**Заочный**

**физико-математический**

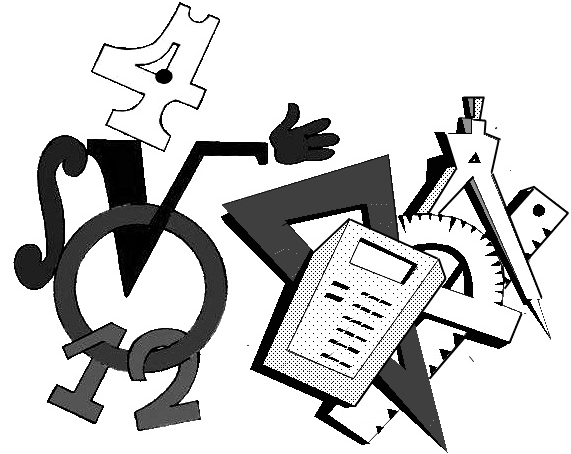
**лицей «Авангард»**

# МАТЕМАТИКА

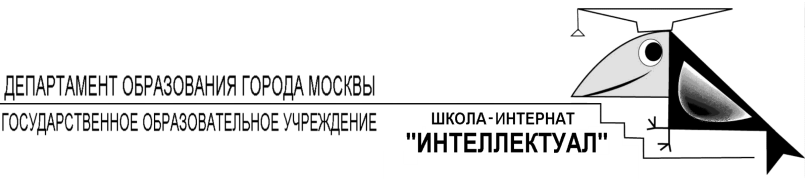
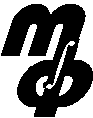
**6**

##### *Экспериментальный учебник*

**Часть 2**

****

###### МОСКВА 2012



Заочный физико-математический лицей

«Авангард»

Е. В. Рябокобыленко, Е. Н. Филатов

# МАТЕМАТИКА

6

##### *Экспериментальный учебник*

Часть **1**

Под редакцией Е.Н. Филатова

###### МОСКВА 2012

**§ 7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ**

Мы с вами уже немного научились решать уравнения с одним неизвестным. Но уравнение может содержать и не одно неизвестное, а два или даже три. Вот, например, уравнение  – это уравнение с двумя неизвестными, а  – уравнение с тремя неизвестными.

Напомним, что линейным уравнением называется уравнение, в которое неизвестные входят только в первой степени. Например, уравнение  – линейное, а уравнение  – нелинейное (квадратное).

Уравнения, содержащие несколько неизвестных, называются ***уравнениями первой степени*** или ***линейными***, если каждое неизвестное входит только в первой степени, и, кроме того, в него не входят произведения неизвестных типа .

Вот примеры ЛИНЕЙНЫХ уравнений с несколькими неизвестными: ; ;  и т.д.

А вот примеры НЕЛИНЕЙНЫХ уравнений с несколькими неизвестными: 

Всякое линейное уравнение с двумя неизвестными можно (путем приведения подобных членов) привести к виду:

.

Например:  и т.д.

При этом число  называется ***свободным членом***, а числа  и – ***коэффициентами при неизвестных***  и .

# Линейные уравнения с двумя неизвестными

**Задача 7.1**. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными (назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член): а) ; б) ; в) г) .

***Решение.***

а) . Да, это линейное уравнение вида . Коэффициент при *х* равен 9; коэффициент при *у* равен –8; свободный член: 11.

б) . Нет, это не линейное уравнение, так как оно содержит произведение двух неизвестных.

в) . Да, это линейное уравнение. Коэффициент при *х*: 3; коэффициент при *у*: 0; свободный член: 2.

г) Сначала немного преобразуем уравнение: . Оно является уравнением первой степени с двумя неизвестными. Коэффициент при *х*: 3; коэффициент при *у*: –1; свободный член: –10.

СТОП! Решите самостоятельно:

**А1.** Определите, является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными и назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член: а) ; б) ; в) ; г) .

**Б1.** Определите, является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными и назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член: а) б) в) ; г) .

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара чисел (значения неизвестных), при подстановке которых в уравнение получается верное числовое равенство.

Например, решением уравнения  является пара чисел  и , так как .

*Читатель*: По-моему, это далеко не единственное решение данного уравнения! Тут подходят и такие пары: .

*Автор*: Вы совершенно правы! Линейное уравнение с двумя неизвестными всегда имеет ***бесконечно много*** решений!

**Задача 7.2**. Является ли пара чисел (–1; 1) решением уравнения: ?

***Решение.*** Пара чисел является решением уравнения, если при ее подстановке в это уравнение получается верное числовое равенство. Подставим в наше уравнение и .

Левая часть: 

Правая часть: 0. Тогда 0 = 0.

Левая и правая части оказались равны друг другу. Это означает, что пара чисел является решением уравнения .

