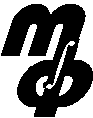
****

**Заочный физико-математический лицей**

**«Авангард»**

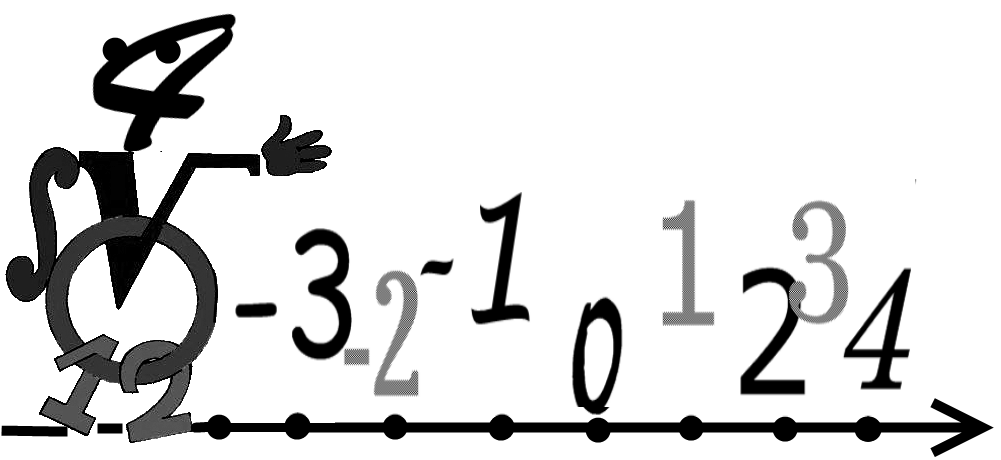
Е. Н. Филатов

# алгебра

**7**

##### **Экспериментальный учебник**

**Часть 1**

****

###### **МОСКВА – 2014**

**СОДЕРЖАНИЕ**

§ 1. Решаем уравнений

§ 2. Системы уравнений

§ 3. Числовая ось и числовые промежутки

§ 4. Координатная плоскость

§ 5. Функции и графики

§ 6. Прямая пропорциональная зависимость

§ 7. Линейная функция и ее график

§ 8. Взаимное расположение графиков линейных функций

§ 9. Линейное уравнение с двумя неизвестными и его график

ПОДСКАЗКИ

ОТВЕТЫ



**Глава 1. Уравнения и системы уравнений**

§ 1. РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ

# Прежде чем мы приступим к решению уравнений кратко напомним тем, кто уже знает и сообщим впервые для тех кто не знает, что такое *степень числа*.

Допустим, у нас имеется произведение: , то есть число 2 повторяется сомножителем 6 раз. Спрашивается, нельзя ли записать это выражение *покороче?*

Вот, например, когда у нас имеется сумма 6 слагаемых:

,

то ее мы для краткости записываем в виде произведения:



Для того чтобы кратко записывать «длинные» произведения, математики ввели такое обозначение:



Запись 26 читается так: «два в шестой степени». В этой записи 2 называется ***основанием степени***. Число 6, которое показывает, сколько раз число 2 повторяется сомножителем, называется ***показателем степени***, а само выражение 26 – «просто» ***степенью***.

В общем виде можно записать так:

. (1.1)

Здесь *а* – основание степени, *п* – показатель степени, *ап* –«просто» степень.

*Читатель*: А может ли показатель степени быть равным единице?

*Автор:* Тут надо ***договориться***! Ведь на самом деле не вполне понятно, что значит: взять, например, число 2 сомножителем ОДИН РАЗ! Ясно, что для операции умножения нужно уж никак не меньше двух сомножителей!

Но математики договорились, что им будет ***удобно*** (почему – выясним в дальнейшем!), если любое число в первой степени мы будем считать равным самому этому числу:

. (1.2)

Учтите, что формула (1.2) ниоткуда не следует! Это ***определение*** 1-й степени любого числа!

*Читатель*: А может ли показатель степени быть равным нулю?

*Автор*: Тут, на первый взгляд, все ещё непонятнее. Как это: ноль раз (то есть ни разу!) умножить, например, число 2 само на себя? Но и тут «работает» договоренность математиков! Оказалось ***удобным*** (почему – обязательно выясним!) считать, что любое число, кроме нуля, в степени ноль равно единице:

 (1.3)

*Читатель*: А до чего же договорились математики по поводу нуля в нулевой степени?

*Автор*: Они пришли к выводу, что это примерно то же самое, что и 0:0, то есть ***непонятно что***! Поэтому выражение  считается ***неопределенным***. Почему? Со временем обязательно разберемся!

