: *а* = –*х* – 2, *а = х*, *а* = –*х*, *а* = *х* –2; выражая из этих уравнений *х* получаем четыре корня: *х* = –*а* – 2, *х = а*, *х = –а*, *х* = *а* + 2;

при  имеем четыре прямые: *а* = –*х* + 2, *а = х*, *а* = –*х*, *а* = *х* + 2; выражая из этих уравнений *х*, получаем четыре корня: 

при *а* = 1 получаем два корня: *х* = 1 и *х* = –1;

при *а* > 1 решений нет.

*Ответ*: при *а* ∈ (–∞; –1)∪(1; +∞) решений нет; при *а* ∈ (0; 1) *х* = ±*а* и *х* = ±(*а* – 2); при *а* ∈ (–1; 0] *х* = ±*а* и *х* = ±(*а* + 2); при *а*= ±1 *х* = ±1.

СТОП! Решите самостоятельно.

Для любых значений параметра *а* решите уравнение:

**Г12.**  –|*х*| *+ |*|*а|*– 2| = 0.

**Д2.**  |3 – |*х|*| *+ |а* + 1*|* = 1.

**✍ Домашнее задание**

**Задачи очень лёгкие**

**А4.** Решите уравнение |*x*| – 2 = 4 – |*x*|.

**А5.** Решите уравнение:

а) ; б) |*x* + 7| = 0; в) ;

г) |*x* – 6| = 0; д) |*x* – 1| = 0; е) |*x* + 3,3| = –1.

**Задачи лёгкие**

**Б6.** Решите уравнение .

**Б7.** Решите уравнение:

а) ; б) |*x* – 5| = 4; в) ; г) |*x* – 11| = 9.

**Б8.** Решите уравнение:

а) ; б) |*x* – 1,5| = 3,5;

в); г) .

**Б9.** Решите уравнение:

а) ; б) |*х*4 + 1| = *x*4 + *x*; в) |*x*| = *х* + 2;

г) ; д) ; е) |*x* + 2| = 2*х*.

**Б10.** Решите уравнение: а) ; б) .

**Б11.** Решите уравнение:

а) ; б) |*x* + 1|+ |*x*| = 0;

в); г) .

**Задачи средней трудности**

**В13.** При каких значениях *а* уравнение *х*2 – (*а* + 1)|*x*| + *a* = 0 имеет три решения?

**В14.** Решите уравнение:

а) ; б) –|3 – *x*| + 1 = 0; в) .

**В15.** Решите уравнение:

а) ; б) |1 + 3*x*| = 2; в); г) |.

**В16.** Решите уравнение: а) ; б) |3 – 1,5*x*| = 2,5;

в); г) .

**В17.** Решите уравнение .

**В18.** Решите уравнение: а) ;

б) ; в); г) |*х* –1| + *x* = 3.

**В19.** Решите уравнение: а) ;

б) ; в);

г) |; д) *х*2 + |2*x* – 1| + 2.

**В20.** Решите уравнение: а) ; б) |*х*2 + *x*| = –*х*.

**В21.** Решите уравнение:

а) ; б) |*x*2 – *x*| = |*x* + 1|; в).

**В22.** Решите уравнение:

а) ; б) .

**В23.** Решите уравнение: а) ;

б) ; в) .

**В24.** Решите уравнение .

**В25.** Решите уравнение для любых значений параметра *а*:

а) ; б) .

**В26.** Решите уравнение для любых значений параметра *а*:

а) ; б) .

**Задачи трудные**

**Г13.** При каком значении *а* уравнение  имеет единственное решение?

**Г14.** Решите уравнение .

**Г15.** Решите уравнение: а) ;

б) ; в) 2*х*2 – 4|*x* – 2| – 3 = 0.

**Г16.** Решите уравнение .

**Г17.** Решите уравнение:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

**Г18.** Решите уравнение:

а) ; б) .

**Г19.** Решите уравнение: а) ;

б) ; в) ;

**Г20.** Решите уравнение .

**Г21.** При каких значениях параметра *а* уравнение |*x* + 3| = *a*|*x* – 2| имеет единственное решение? Найдите это решение.

**Г22.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Г23.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Г24.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Г25.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Задачи очень трудные**

**Д3.** Решите уравнение:

а) *х*4 + *х*2 + 4; б) *х*4 + 4*х*3 = 30 – 7

**Д4.** Сколько решений имеет уравнение  в зависимости от параметра *а*?

**Д5.** Сколько решений имеет уравнение  в зависимости от параметра *а*? Найдите решение уравнения в том случае, когда оно единственное.

**Д6.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Д7.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Д8.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Д9.** Решите графически уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Д10.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.

**Д11.** Решите уравнение  для любых значений параметра *а*.



**§ 11. Уравнения высших степеней**

***Определение 11.1.*** Уравнение вида *апхп + ап*–1*хп*–1 + …+ *а*1*х* + + *а*0 = 0, где *ап* ≠ 0, называется *уравнением п-й степени*.

Все уравнения при *п* ≥ 3 принято называть уравнениями *высших степеней*.

**Биквадратные уравнения**

Биквадратными называются уравнения вида *ах*2*п* + *bхn* + *c* = 0. Они решаются с помощью замены переменной *у = хп*.

Рассмотрим сначала случай, когда *п* – нечётное число.

**Задача 11.1.** Решите уравнения:

а) *х*6 + *х*3 + 1 = 0; б) *х*6 + 2*х*3 + 1 = 0; в) *х*10 + *х*5 – 2 = 0.

***Решение*.**

а) *х*6 + *х*3 + 1 = 0. Замена: *у* = *х*3, получаем *у*2 + *у* + 1 = 0. *D* = = 12 – 4⋅1 = –3 < 0, решений нет, *у* ∈ ∅, значит, и *х*∈ ∅.

б) *х*6 + 2*х*3 + 1 = 0; *у* = *х*3, *у*2 + 2*у* + 1 = 0 → (*у* + 1)2 = 0 → *у* = –1. Тогда *х*3 = –1, = –1. Имеем единственный корень *х* = –1.

в) *х*10 + *х*5 – 2 = 0; *у* = *х*5, *у*2 + *у* – 2 = 0 →  *у*1 = –2, *у*2 = 1. Отсюда получаем два корня:

1) *х*5 = –2 →  *х*;

2) *х*5 = 1 →  *х* = 1.

*Ответ*: а) ∅; б) {–1}; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б1.** Решите уравнение: а) *х*6 + 2*х*3 + 1 = 0; б) *х*10 – 3*х*5 + 2 = 0; в) *х*14 + *х*7 + 3 = 0; г) *х*6 – 10*х*3 + 9 = 0.

Теперь рассмотрим случай, когда *п* – чётное число.