*Ответ*: Да.

СТОП! Решите самостоятельно:

**А2.** Является ли пара чисел решением уравнения: а); б) ; в) .

**Б2.** Пары значений *х* и *у* указаны в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *у* |  |  |  |  |  |  |  |  |

Какие из них являются решениями уравнений: а) ; б) .

**Задача 7.3**. Составьте линейное уравнение с двумя неизвестными, решением которого служит пара чисел: .

***Решение.***

*Автор*: Будем действовать таким образом.

*Придумаем* выражение, которое содержало бы сумму или разность *х* и *у* с некоторыми коэффициентами. Например: . Это выражение будет левой частью нашего уравнения. Подставим в него вместо *х* и *у* значения *х* = 1 и *у* = –2 соответственно и найдем значение этого выражения:

.

Полученный результат будет правой частью уравнения. Значит, наше уравнение будет выглядеть так: .

*Читатель:* Я бы взял выражение попроще:. Получилось еще одно уравнение: .

*Автор*: Верно! Таких уравнений можно придумать бесконечно много.

*Ответ*: Например, ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б3.** Составьте линейное уравнение с двумя неизвестными, решением которого является пара чисел: а) ; б) ; в) ; г) .

# Линейные уравнения с тремя неизвестными

**Задача 7.4**. Составьте линейное уравнение с тремя неизвестными, решением которого является следующая тройка чисел: (5; –3; 11).

***Решение***. Действуем аналогично предыдущей задаче, но составляем выражение, которое будет содержать уже три неизвестных.

Возьмем любое выражение вида *ax + by + cz*, которое придет нам в голову, например: 3*x – y* + 2*z*. Это будет левая часть уравнения.

Найдем значение выражения при данных значениях неизвестных: , получим:

.

Это правая часть уравнения.

У нас получилось уравнение: .

Можно, конечно, взять более простое выражение, например: . Подставив в него значения *х* = 5, *у* = –3, *z* = 11, получим: .

Получилось еще одно уравнение: 

*Ответ*: Например: ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**А3.** Составьте уравнение, решением которого является следующая тройка чисел: а) ; б) ; в) .

**Задача 7.5**. Найдите три решения для уравнения

.

***Решение***. Сначала решим наше уравнение относительно *х*. Получим:

.

Зададим произвольное значение *у* (удобно брать не большие числа) и найдем соответствующее ему значение *х*.

Пусть *у* = 1, тогда .

Мы нашли первое решение уравнения: , .

Пусть теперь *у* = –2, тогда .

Пусть *у* = 0, тогда .

*Ответ*: Например: 1) ; ; ; ; ; .

Заметим, что для краткости записи вместо того, чтобы писать *х* = 5; *у* = 1, пишут (5;1). Мы тоже будем пользоваться такой формой записи решения уравнения.

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б4**. Найдите по три решения для уравнений с двумя неизвестными: а) ; б) ; в) ; г) .

**В1.** Выразив из уравнения переменную через , найдите три решения этого уравнения.

**Задача 7.6**. Найдите значение коэффициента в уравнении , если известно, что пара является решением этого уравнения.

***Решение***. Если пара чисел ; является решением данного уравнения, то при подстановке этих значений в уравнение должно получаться верное числовое равенство.

Подставим значения в наше уравнение и получим:

.

Мы получили уравнение, содержащее неизвестное, а нам осталось только его решить:

.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Г1.** Найдите значение коэффициента в уравнении = 11, если известно, что пара ; является решением этого уравнения.

**Г2.** При каком пара чисел является решением уравнения ?

# Решение одного уравнения с двумя неизвестными

# в натуральных числах

**Задача 7.7.** Найдите все пары ***натуральных*** чисел, которые удовлетворяют уравнению .

***Решение***. Выразим из уравнения *у*: *х* + *у* = 5 . Напомним, что натуральные числа – это 1, 2, 3, 4, …

Пусть *х* по очереди принимает данные значения. Найдем для них *у*:

если , то ;

если , то ;

если , то ;

если , то

если , то .

Заметим, что если *х* = 5, то *у* уже не является натуральным числом, и такое решение уравнения нам уже не подходит.

Посмотрим, что произойдет, если в качестве *х* взять число, большее 5. Глядя на уравнение мы увидим, что одно из слагаемых в этом случае окажется больше суммы. Это означает, что для получения верного равенства второе слагаемое должно быть отрицательным числом.

*Ответ*: 1) ; ; ;; ; ; ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**В2.** Найдите все пары натуральных чисел, которые удовлетворяют уравнению: ; б).

# Решение одного уравнения с двумя неизвестными

# в целых числах

Иногда требуется найти только ЦЕЛЫЕ решения (как положительные, так и отрицательные) одного уравнения с двумя неизвестными, такие решения иногда называют ***целочисленными***.