А теперь решим задачу.

**Пример.** Вычислить: а) 23; б)1100; в) 104; г) 112; д) 71; е) 810.

***Решение.***

а) 23=

б)1100=.

в) 104=

г) 112=

д) 71 = 7 (согласно формуле (1.2)).

е) 810 = 1 (согласно формуле (1.3)).

*Ответ*: а) 8; б) 1; в) 10000; г) 121; д) 7; е) 1.

**Квадрат и куб данного числа**

Если какое-то число возвели во вторую степень, то говорят, что данное число «возвели в квадрат». Иными словами выражение 32 можно прочитать как «три во второй степени», а можно сказать и так: «три в квадрате».

*Читатель*: А причем тут квадрат?

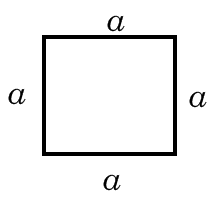


Рис. 1.1

*Автор*: Допустим, у нас есть квадрат, сторона которого равна 3 см. Тогда площадь этого квадрата будет равна: квадратных сантиметров (рис. 1.1). Поэтому возвести число в квадрат – это значит вычислить площадь такого квадрата, сторона которого равна данному числу.

Запомним: – читается как «а в квадрате».

Если же какое-то число возвели в третью степень, то говорят, что данное число «возвели в куб». То есть выражение 23 можно прочитать и как «два в третьей степени», и как «два в кубе».

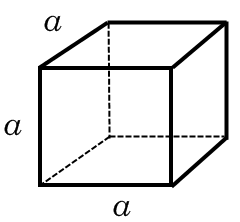


Рис. 1.2

Напомним, что куб можно представить себе как ящик, у которого длина, ширина и высота равны. Чтобы вычислить объем куба, надо умножить его длину на ширину и на высоту. Допустим, у нас есть куб, сторона которого равна 2 см. Тогда объем этого куба будет равен:  кубических сантиметров (рис. 1.2).

# Что такое «уравнения» и зачем они нужны?

*Автор*: Допустим нам надо решить такую задачу: «Я задумал число, умножил его на 3, от полученного произведения отнял 4 и получил то число, которое я задумал. Угадайте, какое число я задумал?»

*Читатель*: Честно говоря, даже не знаю, как подступиться к Вашей задаче…

*Автор:* Давайте обозначим задуманное число буквой *х*. Тогда чему будет равно произведение этого числа на 3?

*Читатель*: По-моему, 3×*х*.

*Автор*: Верно. А что мы получим, если отнимем от этого произведения 4?

*Читатель*: 3×*х –* 4.

*Автор:* Правильно! Напомню только, что при умножении числа на букву знак умножения принято для краткости опускать. Поэтому наше выражение лучше записать так: 3*х* – 4. По условию задачи это выражение равно заданному числу, то есть 3*х* – 4 = *х*.

Мы получили ***уравнение***, то есть два алгебраических выражения, соединенных знаком равенства. Теперь ясно, что для того, чтобы решить задачу, нам достаточно *подобрать* такое значение *х*, при котором левая часть уравнения () равна правой (*х*).

*Читатель*: По-моему, подходит *х* = 2. Левая часть: 3*х* – 4 = 3×2 – 4 = 2. Правая часть: *х* = 2.

Мы получили верное равенство 2 = 2.

*Автор:* Верно, значит, я загадал число 2! Теперь мы с Вами поняли, что такое уравнение, составили одно уравнение и даже решили его, подобрав (или угадав) решение.

Значение неизвестной величины, которую мы обозначили буквой *х* и при которой уравнение превращается в верное числовое равенство, называется ***корнем уравнения***.

# Является ли данное число корнем?

**Задача 1.1.** Определите, является ли значение *х* = 2 корнем уравнения: а) ; б) ; в) ; г).

***Решение.*** Чтобы ответить на вопрос задачи, надо подставить значение *х* = 2 в левую и правую части каждого уравнения и проверить: будет ли левая часть равна правой. Если да, то *х* = 2 – корень данного уравнения, а если нет, то нет.

а) .

Левая часть: , правая часть: 4. Отсюда 4 = 4, значит,  корень данного уравнения.

б) .

Левая часть:. Правая часть: 2*х =* 2×2 = = 4. Отсюда , значит,  не является корнем данного уравнения.

в) .

Левая часть:  Правая часть: 6. 6 = 6, значит,  корень данного уравнения.

г) . Левая часть:  Правая часть:  = 10 – 2 = 8, 8 = 8, значит,  корень данного уравнения.