**Задача 11.2.** Решите уравнения:

а) *х*8 + *х*4 + 1 = 0; б) *х*8 + 3*х*4 – 2 = 0; в) *х*8 + *х*4 = 0;

г) *х*8 – *х*4 = 0; д) *х*4 – 3*х*2 + 2 = 0; е) *х*16 + *х*8 – 2 = 0.

***Решение***.

а) *х*8 + *х*4 + 1 = 0; *у* = *х*4, тогда *у*2 + *у* + 1 = 0; *D* = 12 – 4⋅1 = = –3 < 0, *у* ∈ ∅ → *х* ∈ ∅.

б) *х*8 + 3*х*4 – 2 = 0; *у* = *х*4, тогда *у*2 + 3*у* + 2 = 0 →  *у*1 = –1, *у*2 = –2. Отсюда находим:

1) *х*4 = –1 → *х* ∈ ∅;

2) *х*4 = –2 → *х* ∈ ∅.

Как видим, уравнение *у*2 + 3*у* + 2 = 0 имеет два корня, но поскольку оба корня отрицательные (*у* = –1 и *у* = –2), уравнение *х*8 + 3*х*4 – 2 = 0 не имеет корней.

в) *х*8 + *х*4 = 0; *у* = *х*4, тогда *у*2 + *у* = 0 → *у*(*у* + 1) = 0 → *у* = 0 и *у* = –1. Отсюда находим:

1) *х*4 = 0 → *х* = 0;

2) *х*4 = –1 → *х* ∈ ∅.

Получается, что данное уравнение имеет единственный корень *х* = 0.

г) *х*8 – *х*4 = 0; *у* = *х*4, тогда *у*2 – *у* = 0 → *у*(*у* – 1) = 0 → *у* = 0 и *у* = 1. Отсюда находим:

1) *х*4 = 0 → *х* = 0;

2) *х*4 = 1 → *х* = 1 и *х* = –1.

Получается, что данное уравнение имеет три корня: 0, 1 и –1.

д) *х*4 – 3*х*2 + 2 = 0; *у* = *х*2, тогда *у*2 – 3*у* + 2 = 0 → *у* = 1 и *у* = 2. Отсюда находим:

1) *х*2 = 1 → *х*1 = 1 и *х*2 = –1;

2) *х*2 = 2 →  и .

Получаем четыре корня: 1, –1, , .

е) *х*16 + *х*8 – 2 = 0; *у* = *х*8, тогда *у*2 + *у* –2 = 0 → *у* = –2 и *у* = 1. Отсюда находим:

1) *х*8 = –2 → решений нет;

2) *х*8 = 1 → *х* = 1 и *х* = –1.

Получаем два корня: 1 и –1.

*Ответ*: а) ∅; б) ∅; в) {0}; г) {0; 1; –1}; д) {1, –1,,}; е) {–1; 1}.

Запомним:

• уравнения вида *ах*2*п* + *bхn* + *c* = 0, где *п* – чётное число, могут:

1) не иметь корней (см. задачу 11.2, а, б);

2) иметь один корень (см. задачу 11.2, в);

3) иметь два корня (см. задачу 11.2, е);

4) иметь три корня (см. задачу 11.2, д);

5) иметь четыре корня (см. задачу 11.2, д);

• если уравнения вида *ах*2*п* + *bхn* + *c* = 0, где *п* – чётное число, имеют ненулевые корни, то они обязательно представляют собой одну или две *пары противоположных чисел*, см., например: (–1; 1) в п. е) и (1; –1) и (; –) в п. д).

СТОП! Решите самостоятельно.

**А1.** Решите уравнение: а) *х*4 – 9*х*2 + 18 = 0; б) *х*4 – 3*х*2 – 10 = 0; в) 4*х*4 – 12*х*2 + 1 = 0; г) 12*у*4 – *у*2 – 1 = 0.

**Б2.** Решите уравнение: а) *х*4 – 6*х*2 + 8 = 0; б) 4*х*4 + 3*х*2 – 1 = 0; в) 2*х*4 + 9*х*2 + 4 = 0; г) *х*4 – 6*х*2 + 9 = 0.

**В1.** Является ли число корнем уравнения *х*4– 6*х*2 + 3 = 0?

**Г1.** При каких значениях параметра *а* уравнение *х*4 – (3*а* – 1)*х*2 + + 2*а*2 – *а* = 0 имеет два решения?

**«Очевидная» замена переменной**

**Задача 11.3.** Решите уравнение (*х*2 – 2*х*)2 – 4(*х*2 – 2*х*) + 3 = 0.

***Решение***. Делаем «очевидную» замену *у* = (*х*2 – 2*х*) и получаем: *у*2 – 4*у* + 3 = 0 → *у*1 =1, *у*2 = 3. Отсюда находим:

1) *х*2 – 2*х* = 1 → *х*2 – 2*х –* 1 = 0, ;

2) *х*2 – 2*х* = 3 → *х*2 – 2*х –* 3 = 0, , *х*3 = –1, *х*4 = 3.

Итак, наше уравнение имеет четыре корня: , –1, 3.

*Ответ*: {, –1, 3}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В2.** Решите уравнение: а) (*х*2 + 3*х*)2 + 2(*х*2 + 3*х*) – 24 = 0;

б) (*х*2 + *х* + 1)2 + 2(*х*2 + *х* + 1) – 3 = 0;

в) (1 – *х*)4 + (1 – *х*)2 = 20; г) (2 – *х*2)4 – 10(2 – *х*2)2 = – 9.

**Г2.** Решите уравнение, обозначив одну из взаимно обратных дробей через *t*, а другую через 1/*t*:

а) ; б) .

**«Хитрая» замена переменной**

**Задача 11.4.** Решите уравнение *х*(*х* – 1)(*х* – 2)(*х* – 3) = 24.

***Решение***. Преобразуем наше уравнение так:

*х*(*х* – 1)(*х* – 2)(*х* – 3) = 24 → [*х*(*х* – 3)][(*х* – 1)(*х* – 2)] = 24 →

(*х*2 – 3*х*)(*x*2– 3*х* + 2) = 24.

Теперь замена очевидна: *у* = *х*2 – 3*х*. Тогда получаем:

*у*(*у* + 2) = 24 → *у*2 + 2*у* – 24 = 0 → *у*1 = –6, *у*2 = 4.

Получаем два уравнения:

1) *х*2 – 3*х* = –6 → *х*2 – 3*х* + 6 = 0, *D* = 32 – 4⋅6 < 0, решений нет;

2) *х*2 – 3*х* = 4 → *х*2 – 3*х* – 4 = 0, *D* = 32 + 4⋅4 = 25, , *х*1 = –1, *х*2 = 4.