Потренируемся в решении таких уравнений.

**Задача 7.8.** а) Найдите три целочисленных решения уравнения . б) Имеет ли уравнение хотя бы одно целочисленное решение?

***Решение.***

а) Преобразуем данное уравнение таким образом, чтобы справа осталась только переменная :

→ 

*Автор:* Как Вы считаете, каким должно быть значение *у*, чтобы выражение  было целым числом?

*Читатель*: Я думаю, что величина *у* должна иметь вид: *у* = 5*k*, где – любое целое число, тогда дробь   – целое число.

*Автор:* Совершенно верно!

Возьмем в качестве числа: 0; 1; 2 и по очереди подставим их в выражение , получим:

1. ; 2) ; 3) .

Теперь для этих значений по формуле найдем соответствующие им значения :

1. ;
2. ;
3. .

Итак, мы получили три решения: (2;0); (4;5); (6; 10).

б) Попробуем найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения .

Сначала переведем смешанные числа в неправильные дроби:

→ .

Теперь «избавимся» от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на , получим:



Заметим, что . Тогда наше уравнение можно еще немного упростить:



Заметим, что , тогда можем записать:



Если предположить, что нам удастся найти целые решения данного уравнения, то получим противоречие. В самом деле, тогда левая часть уравнения будет целым числом, а правая – несократимой дробью. Значит, данное уравнение не имеет целочисленных решений.

*Ответ*: а) (2;0); (4;5); (6; 10); б) целочисленных решений нет.

СТОП! Решите самостоятельно:

**Г3.** Найдите три целочисленных решения уравнения, либо докажите, что таких решений не существует: а) ; б) .

**Г4.** Найдите три целочисленных решения уравнения, либо докажите, что таких решений не существует: а) б) ; в)

# Системы двух уравнений с двумя неизвестными

***Системой двух уравнений с двумя неизвестными, называются два уравнения с двумя неизвестными, в которых неизвестные принимают одни и те же значения.***

*Решением* системы уравнений называются такие значения двух неизвестных, которые при подстановке их в уравнения превращают эти уравнения в верные числовые равенства.

Например, решением системы уравнений  являются значения , потому что 

**Задача 7.9**. Является ли решением системы уравнений пара чисел ; ?

***Решение***. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно подставить данные значения неизвестных в систему. Если оба уравнения обратятся в верные числовые равенства, то пара чисел является решением системы, а если нет, то нет.

Проверяем:

.

Как мы видим, первое уравнение превратилось в верное числовое равенство, а второе уравнение – нет! Следовательно, пара чисел , *не является* решением данной системы.

*Ответ*: Нет.

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б5.** Является ли решением системы уравнений пара чисел а) , ; б) , ?

**Б6.** Покажите, что пара чисел является решением системы: а) б)

**Б7**. Какая из приведенных пар чисел: а) ; б) ; в); г) является решением системы уравнений

**Задача 7.10**. Составьте какую-либо систему линейных уравнений с переменными *х* и *у*, решением которой служит пара *х* = 2, *у* = – 1.

***Решение***. Нам нужно *придумать* два уравнения, для каждого из которых данная пара чисел будет решением. Итак, придумываем два алгебраических выражения, содержащих *х* и *у* (только в первой степени!) и находим их значения при , .

Например, возьмем выражения и . Вычислим значение выражения при ,

;

Вычислим значение выражения при

.

У нас получились два уравнения: и .

*Ответ*:

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б8.** Составьте какую-либо систему линейных уравнений с переменными и , решением которой служит пара: а) , ; б) , .

**Б9.** Составьте систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой служит пара .

# Решаем системы уравнений

**Задача 7.11**. Решите систему уравнений

***Решение.***

*Читатель*: По-моему, одно неизвестное нам искать уже не надо, так как оно задано в условии.

*Автор*: Совершенно верно! Остается только подставить это значение в 1-е уравнение и решить его относительно *х*. Получим:



*Ответ*: ;.

СТОП! Решите самостоятельно:

**А4.** Решите системы уравнений:

а) б)

**Б10.** Решите систему уравнений:

# Метод подстановки

**Задача 7.12.** Решите систему уравнений

***Решение***. Здесь в первом уравнении неизвестное  уже выражено через неизвестное *х*. Нам остается только подставить вместо *у* во второе уравнение выражение получим:



А теперь, зная *у*, найдем *х*:

= –4·45 = –180.

Система решена!

*Ответ*: ; или (более кратко): (45; 180).

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б11.** Решите системы уравнений:

а) б) в)

**Задача 7.13**. Решите методом подстановки

***Решение***. Во втором уравнении переменная *х* уже выражена через переменную *z*: *x* = –4 – 5*z*. Поэтому мы имеем право в первом уравнении заменить *x* на выражение:

.

