**Заочный физико-математический лицей**

**«Авангард»**

Е. Н. Филатов

# алгебра

**9**

##### **Экспериментальный учебник**

**Часть 2**

******

###### **МОСКВА – 2017**

Заочный физико-математический лицей

«Авангард»

Е. Н. Филатов

# алгебра

9

##### Экспериментальный учебник

Часть 2

###### МОСКВА – 2017

Филатов Е. Н. Математика-9. Часть 2. Экспериментальный учебник. – М.: ЗФМЛ «Авангард», 2017. – с.

Учебник предназначен для углубленного изучения математики в 9-м классе. Главная цель учебника – научить учеников самостоятельно решать задачи, поэтому большое количество задач предлагается для самостоятельного решения. Все задачи условно разбиты на пять категорий сложности. К большинству задач приведены «подсказки» (краткие рекомендации к их решению) и ответы.

© *Е.Н. Филатов, 2017*

© *Заочный физико-математический лицей «Авангард», 2017*

Макет подготовлен *Е.Н. Кочубей*

Подписано в печать . Формат 60×84/16.

Объем 18,0 п.л. Печать офсетная. Тираж экз. Заказ .

Автономная некоммерческая организация

"Заочный физико-математический лицей "Авангард"
(АНО ЗФМЛ "Авангард"). 115446, Москва, Коломенский проезд, 16

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Глава 2. Неравенства.**

§ 1. Числовые неравенства 4

§ 2. Линейные неравенства 33

§ 3. Квадратные неравенства 57

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 4. Функция или НЕ функция? 89

§ 5. Область определения функции 94

§ 6. Область значений функции 103

§ 7. Нули функции и промежутки знакопостоянства 112

§ 8. Возрастание, убывание, монотонность 117

§ 9. Функции четные и нечетные………………………….129

§ 10.Ограниченность функции. Максимум и минимум..144

§ 11. Точки пересечения графиков. Уравнения.

 Системы уравнений. Неравенства………………….152

§ 12. Полное исследования функции……………………..158

 ДЕЛИМОСТЬ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

§ 13. Делится или не делится? .. 167

§ 14. НОК, НОД, Алгоритм Евклида……………………….182

§ 15. Диофантовы уравнения……………………………….204

§ 16. Деление с остатком…………………………………….213

§ 17. Числа простые и составные…………………………..231

ПОДСКАЗКИ 238

ОТВЕТЫ 262



**Глава 2. Неравенства**

**§ 1. Числовые неравенства**

Мы знаем, что любые два числа можно *сравнить*. При этом для любых двух чисел *а* и *b* будет справедливым одно из трёх утверждений: либо *а* < *b*, либо *a = b*, либо *a > b*.

Утверждение вида *а* < *b* или *a > b* называется *числовым неравенством*. Например: 2 < 3, 0 > –100,  и т.д.

Мы знаем, что всякое утверждение может быть либо истинным, либо ложным. Поэтому и числовые неравенства могут быть как истинными, так и ложными, например: неравенство 2 < 3 – истинно, а 2 > 3 – ложно.

*Читатель*: А можно ли дать *строгое определение* понятия числового неравенства?

*Автор*: Конечно. И это определение достаточно очевидно.

***Определение 1*: *Число а больше числа b (a > b), если а – b > 0; число а меньше числа b (a < b), если а – b < 0.***

А теперь, исходя из этого определения, попробуйте *строго* доказать, казалось бы, очевидное утверждение: ***если a > b, то b < a*.**

*Читатель*: Если *а* > *b*, то *а – b* > 0, т.е. (*a – b*) – число положительное, но тогда противоположное ему число –(*a – b*) = –*а* + *b* = *b – а* есть число отрицательное, а если *b – a <* 0, то *b < a*, что и требовалось доказать.

*Автор*: Верно! Назовём это утверждение *свойством 1:*

***Свойство 1. Если a > b, то b < a***.

Теперь вспомним, что неравенства бывают строгие (*a > b, a < b*) и нестрогие (*а* ≥ *b*, *a* ≤ *b*). Утверждение: *а* ≥ *b* означает, что справедливо одно из двух утверждений: либо *а* < *b*, либо *a = b*. На языке математической логики это можно записать так:

{*a* ≥ *b*} = {*a > b*}∨{*a = b*}.

Например: верными являются нестрогие неравенства: 2 ≥ 1, 2 ≥ 2.

Аналогично, утверждение: *а* ≤ *b* означает: либо *а* < *b*, либо *a = b*, т.е. {*a* ≤ *b*} = {*a < b*}∨{*a = b*}.

Например, верными являются нестрогие неравенства: 2 ≤ 3 и 2 ≤ 2.

**Задача 1.1.** Сравните числа: а)  и 0,33; б) 4,(2) и .

***Решение***. Сравнить два числа *а* и *b* – это значит выяснить, какое из трёх утверждений: *а* < *b*, *a = b* или *a > b* в данном случае имеет место. Воспользуемся *Определением 1*: если *а* – *b >* 0, то *a > b*, если *а* – *b <* 0, то *a < b*, и вычислим разности тех чисел, которые нам надо сравнить.

а)  – 0,33 = > 0. Значит, > 0,33.

б) Вспомним, что запись 4,(2) означает бесконечную десятичную дробь: 4,(2) = 4,22222…, а = 4,2. Получаем разность чисел: 4,(2) –  = 4,22222… – 4,2 = 0,022222… > 0. Значит, 4,(2) > .

*Ответ*: а) > 0,33; б) 4,(2) > .

СТОП! Решите самостоятельно.

Сравните числа.

**А1.** а) 3,(7) и ; б) 0,(1) и ; в) 6,(3) и.

**Б1.** – 1 и -.

**В1.** а)  и 662; б)  и 3,94 + 1,94.

**Задача 1.2.** Сравните числа *х* и *у*, если:

а) *х – у* = (–2,7)18; б) *х – у* = (–1,116)9.

***Решение***. Если *х* – *у* > 0, то *х* > *y*, а если *х* – *у* < 0, то *х* < *y.*

а) *х – у* = (–2,7)18. Любое число, не равное нулю, в чётной степени положительно: *а*2*п* > 0. Значит, (–2,7)18 > 0, следовательно, *х* > *у*.

б) *х – у* = (–1,116)9. Отрицательное число в нечётной степени отрицательно: *а*2*п* + 1 < 0, если *а* < 0. Значит, (–1,116)9 < 0, следовательно, *х* < *у*.

*Ответ*: а) *x > у*; б) *x* < *y*.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А2.** Известно, что *a < b*. Может ли разность *a – b* выражаться числом: а) –8,01; б) (–6,4)5; в) |–3,3|; г) (–2)35?