*Читатель*: По-моему, здесь возможна более «хитрая» замена: *у* = *х*2 – 3*х*  + 1. Тогда получим (*у* – 1)(*у* + 1) = 24 → *у*2 = 25 → *у* = –5, *у* = 5. А потом уже находим:

1) *х*2 – 3*х* = –5 → *х*2 – 3*х* + 6 = 0;

2) *х*2 – 3*х* = 5 → *х*2 – 3*х* – 4 = 0.

*Автор*: Согласен. Ваша замена более рациональна.

*Ответ*: *х* ∈ {–1; 4}.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В3.** Решите уравнение (*х* – 1)(*х* + 1)(*х* + 3)(*х* + 5) = 105 методом замены переменной.

**Г3.** Решите уравнение:

а) *х*(*х* + 4)(*х* + 5)(*х* + 9) + 96 = 0;

б) *х*(*х* + 3)(*х* + 5)(*х* + 8) + 56 = 0;

в) (*х* – 4)(*х* – 3)(*х* – 2)(*х* – 6) = 24;

г) (*х* – 3)(*х* – 4)(*х* – 5)(*х* – 6) = 1680.

**Задача 11.5.** Решите уравнение:

4(*х*2 + 17*х* + 60)(*х*2 + 16*х* + 60) = 3*х*2.

***Решение***. Сделаем следующую «хитрость»: разделим обе части уравнения на *х*2 и получим:





.

Теперь замена очевидна: *у* = *х* +, тогда уравнение принимает вид 4(*у* + 17)(*у* + 16) = 3.

*Читатель*: А ведь здесь тоже можно сделать более «хитрую» замену: , тогда получим 4(*у* + 1)*у* = 3 – это же значительно проще!

*Автор*: Согласен! Продолжайте.

*Читатель*: 4(*у* + 1)*у* = 3 → 4*у*2 + 4*у* – 3 = 0, *D* = 42 + 4⋅4⋅3 = 64, , *у*1 = –1,5, *у*2 = 0,5. А теперь уже находим:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) *х* + + 16 = –1,5 →  *х* + + 17,5 = 0 →    = 0 →  2*х*2 + 35*х* + 120 = 0, | 2) *х* + + 16 = 0,5 →  *х* + + 15,5 = 0 →    = 0 →  2*х*2 + 31*х* + 120 = 0,  ,  *х*3 = –8, *х*4 = –7,5. |

*Автор*: Всё верно. Мы получили четыре корня.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В4.** Решите уравнение (*х*2 – 6*х* – 9)2 = *х*3 – 4*х*2 – 9*х*.

**Г4.** Решите уравнение:

а) 2(*х*2 + *х* + 1)2 – 7(*х* – 1)2 = 13(*х*3 – 1);

б) 3(*х* + 2)2 + 2(*х*2 – 2*х* + 4)2 = 5(*х*3 + 8).

**Д1.** Решите уравнение (*х*2 + 2*х* – 3)(*х*2 – 8*х* – 48) = 21*х*2.

**«Очевидное» разложение на множители**

**Задача 11.6.** Решите уравнение 2*х*3 – *х*2 – 8*х* + 4 = 0.

***Решение***. Разложим на множители левую часть данного уравнения:

2*х*3 – *х*2 – 8*х* + 4 = *х*2(2*х* –1) – 4(2*х* – 1) =

= (2*х* –1)(*х*2 – 4) = (2*х* – 1)(*х* – 2)(*х* + 2).

Получим уравнение (2*х* – 1)(*х* – 2)(*х* + 2) = 0, которое сводится к решению трёх линейных уравнений:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) 2*х* –1 = 0,  ; | 2) *х* – 2 = 0,  *х* = 2; | 3) *х* + 2,  *х* = –2. |

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**А2.** Решите уравнение:

а) *х*5 – *х*3 = 0; б) *х*6 = 4*х*4; в) 0,5*х*3 = 32*х*; г) 0,2*х*4 = 4*х*2.

**Б3.** Решите уравнение:

а) *х*3 – *х*2 – 4(*х* – 1)2 = 0; б) 2*у*3 + 2*у*2 – (*у +* 1)2 = 0;

в) 5*х*3 – 19*х*2 – 38*х* + 40 = 0; г) 6*х*3 – 31*х*2 – 31*х* + 6 = 0.

**В5** Решите уравнение:

а) *х*4 + 2*х*3 – *х* – 2 = 0; б) *х*4 – 3*х*3 + *х –* 3 = 0;

в) 2*х*4 + 3*х*3 + 16*х* + 24 = 0; г) 24*х*4 + 16*х*3 – 3*х* – 2 = 0.

**Используем формулы сокращенного умножения**

**Задача 11.7.** Решите уравнение

.

***Решение***.

 →

 →

→

→

→



*Ответ*: *х* ∈ {0; –1; 1}.

СТОП! Решите самостоятельно.

Решите уравнение:

**А3.** а) *х*4 – 1 = 0; б) 4 – *у*4 = 0; в) *z*6 – 1 = 0; г) *х*6 – 64 = 0.

**Б4.** а) (*а* – 2)(*а* + 2)(*а*2 +4) = 25*а*2 – 16;

б) (*х* – 1)(*х* + 1)(*х*2+ 1) = 6*х*2 – 1.

**В6.** а) *х*3 + 3*х*2 – 6*х* – 8 = 0; б) *х*3 + 5*х*2 + 15*х +* 27 = 0;

в) 8*х*3 – 6*х*2 + 3*х* – 1 = 0; г) 27*х*3 – 15*х*2 + 5*х* – 1 = 0.

**«Хитрое» разложение на множители**

**Задача 11.8.** Решите уравнение *х*3 + *х* + 10 = 0.

***Решение***. Представим 10 как сумму 8 и 2 и перегруппируем члены: (*х*3 + 8) + (*х* + 2) = 0. Сумму (*х*3 + 8) можно разложить на произведение (*х* + 2)(*х*2 – 2*х* + 4). Следовательно, искомое уравнение примет вид:

(*х* + 2)(*х*2 –2*х* + 4) + (*х* + 2) = 0.

Вынесем за скобку множитель (*х* + 2) и получим:

(*х* + 2)(*х*2 – 2*х* + 4 + 1) = 0 → (*х* + 2)(*х*2 – 2*х* + 5) = 0.

Тогда корнем уравнения будет являться *х* = –2 и корни уравнения *х*2 – 2*х* + 5 = 0. Но в последнем уравнении дискриминант отрицателен, поэтому решений данного квадратного уравнения нет.

*Ответ*: *х* = –2.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В7.** Решите уравнение: а) *х*3 + 4*х*2 – 5 = 0; б) *х*3 – 3*х*2 + 2 = 0.