Мы получили одно уравнение с одним неизвестным, нам остается только его решить:

Чтобы найти *х*, подставим найденное значение *z* во второе уравнение:



*Ответ*: (; ).

СТОП! Решите самостоятельно:

**В3.** Решите методом подстановки:

а) б) в)

**Задача 7.14.** Решите методом подстановки:

***Решение.*** В данной системе ни одна из переменных не выражена явно через другую. Поэтому начнем с того, что выразим  через  из первого уравнения:

.

Теперь действуем так же, как в предыдущей задаче. Подставим найденное выражение во второе уравнение, получим:

→

→

.

Теперь находим *х*:

.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б12.** Решите методом подстановки:

а) б) в)

# «Хитрая» подстановка

**Задача 7.15.** Решите методом подстановки:

***Решение***. Сделаем такую «хитрость»: умножим обе части первого уравнения на 2, получим:

→ 2·() = 2·(–2) →

8*y* – 16*x* = –4 → 8*y* + 4 = 16*x* →

16*x* = 8*y* + 4.

Теперь подставим во второе уравнение вместо 16*х* выражение (8*y*+4), получим уравнение с одним неизвестным:

→ – (8*y* + 4) = 26 → – 8*y* – 4 = 26 →

–*y* = 26 + 4 → –y = 30 →

*y* = –30.

Теперь значение *y* мы знаем, осталось найти *x*. Подставим значение *y* = –30 в первое уравнение, получим:

4·(–30) – 8*x* = –2 →

–120 – 8*x* = –2 → –8*x* = –2 + 120 → –8*x* = 118 →

.

*Ответ*: (; –30).

СТОП! Решите самостоятельно:

**В4.** Решите методом подстановки:

а) б) в)

**Задача 7.16.** Решите методом подстановки:

***Решение***. Здесь нам не удастся обойтись простым умножением одного из уравнений на какое-либо целое число! Но заметим, что если мы умножим первое уравнение на 3, а второе на 4, то коэффициенты при неизвестных  в обоих уравнениях будут равны 12, а значит, 12*u* можно будет выразить из первого уравнения и подставить во второе!

Получим:

→ →

→ .

Подставим во второе уравнение вместо выражение , получим:

→

25 = 16 – 36 25 = –20 →

.

Подставим это значение во второе уравнение:



*Ответ*: ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б13.** Решите методом подстановки:

а) б) в)

# Системы с обыкновенными дробями

**Задача 7.17.** Решите методом подстановки: 

***Решение.***  Попробуем «избавиться» от дробей. Для этого умножим обе части первого уравнения на 4, а обе части второго уравнения – на 20, получим:



Дальше все уже просто: выражаем из первого уравнения *b* и подставляем во второе уравнение, получаем:

→ – 4 = → = – 4.

Подставляем это значение во второе уравнение и получаем:

→ 4·( – 4) – 10*a* = 1 →

8*a* – 16 – 10*a* = 1 → 8*a* – 10*a* = 1 + 16 →

–2*a* = 17 → *a* = –.

Теперь подставим это значение в выражение = – 4, получим: = – 4 = 2 ·

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно:

**В5.** Решите методом подстановки:

а)  б) 

**Г5**. Решите методом подстановки: 

# Системы с десятичными дробями

**Задача 7.18.** Решите методом подстановки:

***Решение***. Избавимся от дробей, умножив каждое уравнение на 10. Получим:

→

Ну, а дальше применяем наш обычный метод подстановки. Из первого уравнения выражаем неизвестное *a*:

→

и подставляем это выражение во второе уравнение:

→ →

30 + 12*y* – 9*y* = 3 → 3*y* = 3 – 30 → 3*y* = –27 → *y* = –9.

Подставим это значение в выражение и получим:

= 5 + 2·(–9) = 5 – 18 = –13.

*Ответ*: , .

СТОП! Решите самостоятельно:

**В6.** Решите методом подстановки: а)

б) в)

# Более сложные системы

**Задача 7.19.** Решите методом подстановки:

а) б)

***Решение.***

а) Начнем с того, что перенесем неизвестные в левую часть уравнения, а числа – в правую часть, получим:

→

Ну, а такие системы мы решать уже умеем. Умножим первое уравнение на 2, чтобы там появилось выражение 4*a*:

→

.

Подставим это значение во второе уравнение, получим:

→ ) →

–16 + (14*b* → 8*b* = 12 + 16 → 8*b* = 28 →

.

Подставим это значение в первое уравнение и найдем значение неизвестного *a*:

→ →

→ = 16,5 →

*a* = 16,5 : 2 = 8,25.

Итак: .

б) Здесь решение начнем с «хитрости». Заметим, что из первого уравнения следует, что = –4.