**Б2.** Пусть *a < b*. Сравните числа:

а) *а + х* и *b* + *х*; б) *а –* 5 и *b* – 5;

в) *а – b*2 и *b – b*2; г) *а + х*2 и *b* + *х*2.

**В2.** Пусть *a < b*. Сравните числа:

а) –2(*а* + 4) и –2(*b* + 4); б)  и .

**В3.** Докажите, что если 4*а* – 2*b* > 3*а* – *b*, то *а > b*.

**Свойство транзитивности**

*Автор*: Как доказать, что если *a < b* и *b < c*, то *а < с*?

*Читатель*: Это же очевидно: если *a < b*, то число *а* находится на числовой оси *левее* числа *b*, а если *b < c*, то число *b* находится на числовой оси *левее* числа *а* (рис. 1.1). Значит, точка *а* левее точки *с*!

  Рис. 1.1

*Автор*: А нельзя доказать данное утверждение исходя только из *Определения 1*: *а* < *b*, если *a – b* < 0?

*Читатель*: То есть нам дано, что *a < b* (*a – b* < 0) и *b < c* (*b – c* < 0), а надо доказать, что *a < c* (*a – c <* 0)?

*Автор*: Совершенно верно.

*Читатель*: число *b*: *a – c = a – b + b – c* (я прибавил и вычел число *b*), получаем (*а – с*) *=*.

Получается, что число (*а – с*) – это сумма двух отрицательных чисел, а значит, (*а – с*) – число отрицательное, т.е. *а – с* < 0, что и требовалось доказать.

*Автор*: Правильно. Это свойство числовых неравенств называется свойством *транзитивности*. Запомним!

***Свойство 2*. *Если а < b и b < c, то а < c.***

**Задача 1.3.** Сравните, если возможно, *а* и *d*, если известно, что: а) *а = b*, *b < c*, *c* ≤ *d*; б) *а* ≥ *с*, *b = c*, *d* ≤ *b*.

***Решение*.** Прежде всего, заметим, что сравнить числа *а* и *d* – это значит указать, какоеиз данных трёх соотношений верно: *a < d*, *a = d* или *а > d*. Если мы говорим, что *а* ≥ *d*, – это не сравнение, так как это лишь утверждение: либо *a < d*, либо *a = d*.

а) *а = b*, *b < c*, *c* ≤ *d*. Надо сравнить *а* и *d.*

Так как *а = b*, *b < c*, то *a < c*, получаем: *а < с* и *с* ≤ *d*. Вспомним, что нестрогое неравенство *c* ≤ *d* означает: либо *c* < *d*, либо *c* = *d.* Рассмотрим эти случаи последовательно:

1) если *c < d*, то *a < c* и *c < d*, значит, по свойству транзитивности неравенств *a < d*;

2) если *c = d*, то *a < c* и *c = d*, значит, *a < d*.

Получается, что в любом случае *a < d*.

б) *а* ≥ *с*, *b = c*, *d* ≤ *b*. Требуется сравнить *a* и *d* . Так как *b = с* и *d* ≤ *b*, то *d* ≤ *с*, получаем: *d*≤ *c* и *а* ≥ *с* (или *с* ≤ *а*).

1) если *d* ≤ *с*, то либо *d < c*, либо *d = с*;

2) если *c* ≤ *а*, то либо *с < а*, либо *c = а*.

Разберем четыре возможных варианта:

1) *d < c* и *c < a* → *d < a* (по свойству 2);

2) *d < c* и *c = a* → *d < a*;

3) *d = c* и *c < a* → *d < a*;

4) *d = c* и *c = a* → *d = a.*

 Итак, в трёх вариантах *d < a*, а в четвёртом *d = a*. Поэтому можно лишь утверждать, что *d* ≤ *а* – а это не сравнение! Значит, числа *а* и *d* сравнить нельзя.

*Ответ*: а) *a < d*; б) нельзя сравнить.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б3.** Известно, что: *а < c*, *b > c*, *d* > *b*. Сравните: *а* и *b*, *а* и *d*, *с* и *d*.

**Б4.** Известно, что: *т >* 0, *k <* 0, *m* < *n*. Сравните: *m* и *k*, *k* и *n*, *n* и 0.

**В4.** Сравните, если возможно, *а* и *d*, если известно, что:

а) *а < b*, *c* ≥ *b*, *c* ≥ *d*; б) *а* ≤ *b*, *c > b*, *c* ≤ *d*.

**Сложение неравенств**

Пусть справедливы неравенства *а* < *b* и *c < d*, тогда будет справедливо неравенство *а + c* < *b + d*. Словами это свойство неравенств можно сформулировать так: *если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получим верное неравенство.*

Докажем это свойство строго.

Пусть *a < b* и *c < d*, тогда *a – b* < 0 и *c – d* < 0. Составим разность (*а + с*) – (*b + d*) и докажем, что она меньше нуля. В самом деле: (*а + с*) – (*b + d*) = *а + с* – *b – d =* (*а – b*) + (*с – d*) – это сумма двух отрицательных чисел, а значит, это – отрицательное число. Итак, (*а + с*) – (*b + d*) < 0, следовательно, (*а + с*) < (*b + d*), что и требовалось доказать.

Запомним!

***Свойство 3: если а < b и с < d, то a + c < b + d.***

**Задача 1.4.** Докажите, что .

***Решение***. Сначала докажем неравенство:

  .

Для этого составим ровно 100 неравенств:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) ;2) ; | 3) ; ……………….100) . |

Сложим их почленно и получим:

.

Значит, 1.

Теперь докажем неравенство .

Но сначала ответим на вопрос: если *a < b*, а *c* ≤ *d*, то верно ли неравенство *a + c < b + d*?

*Читатель*: Наверное, надо рассматривать два случая:

 1) *a < b* и *с < d* ; 2) *a < b* и *с* = *d.*

В первом случае по *Свойству 3*: *a + c < b + d.*

Во втором случае cоставим разность (*а + с*) – (*b + d*) = = *a – b* < 0 →(*a + c*) *< b + d*.

Значит, если *a < b* и *c* ≤ *d*, то *a + c < b + d*.

*Автор*: Всё верно. Теперь вернёмся к нашему неравенству .

Составим 100 неравенств: 99 строгих и одно нестрогое:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) ;2) ;3) ;……………… |  …………………..99) ;100) . |

Сложим их почленно и получим:

.

Итак, мы доказали, что 1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А3.** Выполните почленное сложение неравенств:

а) 8 > –1 и 1,5 > 1,3; б) –2,4 < –2,1 и 0,6 <1,3.