**Г5.** Решите уравнение:

а) 28*х*3 + 3*х*2 + 3*х* + 1 = 0; б) 126*х*3 – 3*х*2 + 3*х* – 1 = 0.

**Д2.** Решите уравнение *х*4 + 4*х* – 1 = 0.

**Симметрические уравнения 3-й степени**

Уравнения 3-й степени вида

*ах*3 + *bx*2 + *bx + a* = 0 и *ах*3 + *bx*2 – *bx – a* = 0

называются *симметрическими* из-за наличия одинаковых коэффициентов *а* и *b*.

Покажем, как решается уравнение *ах*3 + *bx*2 + *bx + a* = 0:

(*ах*3 + *а*) + *bx*2 + *bx*  = 0 →

*а*(*х*3 + 1) + *bx*(*x* + 1) = 0 →

*a*(*x* + 1)(*x*2 – *x* + 1) + *bx*(*x* + 1) = 0 →

(*x* + 1)[*a*(*x*2 – *x* + 1) + *bx*] = 0.

Дальше все просто:

****1) *х* + 1 = 0 → *х* = –1;

2) *а*(*х*2 – *х* + 1) + *bx* = 0.

*Читатель*: Получается, что симметрическое уравнение 3-й степени всегда имеет корень *х* = –1?

*Автор*: Да. И в этом легко убедиться подстановкой:

*а*(–1)3 + *b*(–1)2 + *b*(–1) + *а* = *–а* + *b + b + a* = 0.

Теперь попробуйте решить несколько подобных уравнений самостоятельно.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А4.** Проведите самостоятельно преобразования для уравнения *ах*3 + *bx*2 – *bx – a* = 0.

**Б5.** Решите уравнение 2*х*3 + 3*х*2– 3*х* – 2 = 0.

**В8.** Решите уравнение 5*х*3 + 21*х*2 + 21*х* + 5 = 0.

**Симметрические уравнения 4-й степени**

Это уравнения вида

*ах*4 + *bx*3 + *сх*2 + *bx + a* = 0,

*ах*4 + *bx*3 + *сх*2 – *bx + a* = 0,

*ах*4 – *bx*3 + *сх*2 – *bx + a* = 0.

Покажем, как решаются такие уравнения, на конкретном примере.

**Задача 11.9.** Решите уравнение *х*4 + 2*х*3 – 6*х*2 + 2*х* + 1 = 0.

***Решение***. Разделим обе части уравнения на *х*2:

.

Заметим, что , поэтому

.

Заметим также, что –6 = 2 – 8, и перепишем наше уравнение так:

.

Теперь очевидна замена: , тогда

*у*2 + 2*у* – 8 = 0 → *у*1 = –4, *у*2 = 2.

Получаем два уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) , | 2) , |

Итак, мы получили три корня.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В9.** Решите уравнение 2*х*4 + 3*х*3– 4*х*2 – 3*х* + 2 = 0.

**Г6.** Решите уравнение 2*х*4 + 7*х*3 + 4*х*2 + 7*х* + 2 = 0.

**Возвратные уравнения 4-й степени**

Уравнения вида *ах*4 + *bx*3 + *сх*2 + *bтx + aт*2 = 0, где *а* ≠ 0. называются *возвратными* уравнениями.

Эти уравнения решаются так же, как и симметрические уравнения 4-й степени: сначала делим обе части уравнения на *х*2:







Делаем замену: *у* =, а дальше, надеюсь, понятно.

**Задача 11.10.** Решите уравнение 3*х*4 + 4*х*3 – 43*х*2 + 8*х* + 12 = 0.

***Решение***. Покажем, что это уравнение является возвратным. В самом деле, его можно записать так:

3*х*4 + 4*х*3 – 43*х*2 + 2⋅4*х* + 22⋅3 = 0.

Очевидно, что здесь *а* = 3, *b* = 4, *т* = 2. Разделим обе части уравнения на *х*2:









Делаем замену: *у* = и решаем уравнение:

3*у*2 + 4*у* – 55 = 0,

*D* = 42 + 4⋅3⋅55 = 676, ,

*у*1,2 =, *у*1 = –5, *у*2 = .

После обратной замены получаем два уравнения:

1) , 

2) 

*D* = 112 – 4⋅3⋅6 = 49, , , *х*4 =3.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г7.** Решите уравнение 2*х*4 + 7*х*3+ 4*х*2 + 7*х* + 2 = 0.

**Г8.** Решите уравнение 3*х*4 + 5*х*3 – 14*х*2 – 10*х* + 12 = 0.

**Уравнения, которые сводятся к одному уравнению**

**с двумя неизвестными**

**Задача 11.11.** Решите уравнение

(*х*2 + 3*х* – 8)2 + 2*х*(*х*2 + 3*х* – 8) – 3*х*2 = 0.

***Решение***. Сделаем замену переменных: *у* = *х*2 + 3*х* – 8. Уравнение примет вид *у*2 + 2*ху* – 3*х*2 = 0. Теперь попробуем разложить левую часть этого уравнения на множители. Для этого рассмотрим выражение *у*2 + 2*ху* – 3*х*2 как квадратный трёхчлен, где *у* – переменная, а *х* – параметр, т.е. известная величина.

Найдём корни *у*1 и *у*2 этого квадратного трёхчлена:

, *у*1 = –3*х*, *у*2 = *х*.

Тогда

*у*2 + 2*ху* – 3*х*2 = (*у* – *у*1)(*у* – *у*2) = (*у* + 3*х*)(*у* – *х*).

У нас получилось уравнение

(*у* + 3*х*)(*у* – *х*) = 0.

Отсюда *у* + 3*х* = 0 и *у* – *х* = 0. Вспомним, что *у* = *х*2 + 3*х* – 8, делаем обратную замену и получаем два обычных квадратных уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) *х*2 + 3*х* – 8 + 3*х* = 0,  *х*2 + 6*х* – 8 = 0, | 2) *х*2 + 3*х* – 8 – *х* = 0,  *х*2 + 2*х* – 8 = 0,    *х*3 = –4, *х*4 = 2. |

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В10.** Решите уравнение: а) (*х* + 5)4 – 13*х*2(*х* + 5)2 + 36*х*4 = 0;

б) 2(*х* – 1)4 – 5(*х*2 – 3*х* + 2)2 + 2(*х* – 2)4 = 0.

**Как угадать целые корни уравнения**

***хп + ап*–1*хп*–1 + *ап*–2*хп–*2 + … +*а*1*х* + *а*0 = 0**

**(*ап*–1,*ап*–2, …, *а*0 – целые числа)**

***Утверждение 11.1.*** Если уравнение *хп + ап*–1*хп*–1 + *ап*–2*хп–*2 + +… +*а*1*х* + *а*0 = 0 имеет целые корни, то каждый такой корень является делителем свободного члена *а*0.