Подставим во второе уравнение вместо выражения число (–4), получим:

= 21 + 3 →

= 24.

Теперь наша система заметно упростилась:

Дальше «работает» обычная подстановка. Выражаем из первого уравнения *х* через *у*:

→ = –4 –.

Подставляем это значение во второе уравнение:

→ 5·(–4 –) – →

–20 – 5*y* – 6*y* = 24 → –20 – 11*y* = 24 →

–11*y* = 24 + 20 → –11*y* = 44 →

*y* = 44 : (–11) = –4.

Подставим это значение в выражение = –4 –. Получим:

= –4 – = –4 – (–4) = –4 + 4 = 0.

Итак, .

*Ответ*: а) ; ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**В7.** Решите методом подстановки:

а) б)

**Г6.** Решите методом подстановки:

# Метод алгебраического сложения

**Задача 7.20.**  Решите систему уравнений:

***Решение***. Эту систему мы могли бы, конечно, решить методом подстановки. Но есть еще один, более «быстрый» метод решения систем уравнений – ***метод алгебраического сложения***. Покажем, как «работает» этот метод на данной системе.

Сделаем такую «хитрость»: сложим отдельно левые части наших уравнений и отдельно – правые части, а полученные суммы приравняем.

Так можно делать потому, что если, например, 3 = 3 и 5 = 5, то справедливо и равенство 3 + 5 = 3 + 5. То есть если к равным величинам прибавить равные, то равенство не нарушится. Получаем:

() + () = 2 + 6 → 



Подставим это значение во второе уравнение, получим:

*→* 4  *→*

*–* 4 *→ 2 →* 1.

Мы решили нашу систему!

*Читатель*: А почему мы подставили значение именно во второе, а не в первое?

*Автор*: Это не принципиально! Можно было подставить и в первое. Попробуем:



*Ответ*: ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б14.** Решите методом алгебраического сложения:

а) б) в)

Попробуем применить метод алгебраического сложения к более сложным системам уравнений.

**Задача 7.21.**  Решите методом алгебраического сложения системы: а) б) в) 

***Решение.***

а)  Здесь простое сложение левых и правых частей уравнений нам ничего не даст. Попробуем сделать такую «хитрость»: умножим второе уравнение на 2, получим:

→

Вот теперь, если мы сложим левые части уравнений, «игреки» сократятся, и мы получим уравнение с одним неизвестным:

*+*

() *+* () = 5→.

Теперь подставим полученное значение в первое уравнение, получим:

→ →

–10 → + 10→ 9 →

=1,5.

Итак, мы получили ответ: 

б) 

*Автор*: Надеюсь, Вы уже поняли, что для успешного применения метода алгебраического сложения необходимо, чтобы *коэффициенты* при одном из неизвестных были ***противоположными числами***. Например, 6 и –6, –2 и 2 и т.д. Тогда после сложения левых частей уравнений одно из неизвестных «исчезнет» и получится одно уравнение с одним неизвестным.

В нашем случае коэффициенты при *x* (5 и 3) и коэффициенты при *y* (2 и 5) противоположными числами не являются. Спрашивается, как тут быть?

*Читатель*: Я бы умножил первое уравнение на 5, а второе на (–2). Тогда коэффициенты при y станут равны 10 и -10:



Теперь остается сложить левые и правые части уравнений:

.

Подставим это значение в первое уравнение, получим:



Итак: 

*Автор:* Совершенно верно!

в) 

*Читатель:* Тут, наверное, надо умножить первое уравнение на 12, а второе на (–7), чтобы коэффициенты при *y* стали противоположными числами?

*Автор*: Так делать, конечно, можно, но в данном случае есть более красивый вариант решения. Заметим, что 2 + 17 = = 7 + 12, то есть сумма коэффициентов при x равна сумме коэффициентов при *y*!

*Читатель*: И что нам это дает?

*Автор*: А давайте попробуем сложить левые и правые части наших уравнений, получим:



Теперь сделаем такую «хитрость»: заменим в нашей системе второе уравнение на уравнение: . Наша система станет значительно проще, чем была вначале:



Решим ее методом алгебраического сложения. Умножим второе уравнение на (-2) и сложим полученные уравнения:

→→

.

Подставим это значение в уравнение 

.

Мы решили нашу систему!

*Ответ*: а) (2,5; 1,5); б) (1;1); в) (1;2).

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б15.** Решите систему уравнений: 

**В8.** Решите систему уравнений: 

**Г7.** Решите систему уравнений: 

# Решение систем с обыкновенными и десятичными

# дробями методом алгебраического сложения

**Задача 7.22.** Решите системы уравнений:

а)  б)

***Решение***. а) 

*Читатель*: Наверное, для начала надо избавиться от обыкновенных дробей…

*Автор*: В данном случае можно поступить проще: давайте умножим первое уравнение на 2, получим:

.