**Б5.** Верно ли, что:

а) если *х* > 2 и *у* > 10, то *х + у* > 12, *х + у* > 10, *х + у* > 20;

б) если *х* < и *у* < , то *х + у* < 1, *х + у* < 0, *х + у* < 3.

**В5.** Не вычисляя значения суммы, сравните:

а) 0,7541 + 0,521 и 1; б) 298 + 75 +361 и 1000;

в) 0,204 + 0,205 + 0,215 + 0,218 + 0,209 и 1.

**Г1.** Докажите, что .

**Умножение обеих частей неравенства**

**на одно и то же число**

*Если a < b и с – положительное число, то ас <bc;*

*если a > b и с – положительное число, то ас >bc.*

Докажем данное утверждение.

1. Так как *а < b*, то *a – b <* 0 по *Определению 1*.
2. Составим разность: *ас – bc = с*(*a – b*).
3. Пусть *с* > 0, тогда *с*(*a – b*) < 0 как произведение положительного и отрицательного чисел, значит, *ас – bc <* 0 → *ac < bc*, ч.т.д.
4. Пусть *с* < 0, тогда *с*(*a – b*) > 0 как произведение двух отрицательных чисел, значит, *ас – bc >* 0 → *ac > bc*, ч.т.д.

Итак, мы получили еще одно *свойство*  неравенств. Запомним!

*Свойство 4.*

* ***Если обе части верного неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;***
* ***Если обе части верного неравенства умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.***

Заметим, что разделить неравенство на число *а* ≠ 0 – это всё равно что умножить его на число .

**Задача 1.5.** а) Умножьте обе части данного неравенства на указанное число: 1) –3 < 2 на 2; 2) –3 < 2 на (–2).

 б) Разделите обе части данного неравенства на указанное число: 1) –2 < 3 на 3; 2) –25 > –30 на (–5).

***Решение***.

а) 1) –3 < 2 → –3⋅2 < 2⋅2 → –6 < 4;

 2) –3 < 2 → –3⋅(–2) > 2⋅(–2) → 6 > –4.

б) 1) –2 < 3 ;

 2) –25 > –30  .

*Ответ*: а) –6 < 4; 6 > –4; б); 5 < 6.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А4.** Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, умножив обе части неравенства на одно и то же положительное число: а) 15 < 20; б) 5 > 4; в) –2,5 < 3; г) 1,1 < 1,2; д) 1,3 ≥ 1,2; е) –5 ≤ 6.

**Б6.** Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, в котором каждое число замещено на противоположное: Например: так как 19 > 13, то –19 < –13.

а) 3 > 0; б) 5 > –1; в) –9 < –1; г) –5 ≤ –1; д) 9 ≥ –2; е) 0 ≤ 3.

**В6.** Известно, что 2,8 < и . Оцените значение выражения:

а) ; б) ; в) ; г) .

**Задача 1.6.** а) Умножьте неравенство: –0,75*x* > на –0,75.

б) Определите, верно ли, что если *а* < –5, то *а*2 < –5*а*.

в) Известно, что *k* > 3, *l* > 7; оцените значение выражения:

 –4*k –* 5*l.*

г) Докажите, что если *т* < 4,5, то .

***Решение***.

а) При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число его знак меняется на противоположный. Учтём, что 0,75 =, тогда

–0,75*x* >.

б) Если умножить обе части неравенства *а* < –5на *а*,получим *а*2 < –5*а*. Но это верно, *только если а > 0*.

Если *а* < 0, знак неравенства надо изменить на противоположный: *а*2 > –5*а*.

в) Известно, что *k* > 3, *l* > 7. Нам надо оценить значение выражения –4*k –* 5*l*:

*k* > 3 → (–4)*k* < (–4)⋅3 → –4*k* < –12;

*l* > 7 → (–5)*l* < (–5)⋅7 → –5*l* < –35.

Теперь сложим полученные неравенства почленно:

–4*k –* 5*l* < (–12) + (–35) → –4*k –* 5*l* < –47.

г) Надо доказать, что если *т* < 4,5, то :

*т* < 4,5 → .



Значит, , что и требовалось доказать.

*Ответ*: а) ; б) да, если *а* > 0; в) –4*k –* 5*l* < –47.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б7.** Умножьте неравенства:

а) 3*х* < 9*а* – 15*b* на 3; б) –5*х* > 10*а* – 5*b* на -5; в)  на.

**Б8.** Верно ли, что: а) если *а* > 2, то *а*2 >2*а*;

б) если *а* < 2, то *а*2 < 2*а*; в) если *а* > –5, то *а*2 > –5*а*.

**В7.** Известно, что *k* > 3, *l* > 7. Оцените значение выражения:

а) 2*k +* 3*l*; б) –*k – l*; в) *k +* 1,5*l*.

**В8.** Докажите, что если *т* < 4,5, то:

а) ; б) ; в) .

**Если *a < b* и *с* – любое число, то *a + c < b + c***

Докажем это утверждение. Составим разность:

(*a + c*) – (*b + c*) = (*a – b*) + (*c – c*) = *a – b*.

Так как *а < b*, то *a – b*  < 0, значит, (*a + c*) – (*b + c*) < 0, т.е. *a + c* < *b + c*, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали ещё одно свойство числовых неравенств.

***Свойство 5*. *Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство****.*

Из этого свойства вытекает ещё одно.

***Свойство 6*. *Всякое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный****.*

Докажем это.

Нам дано *а* > *b + c*.

Надо доказать: *a – c > b.*

 Прибавим к обеим частям неравенства (–*с*), получим:

*a +* (*–c*) > *b + c +* (–*c*) → *a – c > b*, что и требовалось доказать.

Как Вы помните, такие же действия можно производить при решении уравнений.

**Задача 12.7.** Докажите: если *х*(*х* + 3) < (*х* + 2)2, то *х* > –4.

***Решение***. *х*(*х* + 3) < (*х* + 2)2 → *х*2 + 2*х* < *x*2 + 4*x* + 4. Прибавим к обеим частям неравенства (–*х*2) и получим:

(–*х*2) + *х*2 + 2*х* < (–*х*2) + *x*2 + 4*x* + 4 → 2*х* < 4*x* + 4.

Перенесём 2*х* из левой части в правую, а 4 из правой части в левую, поменяв их знаки на противоположные:

2*х* < 4*x* + 4 → –4 < 4*x* – 2*x* → –4 < 2*x* → 2*x* > –4,

что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А5.** Известно, что *a > b*. Запишите неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям данного неравенства прибавить число 10; –17; *т*; *b + c*; –*b*;

в) из обеих частей данного неравенства вычесть число 6; –9; *b – c*; *a*.