Пусть *х*0 – целый корень нашего уравнения. Нам надо доказать, что *а*0 ⋮ *х*0.

*Доказательство*. Подставим *х*0 вместо *х* в наше уравнение. Так как *х*0 – корень, то получим верное числовое равенство:



Видим, что первое слагаемое делится на *х*0, сумма равна нулю, а 0 ⋮ *х*0, значит, и второе слагаемое *а*0 ⋮ *х*0 , что и требовалось доказать. Отсюда следует важный практический вывод: если нам требуется найти целый корень уравнения *хп + ап*–1*хп*–1 + + *ап*–2*хп–*2 + … +*а*1*х* + *а*0 = 0, то следует перебрать *все делители* числа *а*0 (как положительные, так и отрицательные).

*Читатель*: А можно ли при этом утверждать, что уравнение не имеет других *рациональных* корней? Ведь нельзя исключать, что есть корни вида , где – несократимая дробь.

*Автор*: А давайте докажем, что дробных корней наше уравнение иметь не может. Доказательство проведём «от противного».

Предположим, что существует корень нашего уравнения: *х*0 =  , где числа и взаимно простые (иначе дробь была бы сократимой). Тогда справедливо равенство



Умножим обе части равенства на *kn*и получим:





Второе слагаемое делится на *k*, сумма тоже делится на *k*, так как 0 ⋮ *k*, но тогда и первое слагаемое также должно делиться на *k*, т.е. *тп* ⋮ *k*, а значит, поскольку числа и взаимно простые,  *т* ⋮ *k*. Но по нашему предположению дробь  – несократима. Мы получили противоречие. Следовательно, рациональное число не может быть корнем нашего уравнения, а значит, уравнение *хп + ап*–1*хп*–1 + *ап*–2*хп–*2 + … + +*а*1*х* + *а*0 = 0 не имеет дробных корней.

**Задача 11.12.** Найдите все целые корни уравнения:

а) *х*3 + 4*х*2 + *х* – 6 = 0; б) *х*3 + 2*х*2 + 2*х* + 1 = 0.

***Решение***.

а) *х*3 + 4*х*2 + *х* – 6 = 0. Свободный член *а*0 = –6, его делителями являются числа: ±1, ±2, ±3, ±6 – всего восемь чисел. Нам надо последовательно подставить каждое число в наше уравнение и проверить, является оно корнем или нет:

1) 13 + 4⋅12 + 1 – 6 = 1 + 4 – 5 = 0 → *х =* 1 – корень нашего уравнения;

2) (–1)3 + 4⋅(–1)2 + (–1) – 6 = –4 ≠ 0 → *х = –*1 – не корень;

3) 23 + 4⋅22 + 2 – 6 = 20 ≠ 0 → *х =* 2 – не корень;

4) (–2)3 + 4⋅(–2)2 + (–2) – 6 = 0 → *х = –*2 – корень уравнения;

5) 33 + 4⋅32 + 3 – 6 = 60 ≠ 0 → *х =* 3 – не корень;

6) (–3)3 + 4⋅(–3)2 + (–3) – 6 = 0 → *х = –*3 – корень уравнения;

На этом поиск корней можно прекратить, так как уравнение *п*-й степени имеет не более *п* корней.

Итак, мы нашли все три корня нашего уравнения: *х*1 = 1, *х*2 = –2, *х*3 = –3. Других корней ни рациональных, ни иррациональных у этого уравнения быть не может.

*****Читатель*: А почему?

*Автор*: Многочлен 3-й степени *х*3 + *а*2*х*2 + *а*1*х* + *а*0 = 0 можно представить в виде произведения:

*х*3 + *а*2*х*2 + *а*1*х* + *а*0 = (*х – х*1)(*х – х*2)(*х – х*3),

где *х*1, *х*2 и *х*3 – корни данного уравнения. Если бы были ещё корни, то были бы ещё множители (*х – х*4), (*х – х*5) и т.д. Но тогда у нас был бы многочлен более высокой степени, чем 3.

б) *х*3 + 2*х*2 + 2*х* + 1 = 0. Свободный член *а*0 = 1, его делителями являются ±1. Проверим, являются ли числа 1 и (-1) корнями:

1) 13 + 2⋅12 + 2⋅1 + 1 = 6 ≠ 0 → *х =* 1 – не корень нашего уравнения;

2) (–1)3 + 2⋅(–1)2 + 2⋅(–1) +1 = 0 → *х = –*1 – корень.

Больше целых корней нет.

*Ответ*: а) 1, –2, –3; б) –1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В11.** Найдите все целые корни уравнений:

а) *х*3 + 2*х*2 + 3*х* + 2= 0; б) *х*3 – *х*2 – *х* – 2 = 0

в) *х*3 + 5*х*2 + 7*х*  + 3 = 0; г) *х*3 – 4*х*2 – 4*х* – 5 = 0

д) .

**Как найти все корни кубического уравнения**

***х*3 + *aх*2 + *bх* + *c* = 0, если один мы уже знаем**

**Задача 11.13.** Решите уравнение *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 = 0.

***Решение****.* Сначала попробуем найти целые корни нашего уравнения (если они, конечно, есть). Свободный член *а*0 = 2, его делителями являются числа: ±1, ±2. Перебираем их последовательно:

1) *х*0 = 1: 13 – 12 – 5⋅1 + 2 = –3 ≠ 0, не подходит;

2) *х*0 = –1: (–1)3 – (–1)2 – 5⋅(–1) +2= 5 ≠ 0, не подходит;

3) *х*0 = 2: 23 – 22 – 5⋅2 + 2 – 4 ≠ 0, не подходит;

4) *х*0 = –2: (–2)3 – (–2)2 – 5⋅(–2) + 2 = 0, подходит.

Целых корней больше нет. Но если *х* = –2 – корень, то многочлен *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 можно представить в виде произведения: *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 = (*х* + 2)(*х*2 + *px + q*), где *р* и *q* – неизвестные нам пока коэффициенты. Если мы их найдём, то нам останется лишь решить квадратное уравнение *х*2 + *px + q* = 0 и все корни уравнения *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 = 0 будут нами найдены.

Разделим равенство *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 = (*х* + 2)(*х*2 + *px + q*) на *х* + 2 и получим *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 : (*х* + 2) = (*х*2 + *px + q*). Попробуем разделить многочлен *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 на множитель (*х* + 2) «уголком»:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *\_ х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 | | | | *х* + 2 |
| *х*3 + 2*х*2 | | |  | *х*2 – 3*х* + 1 |
|  | \_ –3*х*2 – 5*х*  –3*х*2 – 6*х* | |  |  |
|  |  | \_ *х* + 2 |  |  |
|  |  | *х* + 2 |  |  |
|  |  | 0 |  |  |

Итак, *х*3 – *х*2 – 5*х* + 2 = (*х* + 2)(*х*2 + 3*x +* 1), и наше уравнение принимает вид (*х* + 2)(*х*2 + 3*x +* 1) = 0. Тогда

1) *х* + 2 = 0, *х*1 = – 2 – уже найденный нами корень;

2) *х*2 + 3*x +* 1 = 0, *D* = 33 – 4⋅1 = 5, .