Ну, а дальше все просто: сложим наши уравнения и получим одно уравнение с одним неизвестным:



Подставим это значение во второе уравнение и найдем *y*:.

Итак: 

б)  Здесь тоже совершенно не обязательно «избавляться» от дробей, достаточно умножить второе уравнение на 3, и коэффициенты при *y* станут противоположными числами: 0,3 и –0,3.

→

Далее нам остается только сложить наши уравнения и получить ответ:



Подставим значение *x* во второе уравнение, получим:



Итак: .

*Ответ*: а) (3;2); б) (1;2).

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б16.** Решите систему уравнений: 

**В9.** Решите систему уравнений: 

# Системы уравнений – пропорции

**Задача 7.23.** Решите системы уравнений:

а) б)

***Решение.***

а) 

*Читатель*: По-моему это явно не линейные уравнения, потому что неизвестные находятся и в числителе, и в знаменателе!

*Автор*: На первый взгляд, да. Но эти уравнения легко «превращаются» в линейные, если мы воспользуемся свойством пропорций!

Вспомните, если , то .

Воспользуемся этим свойством, получим:

→→

Дальше лучше воспользоваться методом подстановки. Подставим выражение в первое уравнение вместо *у*, получим:



Теперь найдем *у*: .

Итак, 

Проверим! Подставим полученные значения в исходную систему, получим: . Все верно!

б)

*Читатель*: Эту систему я решу сам! Воспользуемся свойством пропорции, получим:

Теперь ***вычтем*** из первого уравнения второе. Так тоже можно делать, потому что, если 5=5 и 3=3, то 5–3 = 5–3. То есть если из равных величин вычесть равные, то равенство не нарушится. Получим:



Подставим это значение в первое уравнение и найдем *у*:



Мы получили ответ: 

*Автор*: А Вы не хотели бы проверить Ваш ответ?

*Читатель*: Давайте проверим!

Первое уравнение. Левая часть: ; правая часть: 2; 2 = 2, все верно!

Второе уравнение. Левая часть: 

*Автор*: Мы получили выражение ; оно, как мы с Вами знаем, не имеет смысла, поэтому найденные Вами значения неизвестных  НЕ ЯВЛЯЮТСЯ решением данной системы уравнений!

*Читатель*: Да, но вроде бы все вычисления мы делали правильно…

*Автор*: Дело в том, что выражение  не имеет смысла при , потому что тогда знаменатель обращается в ноль. Отсюда практический вывод: если неизвестное находится в знаменателе, полученный ответ надо обязательно ПРОВЕРЯТЬ!

*Ответ*: а) (1;2) ; б) нет решений.

СТОП! Решите самостоятельно:

**В10.** Решите систему уравнений: а) б)

# Линейные системы трех уравнений

# с тремя неизвестными

**Задача 7.24**  Решите систему уравнений:

***Решение***. Попробуем сложить левые и правые части всех трех уравнений, получим:



А теперь составим такую систему уравнений:

Если мы подставим в первое уравнение вместо выражения число 3, то получим одно уравнение с одной неизвестной величиной:

Величину *с* мы нашли. Попробуем таким же образом найти неизвестное *а*. Для этого составим такую систему:



Подставим значение в первое уравнение, получим:



Аналогично находим неизвестное :



*Ответ*: ; ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Г8.** Решите систему уравнений: а) б)

**Задача 7.25.**  Решите систему уравнений:

***Решение.*** Тут тоже начнем с того, что сложим все три уравнения, получим:

*.*

Теперь подставим найденное значение *а* в первое уравнение:

.

Нам осталось найти значение неизвестной . Для этого подставим значение  в третье уравнение, получим:

.

*Ответ*: ; ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Г9.** Решите систему уравнений: а) б)

**Задача 7.26.**  Решите систему уравнений:

***Решение.***  Проще всего в данной системе выглядит третье уравнение – из него сразу можно найти значение неизвестной величины *с*:

.

Подставим найденное значение *с* во второе уравнение, что даст нам возможность найти значение неизвестной :

.

Теперь можно подставить найденные значения для в первое уравнение и найти значение неизвестной *а*:

.

*Ответ*: ; ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Г10.** Решите системы уравнений:

а) б)

Теперь попробуем решить более сложную систему уравнений.

**Задача 7.27.** Решите систему уравнений:

***Решение***. Начнем с того, что алгебраически сложим 1-е и 2-е уравнения, получим:





Это уже кое-что! У нас теперь есть одно уравнение с двумя неизвестными, из него можно, например, выразить  через :



Теперь давайте вычтем из первого уравнения второе, получим:



Одно неизвестное мы уже нашли!

Теперь подставим значения  и  в третье уравнение, получим:



*Ответ*: ; ; .