**Б9.** Выясните, какое из двух чисел: *т* и *п* больше, если известно, что:

а) *т* + 12 < *п* + 12; б) 3,5 – *т* > 3,5 – *п*;

в) –0,3 – *т* > –0,3 – *п*; г) 4,9 + *т* < 4,9 + *п*.

**В9.** Докажите, что:

а) если *х*(*х* + 2) < (*х* – 2)(*х* + 3), то *х* < –6;

б) если *х*(*х* + 6) > (*х* + 1)(*x* + 4), то *х* > 4;

в) если (*х* – 3)2 < *х*(*х* – 5), то *х* > 9.

**Оцениваем значение выражения**

**Задача 1.8.** Известно, что 10 < *a* < 16. Оцените значение выражения: а) 0,5*а*; б) *а* – 16; в) –3*а*; г) 2*а* + 1.

***Решение***.

а) Напомним, что двойное неравенство 10 < *a* < 16 – это краткая запись двух неравенств: 10 < *a* и *а* < 16.

Каждое из этих двух неравенств можно умножить на 0,5, получаем:

10⋅0,5 < *a*⋅0,5 → 5 < 0,5*а*; *a*⋅0,5 < 16⋅0,5 → 0,5*а* < 8.

Полученные неравенства можно записать в виде двойного неравенства: 5 < 0,5*a* < 8, что и будет являться *оценкой* выражения 0,5*а* (т.е. мы указали, в каких границах находится эта величина).

*Читатель*: Но стоило ли переводить двойное неравенство в два обычных? Можно было сразу произвести умножение:

10⋅0,5 < *a*⋅0,5 < 16⋅0,5 → 5 < 0,5*а* < 8.

*Автор*: Вы правы. В дальнейшем так и будем делать.

б) 10 < *a* < 16→ 10 – 16 < *a* – 16 < 16 – 16 → –6 < *a* – 16 < 0.

в) 10 < *a* < 16→ (–3)⋅10 > *a*⋅(–1) > 16⋅(–1) →

–30 > –3*a* > –48 → –48 < –3*a* < < –30 (здесь при умножении на –3 мы поменяли знаки неравенств на противоположные).

г) 10 < *a* < 16 → 2⋅10 < 2⋅*a* < 2⋅16 →

2⋅10 + 1 < 2⋅*a* + 1 < < 2⋅16 + 1 → 21 < 2*a* + 1 < 33.

*Ответ*: а) 5 < 0,5*а* < 8; б) –6 < *a* – 16 < 0; в) –48 < –3*a* <–30; г) 21 < 2*a* + 1 < 33.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А6.** Можно ли утверждать, что *х* < *у*, если: а) 2 – *х* > 2 – *у*;

б) –3,5*х* > –3,5*у*; в) –41 + *х* < –41 + *у*; г) .

**Б10.** Известно, что *т* > 1, *п* > 4. Оцените значение выражения:

а) *т + п* + 4; б) 12 – 4*п* – 3*т*; в) 3 – 2*т* – 5*п*; г) 7*т* + 6*п* + 1.

**Б11.** Докажите, что если *b* > 0,5, то:

а) 2*b* + 4 > 5; б) –6*b* + 8 < 5; в) 4,5*b* – 3,25 > –1; г) –7*b* –2 < –5,5.

**В10.** Известно, что 2,6 << 2,7. Оцените значение выражения:

а) ; б) ; в) ; г) .

**Можно ли умножать неравенство на неравенство?**

*Автор*: Как Вы считаете, если *а* > *b* и *c > d*, то можно ли утверждать, что *ас* > *bd*? Т.е. будет ли верным неравенство, полученное почленно умножением левых и правых частей двух верных неравенств одного знака?

*Читатель*: Я думаю, что если *a > b >* 0 и *c > d >* 0, т.е. все числа положительные, то да. Ведь если считать, что *а* и *с* – стороны одного прямоугольника, а *b*  и *d* – стороны другого прямоугольника, при этом *а* > *d* и *c > b*, то *ас* и *bd* – площади этих прямоугольников. Ясно, что площадь прямоугольника со сторонами *а* и *с* будет больше площади прямоугольника со сторонами *b* и *d* (рис. 1.2).



Рис. 1.2

*Автор*: Согласен! Приведём теперь чисто алгебраическое доказательство этого утверждения.

Пусть *a > b >* 0 и *c > d >* 0, докажем, что *ас* > *bd.*

Составим разность *ac – bd*. Сделаем такую «хитрость»: прибавим и вычтем к этой разности *bc*, получим:

*ac – bd + bc – bc = ac –bc + bc – bd = c*(*a – b*) + *b*(*c – d*).

Таким образом, *ac – bd = c*(*a – b*) + *b*(*c – d*).

Заметим, что так как *a > b*, то *a – b* > 0; а так как *c > d*, то *с – d* > 0. Кроме того, *с* > 0 и *b >* 0. Значит, и всё выражение *c*(*a – b*) + *b*(*c – d*) > 0, следовательно, *ac – bd* > 0 → *ac* > *bd.*

Итак, мы доказали еще одно важное свойство.

***Свойство 7. Если a > b > 0 и c > d > 0, то ас > bd.***

*Автор*: Теперь зададимся вопросом: можно ли перемножать неравенства *a > b*  и *c > d*, если *b*< *a*< 0и *d*< *c*< 0, т.е. если все числа: *a,*  *b,*  *c и*  *d* отрицательные?

*Читатель*: Если сделать такие же преобразования, то получим: *ac – bd = c*(*a – b*) + *b*(*c – d*). Но здесь *a – b* > 0 и *c – d* > 0, а *c* < 0 и *b* < 0, т.е. у нас сумма двух отрицательных чисел: *c*(*a – b*) < 0 и *b*(*c – d*) < 0, а значит,

*c*(*a – b*) + *b*(*c – d*) = *ac –* *bd* < 0 → *ac <* *bd.*

Следовательно, в этом случае знак неравенства надо изменить на противоположный.

*Автор*: Верно!

Итак, мы доказали

***Свойство 8***.

***Если b < a < 0 и d < c < 0, то bd* >** ***ас.***

А теперь рассмотрим случай, когда *a > b* > 0 и 0 > *c > d*. В этом случае перемножать неравенства вообще нельзя, так как может получиться всё, что угодно. Например:

 

т.е. при перемножении неравенств знак неравенства может сохраняться, а может меняться на противоположный.

*Автор*: Теперь следующий вопрос: при *a > b* > 0 можно ли утверждать, что *aп > bп*, если *п* – натуральное число?

*Читатель*: Конечно! Возьмём *п* неравенств:  и последовательно перемножим их почленно. Получим *aп > bп*.

*Автор*: Верною.Запомним!

***Свойство 9. Если а > b > 0, то ап > bп , п ∈ .***

А можно ли утверждать, что если *b* ***<*** *a* ***<***0, то *bп****<*** *aп*?