*Ответ*: *х*1 = –2, , .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В12.** Решите уравнение:

а) *х*3 + *х*2 + 2*х* – 4= 0; б) *х*3 – *х*2 – 3*х* – 1 = 0.

**Как угадать рациональные корни уравнения**

***апхп + ап*–1*хп*–1 + … +*а*1*х* + *а*0 = 0**

**(*ап*,*ап*–1, …, *а*0 – целые числа)**

***Утверждение 11.2.*** Если уравнение *апхп* + *ап*–1*хп–*1 +…+ *а*1*х* + + *а*0 = 0 имеет рациональный корень , где – несократимая дробь, то *а*0 ⋮ *т* и *ап*⋮ *k*.

*Доказательство*. Подставим значение  в наше уравнение:



Умножим обе части уравнения на *kп* и получим:



Напомним, что если сумма двух слагаемых делится на число *т* и одно из слагаемых делится на число *т*, то и второе слагаемое делится на число *т*. У нас сумма – это число 0, 0 ⋮ *т*.

Первое слагаемое: 

Значит, и второе слагаемое: делится на .

Так как (по условию дробь  несократима), то и , а значит, , что и требовалось доказать.

Теперь объединим в сумму все члены, кроме первого, и вынесем за скобки число *k*:



Из этого равенства следует, что *аптп* ⋮ *k*, а так как *т*  *k*, то и *тп*  *k*. А значит, *ап* ⋮ *k* , что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что если число  – корень уравнения *апхп* + *ап*–1*хп–*1 +…+ *а*1*х* + *а*0 = 0, то *а*0 ⋮ *m* и *ап* ⋮ *k*.

**Задача 11.14.** Решите уравнение 2*х*4 + 17*х*3 – 17*х*2 – 8*х* + 6 = 0.

***Решение***. Если  – корень данного уравнения, то 6 ⋮ *т* и 2 ⋮ *k*. Следовательно, *т* может принимать значения ±1, ±2, ±3, ±6, а *k* может принимать значения ±1, ±2. Комбинируя всевозможные сочетания *т* и *k*, получим следующий «список кандидатов» на роль корня данного уравнения: ±1, ±2, ±3, ±6,.

Проверим последовательно наших «кандидатов»:

1) *х*0 = 1: 2⋅14 + 17⋅13 – 17⋅12 – 8⋅1 + 6 = 0. Удача! Один корень есть: *х*1 = 1.

Разделим «уголком» (2*х*4 + 17*х*3 – 17*х*2 – 8*x +* 6) на (*х* – 1):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *\_* 2*х*4 + 17*х*3 – 17*х*2 – 8*x +* 6 | | | | | *х* – 1 |
| 2*х*4 – 2*х*3 | | | |  | 2*х*3 + 19*х*2+ 2*х* – 6 |
|  | \_ 19*х*3 – 17*х*2  19*х*3 – 19*х*2 | | |  |  |
|  |  | \_ 2*х*2 – 8*х* | |  |  |
|  |  | 2*х*2 – 2*х* | |  |  |
|  |  |  | \_ –6*х* + 6  –6*х* + 6 | |  |
|  |  |  | 0 | |  |

Итак, наше уравнение принимает вид

(*х* – 1)(2*х*3 + 19*x*2 *+* 2*х* – 6) = 0 → 2*х*3 + 19*х*2+ 2*х* – 6=0.

Далее нам надо решить уравнение: 2*х*3 + 19*х*2+ 2*х* – 6=0.

Выписываем «кандидатов» на рациональные корни. Они такие же, что и для исходного уравнения: ±1, ±2, ±3, ±6,.

Проверим последовательно наших «кандидатов»:

1) *х*0 = 1: 2⋅13 + 19⋅12 + 2⋅1 – 6 = 19 ≠ 0 – не корень;

2) *х*0 = –1: 2⋅(–1)3 + 19⋅(–1)2 + 2⋅(–1) – 6 = 9 ≠ 0 – не корень;

3) *х*0 = : 2⋅ + 19⋅ + 2⋅ – 6 = 0 – корень.

Разделим «уголком» (2*х*3 + 19*х*2+ 2*х* – 6) на (*х* – ):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *\_* 2*х*3 + 19*х*2 + 2*x +* 6 | | | | | *х* – |
| 2*х*3 – *х*2 | | | |  | 2*х*2 + 20*х* + 12 |
|  | \_ 20*х*2 + 2*х*  20*х*2 – 10*х* | | |  |  |
|  |  | \_ 12*х* – 6 | |  |  |
|  |  | 12*х* – 6 | |  |  |
|  |  |  | 0 | |  |

Теперь наше уравнение 2*х*3 + 19*х*2+ 2*х* – 6=0 можно записать так:

(*х* – )(2*х*2 + 20*х* + 12) = 0 → *х* –  = 0 и 2*х*2 + 20*х* + 12 = 0.

Отсюда *х*2 = ; . Мы нашли все корни исходного уравнения.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г9.** Решите уравнение:

а) 6*х*3 – 13*х*2 + 9*х* – 2= 0; б) 24*х*3 – 10*х*2 – 3*х* + 1 = 0.

**Теорема Виета для кубического уравнения**

***х*3 + *ах*2 + *bx + c* = 0**

Если кубическое уравнение имеет три корня: *х*1, *х*2 и *х*3, то его можно записать в виде (*х – х*1)(*х – х*2)(*х – х*3) = 0. Раскроем скобки этого уравнения и получим:

(*х – х*1)(*х – х*2)(*х – х*3) = 0 → [*х*2 – (*х*1 *+ х*2)*х* + *х*1*х*2)](*х – х*3) = 0 →

*х*3 – *х*2(*х*1 *+ х*2) + *х*(*х*1*х*2) – *х*2*х*3 + *х*3(*х*1 *+ х*2)*х* – *х*1*х*2*х*3 = 0 →

*х*3 + *х*2[–(*х*1 *+ х*2 + *x*3)] + *х*(*х*1*х*2 + *х*1*х*3 + *х*3*х*1) *+* (– *х*1*х*2*х*3) = 0.

Теперь сравним полученное выражение с исходным выражением *х*3 + *ах*2 + *bx + c* = 0.