СТОП! Решите самостоятельно:

**Д1.** Решите систему уравнений:

а) б)

# Сколько решений имеет система двух линейных

# уравнения с двумя неизвестными?

*Читатель:* Пока все системы, которые мы решали, имели ровно одно решение (за исключением некоторых систем уравнений – пропорций, которые иногда не имели решений).

*Автор*: А может ли обычная система двух линейных уравнений с двумя неизвестными вообще не иметь решений?

*Читатель:* Не знаю…, наверное не может.

*Автор*: Давайте рассмотрим такую систему: Как Вы считаете, имеет ли она решения?

*Читатель*: По-моему, нет. Потому что сумма любых двух чисел не может одновременно быть равной и 2, и 3!

*Автор*: Верно! Значит, существуют системы двух уравнений с двумя неизвестными, которые не имеют решений.

А как Вы считаете, сколько решений имеет ОДНО уравнение с двумя неизвестными, например такое: ?

*Читатель*: Бесконечно много.

*Автор*: А теперь давайте умножим обе части этого уравнения на 2, получим уравнение:

.

Составим такую систему уравнений:  Имеет ли эта система решения?

*Читатель*: Я думаю, что все решения первого уравнения являются решениями второго уравнения, поэтому система имеет бесконечно много решений! Ведь если мы ***разделим*** обе части второго уравнений на 2, то опять получим первое уравнение!

*Автор*: Верно! Значит, система двух линейных уравнений с двумя неизвестными может иметь бесконечно много решений! А теперь давайте попробуем сформулировать правило, с помощью которого можно будет легко «обнаружить» систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, имеющую бесконечно много решений.

Мы уже выяснили, что, ***если второе уравнение получается путем умножения первого уравнения на какое-либо число, не равное нулю,*** то второе уравнение имеет те же решения, что и первое уравнение, поэтому ***система таких уравнений имеет бесконечно много решений***.

То есть можно утверждать, что система уравнений вида  имеет бесконечно много решений.

Вот примеры таких систем:

1)  – второе уравнение получается умножением первого уравнения на 2;

2)  – второе уравнение получается умножением первого уравнения на 0,1;

3)  – второе уравнение получается умножением первого уравнения на .

Можно сформулировать это же правило по-другому:

***Если есть система уравнений и выполняется равенство:, то эта система имеет бесконечно много решений.***

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б17.** Какие из приведенных систем уравнений имеют бесконечно много решений:

а) б) в) г) 

Теперь попробуем сформулировать правило, с помощью которого можно «обнаружить» систему уравнений, которая ***не имеет решений***.

Наверное, Вы согласитесь, что система уравнений вида  где , решений иметь не может, потому что одно и то же выражение  не может одновременно равняться двум разным числам *с* и *d*.

Например, не имеют решений системы: 1)  и т.д.

*Автор*: Рассмотрим систему Как Вы считаете, имеет ли она решения?

*Читатель:* По-моему, левая часть второго уравнения получается умножением левой части первого уравнения на 2, потому что .

*Автор*: Верно. Если бы и правая часть второго уравнения получалась умножением правой части первого уравнения на 2 , то эта система имела бы бесконечно много решений.

*Читатель*: Но с правыми частями так не получается! Потому что .

*Автор:* Значит, если мы теперь разделим обе части второго из уравнений на 2, то левые части у обоих уравнений будут одинаковыми, а правые части – разными:



а такая система, как мы уже знаем, не имеет решений.

Попробуем теперь сформулировать общее правило «обнаружения» систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющих решений.

***Если имеется система уравнений и при этом , но , то такая система уравнений не имеет решений.***

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б18.** Укажите системы уравнений, не имеющие решений:

а) б) в)

г)

Ну, и наконец, сформулируем правило, с помощью которого можно легко обнаружить систему, имеющую единственное решение. Оно очень простое. Это любая система которая: 1) имеет решение; 2) этих решений *не бесконечно много*.

***Если есть система уравнений  и при этом выполняется неравенство: , то такая система имеет единственное решение.***

Более строго мы докажем это утверждение в курсе 7-го класса.

СТОП! Решите самостоятельно:

**Б19.** К каждому из следующих уравнений подберите второе уравнение так, чтобы полученная система имела единственное решение: а) , б) .

**В11.** К уравнению подберите второе уравнение так, чтобы полученная система уравнений: а) не имела решений; б) имела единственное решение; в) имела бесконечное количество решений.

**✍ Домашнее задание**

# Задачи очень легкие

**А5**. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными? Назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член.

а) ; б) ; в) ; г) .

**А6**. Является ли пара чисел решением уравнений:

а) 2*х* + 4*у* – 1 = 0; б) ; в) .

**А7**. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с неизвестными и , решением которого является пара чисел: а) и ; б) и .