*Читатель:* Я думаю, что нет. Если *b* ***<*** *a* ***<*** 0 , то при перемножении двух неравенств *b* ***<*** *a* и *b* ***<*** *а* по *свойству 8* мы получим неравенство *b*2>*а*2, т.е. мы должны поменять знак неравенства на противоположный.

*Автор:* Согласен! А если перемножить *а*2 < *b*2 и *а*2 < *b*2?

*Читатель:* Поскольку 0 < *а*2 < *b*2, знак неравенства не изменится. Получится *а*4 < *b*4.

*Автор:* Верно. Аналогично получаем *а*6 < *b*6, *а*8 < *b*8, и т.д.

*Читатель:* Получаем, что если *b* ***<*** *a* ***<***0, то *b*2*п* ***>*** *a*2*п*?

*Автор:* Совершенно верно! Запомним!

***Свойство 10. Если b < a <* 0, то *b*2*п > a*2*п, п ∈ .***

 Теперь обсудим следующий вопрос: если *a > b*, можно ли утверждать, что *а*2*п*+1 < *b*2*n*+1 при любом значении *а* и *b*?

*Читатель:*По-моему, можно, ведь функция *у = = х*2n+1, как мы знаем, *возрастающая* на всей области своего определения (рис. 1.3). Значит, если *а > b*, то при любых значениях *а* и *b* – как положительных, так и отрицательных.

*Автор*:Верно! Запомним.

***Свойство 11*. *Если* *a > b, то а2п+1 > b2n+1, п ∈ .*** Подведем итог нашей беседы. Мы рассмотрели пять свойств неравенств, связанных с умножением.

***Свойство 7. Если a > b > 0 и c > d > 0, то ас > bd.***



Рис. 1.3

***Свойство 8. Если 0 > a > b и 0 > c > d, то ас < bd.***

***Свойство 9. Если а > b > 0, то ап > bп, п ∈ .***

***Свойство 10. Если b < a <* 0, то *b*2*п > a*2*п, п ∈ .***

***Свойство 11. Если a > b, то а2п+1 > b2n+1, п ∈ .***

**Задача 1.9.** Определите, верно ли, что:

а) если *а* > 3, *b >* 5, то *ab >* 15; в) если *а* > 4, то *a*2 *>* 16;

б) если *а* < 2, *b <* 3, то *ab <* 6; г) если *а* < 6, то *a*2 *<* 36.

***Решение.***

а) Поскольку *а >* 3 > 0 и *b >* 5 *>* 0, то по *свойству 7* получим: *a⋅b >* 3⋅5 → *ab >* 15. Всё верно.

б) Если *а* < 2, *b <* 3, то невозможно сказать, какой знак имеют числа *а* и *b*: они могут быть как положительными (например, 1 < 2, 1,5 < 3), так и отрицательными (например, –1 < 2, –1,5 < 3). Поэтому перемножать такие неравенства нельзя, и наш ответ: будет таким: из того, что *а* < 2 и *b <* 3, НЕ СЛЕДУЕТ, что

*ab <* 6.

в) Если *а* > 4, то *a >* 4 > 0, значит, по свойству 8 получим: *а*2  > 42, то *a*2 *>* 16, все верно.

г) Если *а* < 6, то знак числа *a* не определен, поэтому неравенство *a*2 *<* 36 может быть неверным (например: *а* = –7, –7 < 6, но (–7)2 > 62). Т.е. из того, что *а* < 6, НЕ СЛЕДУЕТ, что *a*2 *<* 36.

*Ответ*: а, в) да; б, г) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А7.** Выполните почленное умножение неравенств:

а) 15 > 12 и 0,3 > 0,2; б)  и 4 < 6.

**Б12.** Сравните *ас* и *bd*, где *а*, *b*, *c*, *d* – положительные числа:

а) *a < b*, *c = d*; б) *a > b*, *c* ≥ *d*; в) *a* ≤ *b*, *c* ≤ *d*; г) *a = b*, *c* > *d*.

**В11.** Определите, верно ли, что:

а) если *х* > 10 и *у* > 20, то *ху* > 200; *xy* > 100; *xy* > 300;

б) если 0 < *х* < 2 и 0 < *у* < 5, то *ху* < 10; *xy* < 12; *xy* < 9;

в) если *х* < 3 и *у* < 2, то *ху* < 6.

**В12.** Известно, что *a < b*. Сравните:

а) *а*3 и *b*3; б) –1,5*а*5 и –1,6*b*5; в) –*а*7 – 3 и –*b*7 – 3.

**Свойство 12: если  *a > b* > 0 , то** 

Докажем это свойство. Составим разность . Так как *а > b*, то *a – b* > 0, а *b – a* < 0; так как *а* > 0 и *b >* 0, то *ab* > 0. Значит, у дроби  числитель – отрицательное число, а знаменатель – положительное. Следовательно, , а значит, , что и требовалось доказать.

Заметим, что при *b* < *a* < 0 неравенство  неверно (например, –2<–1<0 , но ).

**Задача 1.10.** Определите, верно ли, что:

а) если *а* > 1, то ; б) если *а* < 2, то ;

в) если *а* < 5, то ; г) если *а* > 7, то .

***Решение***.

а) 0<1<*а*, тогда *по свойству 12* , отсюда , т.е. , все верно.

б) В неравенстве *а* < 2 знак числа *а* не определен, поэтому утверждать, что , у нас нет оснований. Значит, и неравенство  может быть неверным (например, пусть , тогда ). Следовательно, из того, что *а* < 2, НЕ СЛЕДУЕТ, что 

в) Так как *а* < 5, то *а*, возможно, меньше нуля. Значит, неравенство  может быть неверным, а следовательно, и неравенство  может быть неверным. Т.е. из того, что *а* < 5, НЕ СЛЕДУЕТ, что 

г) Если *а* > 7 > 0, то по *свойству 12*  → , все верно.

*Ответ*: а, г) да; б, в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б13.** Запишите неравенство, которое получится, если числа в левой и правой частях неравенства заменить на обратные.

*Например*: так как 5 < 6, то .

а) Так как 6 > 3, то …; б) так как 7 ≤ 10, то …;

в) так как 2 < 4, то …; г) так как 11 < 12, то …;

д) так как 13 ≥ 12, то …; е) так как 15 ≤ 26, то …

**В13.** Известно, что *a*, *b*, *c*, *d* – положительные числа, причём *a > b*, *d < b*, *c > a*. Расположите в порядке возрастания числа .

**Сравниваем иррациональные числа**

*Автор*: Как Вы думаете, можно ли утверждать, что если *ап > bп* (*а* > 0, *b* > 0), то *a > b*?