Получаем:

*а* = –(*х*1 + *х*2 + *х*3); (11.1)

*b* = *х*1*х*2 + *х*1*х*3 + *х*2*х*3; (11.2)

*с* = –*х*1*х*2*х*3. (11.3)

А теперь решим задачу.

**Задача 11.15.** Дано уравнение (*х* – 1)(*х*2 + 2*х* – 3) = 0, а *х*1, *х*2, *х*3 – корни данного уравнения. Найдите:

а) *х*1 + *х*2 + *х*3; б) *х*1*х*2 + *х*1*х*3 + *х*2*х*3; в) *х*1*х*2*х*3.

***Решение***. В данном случае можно было бы, конечно, найти корни данного уравнения и вычислить требуемые выражения. Но поскольку корни квадратного уравнения *х*2 + 2*х* – 3 = 0 – иррациональные числа. это будет утомительно. Поэтому поступим по-другому. Раскроем скобки:

(*х* – 1)(*х*2 + 2*х* – 3) = *х*2 + 2*х*2 – 3*х* – *х*2 – 2*х* + 3 =

= *х*3 + *х*2 – 5*х* + 3.

Итак, исходное уравнение принимает вид *х*3 + *х*2 – 5*х* + 3 = 0. А теперь воспользуемся формулами (11.1)–(11.3), учитывая, что у нас *а* = 1, *b* = –5 и *с* = 3:

*х*1 + *х*2 + *х*3 = –*а* = –1;

*х*1*х*2 + *х*1*х*3 + *х*2*х*3 = *b* = –5;

*х*1*х*2*х*3 = –*с*  = –3.

*Ответ*: а) –1; б) –5; в) –3.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В13.** 1) Убедитесь, что уравнения

5*х*(*х* + 1)(*х* – 2) = 0, *х*2(*х +* 1)(2 – *х*)= 0;

*х*(*х* + 1)2(*х* – 2) = 0, *х*(*х* + 1)(2 – *х*)(*х*2 + 1) = 0

имеют одни и те же корни.

2) Составьте несколько уравнений, корнями которых являются числа: а) 1, –3, 4; б) 0, –1, –2, 3.

**Г10.** Составьте какое-нибудь целое уравнение, корнями которого являются числа: а) 2, –3, 5; б) , –2; в) 0, 1, –1, 4,–4. Приведите его к виду *р*(*х*) = 0, где *р*(*х*) – многочлен стандартного вида, и укажите степень уравнения.

**Г11.** Найдите сумму корней уравнения *х*3 – 7*х* + 6 = 0.

**Д3.** Уравнение *х*3 + *рх + q* = 0 имеет три действительных корня: *х*1, *х*2, х2. Найдите  и определите знак числа *р*.

**✍ Домашнее задание**

**Задачи лёгкие**

**Б6.** Решите уравнение *х*6 + 9*х*3 + 8 = 0.

**Б7.** Решите уравнения:

а) *х*8 – 3*х*4 + 2 = 0; б) *х*8 – 5*х*4 + 4 = 0;

в) *х*4 + 3*х*2 – 4 = 0; г) *х*4 + 14*х*2 – 72 = 0.

**Б8.** Решите уравнения:

а) *х*3 – 4*х* = 0; б) *z*3 – 2*z*2 + *z* = 0; в) 3*t* + 3*t*2 = 0;

г) *у*3 – 4*у*2 + 3*у* = 0; д) 81*х*2 – *х*4 = 0; е) 6*и*2 + 5*и*3 + *и*4 = 0.

**Б9.** Решите уравнения:

а) 16*у*3 = *у*; б) 4*х*3 + 3*х*2 = *х*2; в) 16*z* – 6*z*2 = *z*3;

г) *u*3 + *u* = 2*u*; д) 9*z*2 = *z*4; е) 14*x* + *x*2 = *x*3 – 4*x*2.

**Б10.** Докажите, что уравнение *х*4 – 3*х*3 + 3*х* + 1 = 0 не имеет рациональных корней.

**Задачи средней трудности**

**В14.** Решите уравнение 27*х*6 – 215*х*3 – 8 = 0.

**В15.** Составьте биквадратное уравнение 4-й степени, если известно, что его корнями являются числа 3 и 4.

**В16.** Решите уравнение:

а) (*х*2 + 6*х*)2 – 5(*х*2 + 6*х*)= 24; б) (*х*2 – 2*х* – 5)2 – 2(*х*2 – 2*х –* 5)= 3;

в) (*х*2 + 3*х* – 25)2 – 2(*х*2 + 3*х –* 25)= –7;

г) (*у* + 2)4 – (*у +* 2)2 = 12;

д) (*х*2 + 2*х*)(*х*2 + 2*х +* 2)= 3;

е) (*х*2 – *х* – 16)(*х*2 – *х +* 2)= 88;

ж) (2*х*2 + 7*х* – 8)(2*х*2 + 7*х –* 3) – 6 = 0.

**В17.** Решите уравнение:

а) *у*2(*у* + 1) – 2*у*(*у* + 1) – 3(*у* + 1)= 0;

б) 2*у*2(2*у* – 3) + *у*(2*у* – 3) – (2*у* – 3) = 0;

в) 7(*у*2 – 1) + 4*у*(*у*2 – 1) – 3*у*2(*у*2 *–* 1)= 0;

г) 4(*у* – *у*2) + 3*у*(*у –* *у*2) – *у*2(*у – у*2)= 0;

д) (2 – *х*)3 = 2*х – х*2.

**В18.** Решите уравнения:

а) 5*х*4 + 2*х*3 – 5*х* – 2= 0; б) *z*5 – *z*3 + *z*2 – 1 = 0;

в) *у*5 – 3*у*4 – 8*у*2 + 24*у* = 0; г) 8*х*4 + 16*х*3 – *х* – 2 = 0.

**В19.** Решите уравнения:

а) *х*3 + *х*2 – 4*х* – 4= 0; б) 3*х*3 + 5*х*2 + 5*х* + 3 = 0;

в) *х*3 – *х*2 – 81*х* + 81 = 0; г) *х*3 + 3*х*2 – 16*х* – 48 = 0.

**В20.** Решите уравнение:

а) 3*х*3 – *х*2 – 27*х* + 9= 0; б) 2*х*3 + *х*2 + 6*х* + 3 = 0;

в) 3 + *х* – 3*х*2 – *х*3 = 0; г) 5*х*3 – *х*2 + 20*х*– 4 = 0;

д) *х*4 + 5*х*3 – 4*х*2 – 20*х* = 0; е) *х – х*2 + 2*х*3– 2*х*4 = 0.