**А8**. Составьте уравнение, решением которого является следующая тройка чисел: а) ; б) ; в) .

**А9**. Решите системы уравнений:

а) б)

# Задачи легкие

**Б20**. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными? Назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член: а) ; б) ; в) ; г) .

**Б21**. Пары значений и указаны в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Какие из них являются решениями уравнений:

а) ; б) .

**Б22**. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с неизвестными *х* и *у*, решением которого является пара чисел:

а) ; б) .

**Б23**. Найдите по три решения каждого из уравнений:

а) ; б) ;

в) ; г) .

**Б24**. Выразив из следующих уравнений переменную через , найдите три каких-либо решения каждого уравнения:

а) ; б) ;

в) ; г) .

**Б25**. Является ли пара чисел ; решением систем:

а) б)

**Б26**. Какие из пар чисел ; ; ; являются решением систем:

а) б)

**Б27**. Решите системы уравнений:

а) ; б)

**Б28**. Решите систему уравнений методом подстановки:

а) б)

**Б29**. Решите системы методом алгебраического сложения:

а) б) в)

**Б30**. Решите системы уравнений методом алгебраического сложения: а) б) в) 

**Б31**. Сколько решений имеют системы: а)

б) в)

**Б32**. Сколько решений имеют системы: а)

б) в)

**Б33**. К каждому из следующих уравнений подберите второе уравнение так, чтобы полученная система не имела решений:

а) ; б) .

**Б34**. К каждому из следующих уравнений подберите второе уравнение так, чтобы полученная система имела бесконечно много решений: а) ; б) .

# Задачи средней трудности

**В12**. Является ли пара чисел и решением уравнения ? Составьте еще два уравнения, среди решений которого была бы эта пара чисел.

**В13**. Среди решений уравнения найдите такую пару, которая составлена из двух одинаковых чисел.

**В14**. Даны два линейных уравнения с двумя переменными: и . Найдите пару чисел, которая:

а) является решением первого уравнения, но не является решением второго;

б) является решением второго уравнения, но не является решением первого;

в) является решением и первого, и второго уравнения;

г) не является решением ни первого, ни второго уравнения.

**В15**. Составьте какую-либо систему линейных уравнений с переменными и , решением которой служит пара:

а) ; б) ; в) ; г) .

**В16**. Решите системы уравнений:

а) б)

**В17**. Решите методом подстановки:

а) б)

в) г)

**В18**. Решите методом подстановки:

а) б)

в)  г)

**В19**. Решите методом подстановки:

а) б)

в)г)

**В20**. Решите методом подстановки:

а) б)

в) г)

**В21**. Решите методом подстановки:

а) б)

в) г)

**В22**. Решите методом подстановки: а)

б)в)

**В23**. Решите методом подстановки:

**В24**. Решите системы уравнений:

а) б)  в) 

**В25**. Решите системы уравнений:

а) б)  в).

**В26**. Решите системы уравнений:

а) б) .

**В27**. Среди решений уравнения найдите такое решение, в котором значения переменных равны.

**В28**. Решите двумя способами (способом подстановки и способом сложения) системы:

а) б)

**В29**. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными и решите ее, если:

а) сумма двух чисел равна , а их разность ;

б) разность двух чисел равна , а их сумма .

**В30**. Сколько решений имеет система: а)

б) в) г)

**В31**. К уравнениям 1) ; 2) подберите второе уравнение так, чтобы полученная система уравнений: а) не имела решений; б) имела единственное решение; в) имела бесконечное количество решений. Сколько уравнений для каждого из случаев можно написать?

**В32**. Имеет ли система решения и сколько:

а) б)

# Задачи трудные

**Г11**. Найдите какие-либо три решения системы:

а) б)

**Г12**. Найдите значение коэффициента в уравнении *ах* + 6*у* = = –22, если известно, что решением этого уравнения является пара чисел: а) , б) .

**Г13**. При каком пара чисел является решением уравнения ?

**Г14**. Найдите все пары:

а) натуральных чисел, которые удовлетворяют уравнению ;

б) простых чисел, которые удовлетворяют уравнению *х* + *у* = 32.

**Г15**. Найдите три целочисленных решения уравнений или докажите, что таких решений не существует: а) ;

б) ; в) ; г) .

**Г16**. Решите методом подстановки:

а) б) в)

**Г17**. Решите методом подстановки: а)

б) в)

**Г18**. Решите системы уравнений:

а) ; б) 

**Г19**. Решите системы уравнений:

а) ; б) ; в) .

**Г20**. Решите системы уравнений:

а) б)

**Г21**. Решите системы уравнений:

а) б)

**Г22**. Решите системы уравнений:

а) б)

# Задачи очень трудные

**Д2.** Решите системы уравнений: а)

б) в)