*Читатель*: Я считаю, что да. Так как, функция *у = хп* при *х* > 0 возрастающая при любом натуральном *п*.

*Автор*: Верно! Запомним.

***Свойство 13. Если ап > bn (п ∈ , а > 0, b > 0), то a > b.***

**Задача 1.11.** а) Докажите числовое неравенство 1,8 >.

б) Сравните числа  и .

***Решение***.

*Читатель*: а) Требуется доказать, что 1,8 >. Пусть 1,8 > > 15 > 0, тогда по *свойству 9*: –это верное неравенство, значит, 1,8 >.

*Автор*: Не торопитесь! Из Вашего доказательства следует, что если 1,8 >, то 3,24 > 3. Но возникает вопрос: если 3,24 > 3, то верно ли 1,8 >? Ведь мы уже знаем, что если верна прямая теорема, то не обязательно верна обратная. Например, из того, что число *а* делится на 4, следует, что число *а* делится на 2. Но из того, что число *а* делится на 2, **не** следует, что оно делится на 4!

*Читатель*: Хорошо, пустим «нашу логику» в обратную сторону. Есть верное числовое неравенство 3,24 > 3. Учтём, что 3,24 = 1,82, а 3 = ()2. Тогда наше неравенство имеет вид 1,82> . А если *а*2 > *b*2 и числа *а* и *b* – положительные, то по свойству 12 *а > b*, значит, 1,8 >, что и требовалось доказать.

*Автор*: Вот теперь все логично!

б) Нам надо сравнить два числа:  и . Сделаем такую «хитрость»: возведём оба числа в 20-ю степень:  и . Запишем верное равенство: 1024 > > 625 и «пустим рассуждения» в обратную сторону:

1024 > 625 → 45 > 54 → → .

Итак, мы получили .

При решении подобных примеров в дальнейшем будет достаточно, если мы проведем только «прямую» цепочку рассуждений и укажем, что все выкладки можно провести в обратном порядке, и при этом знак неравенства не нарушится. Какой именно знак неравенства (< или >) надо ставить, становится понятно только в конце:

45 > 54 ← 1024 >625.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б14.** Сравните числа:

а) 2,8 и ; б) и 1,7; в)  и 3,4; г) и 2,8.

**Б15**. Докажите, что: а) ; б) ; в) .

**В14**. Докажите, что: а) ; б) ;

в) ; г).

**Сравниваем суммы радикалов**

**Задача 1.12.** Сравните числа *а* и *b*, если:

а) , ;

б) , ;

в) , .

***Решение***.

а) Нам надо сравнить  и . Мы не знаем, какое из этих чисел больше, поэтому *предположим*, что  . Исходя из этого предположения продолжим наши рассуждения:

 

.

Теперь попробуем «пустить логику» в обратную сторону:

1. Есть верное числовое неравенство 45 > 32 .

2. Если *а*2 *> b*2(*а >* 0, *b >* 0), то *по свойству 13 a > b.* Значит,  **.

3. Умножим обе части неравенства на 2: .

4. Прибавим к обеим частям число 18: .

5. Представим в левой части: 18 = 15 + 3, а в правой части: 18 = 16 + 2 и учтем, что , получим:





.

6. Если *а*2 *> b*2(*а >* 0, *b >* 0), то по свойству 13 *a > b.* Значит,  > .

Таким образом, мы доказали, что из неравенства 45 > 32 следует неравенство  > .

Конечно, догадаться, как пустить рассуждения «в обратную сторону», не проведя их предварительно в «прямом» направлении, практически невозможно. Но мы видим главное: если провести прямые преобразования от неравенства  >  до неравенства 45 > 32, то можно провести и «обратные» преобразования от неравенства 45 > 32 до неравенства  > . Поэтому в дальнейших аналогичных примерах мы ограничимся «дорогой в одну сторону», подразумевая, что можно «пройти» и в обратном направлении.

б) Сравниваем  и . Предположим, что *а > b*, т.е. . Тогда:

 

Мы получили *неверное* числовое неравенство 70 < 66. Значит, если мы теперь проведём преобразования в обратном порядке, то получим ***неверное*** числовое неравенство . Следовательно, ***верным будет отрицание*** этого неравенства, т.е. . Ясно, что, начав наши рассуждения с этого неравенства, мы бы пришли к верному неравенству 70 > 66. Итак: 

в) Сравним  и . Пусть *а > b*, тогда



.

Мы получили верное числовое неравенство, значит .

*Ответ*: а)  > ; б) ;

 в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б16.** Сравните значения выражений:

а)  и ; б)  и ; в) и .

**Б17.** Докажите неравенство:

а) ; б) ;

в); г) .

**В15.** Сравните числаи ,если:

а)  и ;

б)  и ;

в) и .

**Задачи на оценку значения выражения**

**Задача 1.13.** Трёхтомную энциклопедию и десятитомное собрание сочинений хотят разместить на книжной полке длиной 80 см. Возможно ли это, если толщина тома энциклопедии (*а* см) и толщина тома собрания сочинений (*b* см) находятся в границах 6,5 < *a* < 7,4, 2,9 < *b* < 4,3?

***Решение***. Если мы разместим на полке три тома энциклопедии толщиной *а* см каждый и 10 томов собрания сочинений толщиной *b* см каждый, то все эти 13 книг займут на полке место длиной 3*а* + 10*b*. По условию задачи

6,5 < *a* < 7,4, (1)

2,9 < *b* < 4,3. (2)

Умножим неравенство (1) на 3, а неравенство (2) – на 10 и сложим их почленно:



.

Поскольку длина полки 80 см, а 3*а* + 10*b* < 65,2 < 80 см, то все книги уместятся на полке.

Ответ: да.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б18.** Оцените разность *х – у*, если:

а) 3 < *x* < 4, 10 < *y* < 11; б) 20 < *x* < 21, 35 < *y* < 36.

**Б19.** Зная, что 3,14 < π < 3,15, оцените:

а) 2π; б) ; в) –10π; г) .

**В16.** Определите, можно ли перевезти на автомобиле, грузоподъёмность которого 5 т, одновременно 2 м3 бука и 3 м3 ясеня, если известны границы плотности ρ (в г/см3) бука (0,7 < ρб < 0,9) и ясеня (0,6 < ρя < 0,8).

**В17.** Николай договорился о встрече в метро в 10 ч. На дорогу от дома до метро у Николая уходит от 10 до 15 мин, а на поездку в метро до места встречи – от 18 до 20 мин. Успеет ли он к назначенному времени, если выйдет из дома:

а) в 9 ч 20 мин; б) 9 ч 40 мин; в) в 9 ч 30 мин?