**В21.** Решите уравнение *х*3 – 7*х* + 6= 0.

**В22.** Решите уравнения:

а) *х*3 + 2*х*2 + 2*х* – 1= 0; б) *х*3 + 2*х*2 – 2*х* – 1 = 0;

в) 2*х*3 + *х*2 + *х* + 2 = 0; г) 2*х*3 + 3*х*2 – 3*х* – 2 = 0.

**В23.** Решите уравнение:

а) *х*4 – 7*х*3 + 14*х*2 – 7*х* + 1 = 0;

б) 2*х*4 + *х*3 – 11*х*2 + *х* + 2 = 0;

в) 6*х*4 + 7*х*3 – 36*х*2 – 7*х* + 6 = 0;

г) 78*х*4 – 133*х*3 + 78*х*2 – 133*х* + 78 = 0.

**В24.** Решите уравнение с параметром:

а) *х*4 – (*а*2 + 3)*х*2 + 3*а*2 = 0; б) *х*4 – (*а*3 + 2)*х*2 + 2*а*3 = 0;

в) *х*6 + (*а*3 – 8)*х*3 – 8*а*3 = 0; г) *х*6 +(8*а*3 + 27)*х*3 + 216*а*3 = 0.

**В25.** Найдите все целые корни уравнения:

а) *х*3 – 2*х*2 – *х* + 2= 0; б) *х*3 – *х*2 – 4*х* + 4 = 0;

в) *х*3 + *х*2 – 5*х* + 3= 0; г) *х*3 – 6*х*2 – 6*х*– 7 = 0;

д) *х*3 + 11 *х*2 + 11*х* + 1= 0; е) *х*4 *+* 4*х*3 – 29*х*2– 16*х* + 20 = 0.

**В26.** Решите уравнения: а) *х*3 – 2*х*2 – 9= 0; б) *х*3 – 6*х*2 + 5*х* + 12 = 0.

**В27.** Определите, какой вид имеют рациональные корни *х*0 = *р*/*q* уравнения с целыми коэффициентами *апхп + ап*–1*хп*–1 +…+ *а*1*х* + *а*0 = 0, если: а) *а*0 = 1; б) *ап* = 1; в) *а*0 = 0 (укажите один корень).

**В28.** Составьте несколько равносильных уравнений вида *р*(*х*) = 0, где *р*(*х*) – некоторый многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа: а) –4,  и ; б) –1, –, 0 и .

**В29.** Составьте уравнение 3-й степени и уравнение 4-й степени, каждое из которых имеет два корня: 0 и –2.

**Задачи трудные**

**Г12.** При каких значениях *а* биквадратное уравнение *х*4 + *ах*2 + +*а* – 1 = 0 имеет лишь два различных корня?

**Г13.** Решите уравнение:

а) (*х*2 + 5*х* + 4)(*х*2 + 5*х* + 6) – (*х*2 + 5*х* – 4)(*х*2 + 5*х –* 6)= 0;

б) .

**Г14.** Решите уравнение .

**Г15.** Решите уравнение:

а) (*х* – 2)(*х* – 3)2(*х* – 4)= 20; б) (*х*2 – 3*х*)(*х* – 1)(*х –* 2)= 24;

в) (*х*2 – 5*х*)(*х* + 3)(*х –* 8) + 108= 0; г) (*х* + 4)2(*х +* 10)(*х* – 2) + 243= 0.

**Г16.** Решите уравнение:

а) (2*х*2 – 3*х*  + 1)(2*х*2 + 5*х* + 1)= 9*х*2;

б) (*х* + 2)(*х* + 3)(*х* + 8)(*х +* 12)= 4*х*2.

**Г17.** Решите уравнение:

а) ; б) .

**Г18.** Решите уравнение:

а) *х*3 – *х*2 + *ах* + 12 = 0, если известно, что один из его корней равен –3;

б) 2*х*3 + 11*х*2 + 17*х* + *а* = 0, если известно, что один из его корней равен –0,5.

**Г19.** Решите уравнение, выполнив подходящую замену переменной: а) 9*х*4 – 37*х*2 + 4= 0; б) 25*х*4 + 66*х*2 – 27 = 0;

в) *х*6 + 9*х*3 + 8 = 0; г) 27*х*5 – 215*х*3 – 8 = 0.

**Г20.** Решите уравнение:

а) *х*4 – *х*3 – 13*х*2 + *х +* 12= 0; б) *х*4 – *х*3 – 7*х*2 + *х* + 6 = 0.

**Г21.** Решите уравнение *х*4 – *х*3 – 3*х*2 + 2*х* + 2 = 0.

**Г22.** Решите уравнение:

а) *х*4 – 5*х*3 + 10*х*2 – 10*х* + 4= 0; б) *х*4 – *х*3 – 10*х*2 + 2*х* + 4= 0.

**Г23.** Решите уравнение (*х*2 – *х* –1)3 + (*х*2 – 3*х* + 2)3 = (2*х*2 – 4*х* + 1)3 методом замены переменной.

**Г24.** Решите уравнение:

а) *ах*3 – 2*х*2 – 5*х* + 6 = 0, если известно, что один из его корней равен –2;

б) *х*3 – *ах*2 – 5*х* + 6 = 0, если известно, что один из его корней равен 3.

**Г25.** Докажите, что многочлен *х*4 – 4*х*3 – 6*х*2 – 3*х* + 9 не имеет отрицательных корней.

**Г26.** Докажите, что уравнение 6*х*5 – 12*х*4 + 18*х* = 171 не имеет целых корней.

**Г27.** Решите уравнение:

а) 2*х*3 – 3*х*2 – 11*х* + 6= 0; б) 2*х*5  + *х*4 – 10*х*3 – 5*х*2 *+* 8*х* + 4 = 0.

**Г28.** Если в многочлен *ах*3 + *bx*2 + *сх* + *d* вместо *а*, *b*, *с* и *d* подставлять числа –7, 4, –3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например: –7*х*3 + 4*x*2 – 3*х* + + 6, 4*х*3 – 7*x*2 + 6*х* – 3 и т.д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень

**Г29.** Поделите многочлен 2*х*5 + *х* + 1 на (*х* – 1).

**Г30.** Решите уравнение 6*х*4 + 11*х*3 + 26*х*2 – 9*х* – 10 = 0, угадав корни и разложив многочлен на множители.

**Задачи очень трудные**

**Д4.** Сколько решений имеет уравнение (*х* + 2)2(*х*2 + 4*х* + 5) = = *а*(*а* – 1) в зависимости от *а*?

**Д5.** Решите уравнение *х*4 + *х*3 – 3*х*2 – 5*х* – 2 = 0 методом разложения на множители.

**Д6.** Найдите корни уравнения

2*х*8 – 9*х*7 + 20*х*6 – 33*х*5 + 46*х*4 – 66*х*3 + 80*х*2 – 72 *х* + 32 = 0.