**Верно ли, что…**

**Задача 1.14.** Можно ли утверждать, что если *а* > *b*, то:

а) 3*а* + 12 > 3*b* + 10; б) ; в) ; г) ?

***Решение***.

а) Если *a > b*, то 3*а* > 3*b* → 3*а* + 12 > 3*b* + 12, а 3*b* + 12 > 3*b* + + 10. Значит, 3*а* + 12 > 3*b* + 10 – это верное неравенство.

б) *a > b* → 2*а* > 2*b*.

*Автор*: Можем ли мы теперь разделить обе части неравенства на *b* и получить неравенство ?

*Читатель*: Можем! Но при *b* > 0.

*Автор*: А такого условия у нас нет.

*Читатель*: Значит, ***не можем***. Вообще говоря, неравенство  будет неверным. Например, если *а* = 3, *b* = –1, то *a > b*, т.е. 3 > –1, но неравенство  будет неверным, так как .

*Автор*: Совершенно верно.

в) Нам надо выяснить, верно ли, что если *a > b* ,то 7*а* > 5*b*.

*Читатель*: Из того, что *a > b,* следует, что 7*a > 7b.*

*Автор*: А следует ли отсюда, что 7*а* > 5*b*?

*Читатель*: Для этого нужно выяснить, верно ли, что 7*b* > 5*b.*

(Если да, то 7*a > 7b*> 5*b *)

Составим разность: . Ясно, что если , то, а если , то .

*Автор*: Значит, если , то из следует, что 7*a >*5*b,* а если , то нет?

*Читатель*: Да. И вот пример: пусть .

Но !

*Автор*: Совершенно верно! Следовательно, вообще говоря, неравенство 7*а* > 5*b* будет неверным.

г) *a > b.* Нам надо выяснить, верно ли неравенство . Составим разность: . Вопрос: если *a > b*, то можно ли утверждать, что ?

*Читатель*: Если *a > b >*0, то да.

Если *a > b*, но *a <* 0 и*b* <0, то *a  – b* > 0; *a + b* < 0 и *ab* > 0. Значит,  . Следовательно, неравенство  будет неверным.

*Автор*: Согласен. Таким образом, из того, что *a > b*, *нельзя* утверждать, что .

*Ответ*: а) да; б–г) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б20.** Зная, что *а* < *b*, сравните: а) 5*а* и 5*b* + 1; б) 3*а* – 6 и 3*b*; в) –*а* + 8 и –*b* + 7; г) 5*b* + 2 и 5*а* – 3.

**Б21**. Определите, верно ли, что *а* – положительное число, если известно, что: а) 13*а* > 6*а*; б) 5*а* < 7*а*; в) –3*а* + 7 > –*а* + 7; г) –6*а* + 1 > –5*а* + 1.

**В18.** Известно, что *a > b* + 3, *b* + 1 > 7. Верно ли, что *а* > 9?

**В19.** Определите, верно ли, что:

а) если , то 3 < *a* < 5; б) если , то *a* > 3.

**Немного геометрии**

**Задача 1.15.** Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше полупериметра этого треугольника.

***Решение***. Пусть *а*, *b*, *с* – стороны треугольника *АВС*, *х*, *у* и *z* – расстояния от внутренней точки *М* до вершин треугольника *АВС* (рис. 1.4). Нам надо доказать, что .

Воспользуемся следующим свойством треугольника: *сумма двух любых сторон больше третьей*:



Рис. 1.4

в Δ*ВМС*

*y + z > a*, (1)

в Δ*АМС*

 *х + z > b*, (2)

в ΔА*ВМ*

 *х + у > с*. (3)

Сложим почленно неравенства (1)–(3) и получим:

(*y + z*) *+* ( *х + z*) *+*(*х + z*)*=* 2*х* + 2*у* + 2*z* > *a + b + c* →

 2(*х* + *у* + *z*) > *a + b + c* →

,

что и требовалось доказать.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б22.** Оцените площадь и периметр треугольника, изображённого на рис. 1.5, если известны границы его сторон и одной из высот, выраженные в сантиметрах: 4 < *a* < 5, 3< *b* < 4, 4 < *c* < 5, 2 < *h* < 3.



Рис. 1.5

**В20.** Докажите, что в любом треугольнике сумма одной из сторон и высоты, опущенной на эту сторону, больше полупериметра.

**✍ Домашнее задание**

**Задачи очень легкие**

**А8.** Определите, какое из чисел (*х* или *у*) больше, если:

а) *х – у* = 3; б) *х – у* = –0,01; в) ; г) .

**А9.** Известно, что *а < b*. Может ли разность *а – b* выражаться числом: а) 6,08; б) –5; в) 0; г) 3,72?

**А10.** Умножьте на одно и то же отрицательное число обе части неравенства: а) 1 < 2; б) 5 < 4,5; в) 6,5 ≤ 6,9; г) 1,1 < 1,2; д) 1,3 ≥ 1,2; е) 5 ≤ 6.

**А11.** Известно, что *а < b*. Замените знак \* знаком < или > так, чтобы получилось верное неравенство:

а) –5*а* \* –5*b*; б) ; в) 0,1*а* \* 0,1*b*; г) .

**А12.** Известно, что *а > b*. Замените знак \* знаком < или > так, чтобы получилось верное неравенство:

а) *а* – 4 \* *b –* 4; б) *a* + 7,3 \* *b* + 7,3;

в) *а* + 1,8 \* *b* + 1,8; г) *a* – 125 \* *b* – 125.

**А13.** Определите, можно ли утверждать, что, если:

а) ; б) ;

в) ; г)  .

.

**А14.** Перемножьте числовые неравенства:

а) 14 > 10 и 2 > 1; б) 5 > 3 и 6 > 5;

в) 6 < 7 и 2 < 3; г) 8 < 9 и 1 < 2.

**Задачи легкие**

**Б23.** Определите, верно ли неравенство:

а) 6,7272 ≤ 6,(72) ≤ 6,7273; б) –0,3131 < –0,(3) ≤ –0,3132.

**Б24.** Что можно сказать о числах *а* и *b*, если выполняются сразу два неравенства: *а* ≤ *b* и *а* ≥ *b*?

**Б25.** Можно ли сделать вывод о соотношении между числами *а* и *с*, если известно, что:

а) *a > b*, *b = c*; б) *a > b*, *b* ≤ *c*; в) *a < b*, *c* ≥ *b*;

г) *a* ≤ *b*, *b* < *c*; д) *a = b*, *c* ≤ *b*; е) *a* ≤ *b*, *c* ≥ *b.*

**Б26.** Сложите неравенства:

а) 5 > 2 и –3 < 1; б) 7,5 < 11,7 и –4,7 > –5,8;

в) 0,2 < 3 и 2,8 > 1,7; г) –3,9 > –7,2 и 6,5 < 14,7.

**Б27.** Умножьте на указанное число обе части неравенства:

а) 3,25 < 4 на 3; б) 3,4 > 2,3 на 4; в) –13 < –7,5 на –3;

г)  на –12; д)  на – 6; е) –4*а* < –3 на –0,25.

**Б28.** Разделите на указанное число обе части данного неравенства: а) –3,9 < 2,7 на –3; б) –20 < –12 на –4.

**Б29.** Известно, что . Определите, верно ли неравенство:

а) 3*т* > 3*n*; б) *m < n*; в) –*т* > –*n*; г) –6*т* < –6*п*;

д) .

**Б30.** Сравните числа:

а); б); в).

**Б31.** Запишите несколько неравенств, которые можно получить из неравенства *х + у* – 3> *z* + 5 переносом слагаемых из одной части в другую.

**Б32.** Дано неравенство *а* + 1 – *с* < *p* – *q* – 6. С помощью переноса слагаемых из одной части в другую получите неравенство, в котором: а) все буквы собраны в левой части, а числа в правой; б) нет слагаемых со знаком «минус».

**Б33.** Докажите, что если *п* < –3, то:

а) ; б) ;

в) ; г) .

**Б34.** Определите, положительным или отрицательным является число *а*, если:

а) *а* – 2 < *b* – 2 и *b* < –1; б)  и *b* ≥ 100;

в) –4*а* > –4*b* и *b* ≤ 0; г) 1 – *а* < 1 – *b* и *b* > 1.

**Б35.** Перемножьте неравенства:

а) 1) 2 < *x* и 3 < *y*; 2) *x* > 1 и *y* > 5; 3) 0,7 > 0,6 и 3,2 > 2,3;

б) 1) *а*  + 1 > *a*  и *a* > 5; 2) *b* < *b* + 2 и 3<  *b*;

в) 1) 2 < 32 и 22 < 32; 2) 22⋅32 > 52 и 22 > 2; 3) 42 > 5 и; 4) 3 < 7 и .

**Б36.** Сравните числа:

а); б); в) ; г) .

**Б37.** Докажите числовое неравенство:

а); б); в) ; г) .

**Б38.** Зная, что 11,5 < *a* < 11,6, оцените значение выражения 2*а* + 3,2.

**Б39.** Известно, что *а < b*. Является ли верным неравенство:



Рис. 1.6

а) *а* + 6 < *b* + 12; б) *а* – 4 < *b* – 1;

в) 3*а* < 3*b* + 1; г) –2*а* > –2*b*?

**Б40.** Оцените площадь и периметр параллелограмма, если известны границы длин его сторон и одной из высот, выраженные в сантиметрах (рис. 1.6).

**Задачи средней трудности**

**В21.** Известно, что *с* ≤ *а* ≤ *b*. Можно ли сравнить числа *а* и *d*, если: а) *b > d*; б) *c < d < b*; в) *d* ≤ *c* ≤ *a*; г) *d* ≤ *b*?

**В22.** Сравните *a + b + c* и *p + q + r*, если:

а) *a < p*, *b* < *q*, *c = r*; б) *a* ≥ *p*, *b* ≥ *q*, *c > r*; в) *a = p*, *b* = *q*, *c* ≤ *r*.

**В23.** Выполните сложение неравенств:

а) и ; б) и .

**В24.** Умножьте неравенства: а) *а*3 + 2*а* < –2*а*2 – 4 на *а*2 + 2; б) *а*3 + *а* < 2*а*2 + 2 на *а*2 + 1.

**В25.** Докажите, что:

а) если *а* > 2, *b* > 3, то 3*а* + 5*b* > 21;

б) если *а* < 2*b*, *b* < *c*, то 2*а* < 4*c*;

в) если *а* > 3, *b* > 5, то 2*а* + 4*b* > 26;

г) если *а* ≥ 5*b*, то 3*а* ≥ 30*с*.

**В26.** Известно, что *р* > 2, *s* < 5. Оцените значение выражения:

а) *р* – 2*s*; б) *s –* 3*p*; в) 4*s –* 2*p*; г) 3*р* – 6*s*.

**В27.** Известно, что *х* > 6, *у* < 12. Оцените значение выражения:

а) *х* – 5 – 2*у*; б) 14 – 2*х +* 3*у*; в) 5*х –* *у* + 10; г) 16 – 3*у* + 4*х*.

**В28.** Известно, что *а* ≥ *b*. Сравните выражения, если возможно:

а) *а* + 2 и *b* + 1; б) *а +* 10 и *b* – 1;

в) 3*а –* 1 и 3*b* + 10; г) 1 – 2*а* < 3 – 2*b* и *b >* 1.

**B29.** Докажите числовое неравенство:

а); б) ; в) ; г) .

**В30.** Определите, имеет ли смысл выражение:

а) ; б) ; в) ; г) .

**В31.** Сравните значения выражений:

а) и ; б)  и ;

в)  и ; г)  и .

**В32.** Сравните *а* и *b*, если:

а) , ;

б) , ;

в) , .

**В33.** Известно, что 8 < *а* < 10 и 1 < *b* < 2. Оцените значение выражения: а) ; б) ; в) ; г) .

**В34.** Известно, что  и . Найдите границы значения выражения:

а) ; б) ; в) ; г) .

**В35.** Докажите, что если *а* > *b* > 0, то:

а) 26*а* > 12 *b*; б) –1,3*а* < –1,2*b*.

**В36.** а) Докажите, что периметр выпуклого четырёхугольника больше суммы длин его диагоналей.

б) Докажите, что периметр выпуклого пятиугольника больше полусуммы длин его диагоналей.

**Задачи трудные**

**Г2.** Сравните значения выражений:

а)  и ; б)  и .

**Г3.** Определите, верно ли, что:

а) если , то 2 < *a* < 6; б) если , то *a* > 5.

**Г4.** Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике:

а) диагональ меньше полупериметра;

б) сумма расстояний от точки, взятой внутри четырёхугольника, до его вершин больше полупериметра;

в) сумма противоположных сторон меньше суммы диагоналей.

**Задачи очень трудные**

**Д1.** Солдат построили не по росту, но с чётким разделением на ряды и колонны. В каждом ряду выбрали самого высокого, а из всех высоких – самого низкого. В каждой колонне выбрали самого низкого, а из всех низких – самого высокого. Кто выше: самый низкий из высоких или самый высокий из низких?

**Д2.** Докажите, что .



**✍ Домашнее задание**

**Задачи очень легкие**

**Задачи легкие**

**Задачи средней трудности**

**Задачи трудные**

**Задачи очень трудные**