*Ответ*: а), в), г) да; б) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А1.** Является ли *у* = 2 корнем уравнений:

а) ; б); в) –2 + *у* = 2?

**Б1.** Является ли *а* = –10 корнем уравнений:

а) *а*2 = 100; б); в) *а + а*2 = 90?

# Угадай корень!

**Задача 1.2.** Решите уравнения, подобрав подходящие корни: а); б); в); г).

***Решение.***

а). Тут догадаться совсем нетрудно, что , так как 1 + 100 = 101.

б) . Здесь надо обратить внимание на то, что в левой части уравнения стоит квадрат неизвестного числа. Как вы помните, квадрат любого числа может быть только положительным или равным нулю числом. В правой же части находится отрицательное число, получаем противоречие. Это означает, что у данного уравнения корней нет.

в) . Здесь квадрат некоторого неизвестного числа *у* является числом положительным, противоречия нет – остается только подобрать такое число, которое при возведении в квадрат даст 0,01.

*Читатель*: По-моему, годится , потому что 

*Автор:* Верно! Но все ли корни мы нашли? Вспомним о том, что и отрицательное число при возведении в квадрат тоже дает положительное число.

*Читатель*: Я Вас понял. Годится еще , так как .

*Автор*: Совершенно правильно!

г) .

*Читатель:* Ясно, что неизвестное нам число *а* не может быть очень большим. Попробуем перебрать все возможные значения, начиная с .

Предположим, что , тогда 1×(1+1)=1×2=2; . Не подходит.

Предположим, что , тогда   Не подходит.

Предположим, что *а* = 3, тогда 12 = 12. Подходит! Значит, – корень уравнения .

*Автор:* Вы правы, но произведение двух отрицательных чисел тоже может равняться 12…

*Читатель:* Согласен! , значит,  – тоже корень нашего уравнения.

*Автор*: Правильно!

*Ответ*: а) ; б) нет решений; в);

г).

СТОП! Решите самостоятельно.

**А2.** Угадайте корни уравнений: а) ; б) 34 += 34; в) г); д) .

**Б2.** Найдите корни уравнений:

а) б) в)

**В1.** Найдите корни уравнений:

а) ; б) ; в) *х*2(*х* + 1)(*х* – 1) = 0.

# Может ли уравнение: а) не иметь корней?

# б) иметь бесконечно много корней?

*Автор*: Как Вы считаете, имеют ли корни уравнения: а) 2·*х =*0; б) .

*Читатель*: По-моему, в случае а) корень , так как , а в случае б) корней вообще нет, так как всякое число, умноженное на ноль, равно нулю, а правая часть уравнения равна 2.

*Автор*: Верно! Значит, мы с Вами установили, что уравнения, не имеющие корней, существуют. А теперь давайте рассмотрим такое уравнение: . Как Вы считаете, чему равен корень такого уравнения?

*Читатель*: Я думаю, , так как .

*Автор*: Вы правы,  действительно является корнем данного уравнения. Но единственный ли это корень? Возьмем, например, *х* = 100. Разве это значение не является корнем?

*Читатель:* Да, похоже, что является, потому что .

*Автор*: А можете ли Вы придумать такое число, которое НЕ является корнем уравнения ?

*Читатель:* Пожалуй, что нет. Ведь любое число, умноженное на ноль, равно нулю.

*Автор:* Верно! Значит, ЛЮБОЕ натуральное число является корнем данного уравнения. Вот мы с Вами и нашли уравнение, которое имеет бесконечно много корней!

**Задача 1.3.** Решите уравнения: а) ; б).

а) .

1. Воспользуемся распределительным законом умножения и преобразуем наше уравнение:

.

1. Поскольку произведение любого числа на 0 равно 0, то левая часть данного уравнения всегда будет равна нулю, а правая часть уравнения всегда равна 5. Значит, ни при каких значениях *х* равенства не достигается. Корней нет.

б) .

Вычтем из обеих частей уравнения неизвестное число *х*, получим .

Мы получили верное числовое равенство. Значит, любое число является корнем данного уравнения.

*Ответ*: а) уравнение не имеет корней; б) корнем уравнения является любое число.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А3.** Найдите все корни уравнений: а) 2*х* – 2*х* = 1; б) 2*х* = 5 – 5; в) *х – х*  = 3 – 3.

**Б3.** Решите уравнение: .

**В2.** Решите уравнение: .

# Сколько корней имеет уравнение?

**Задача 1.4.** Даны уравнения: а) ; б) ; в) ; г) ; д). Не решая их, скажите, имеют ли они корни? Если да, то сколько?

***Решение.*** При решении этих задач необходимо помнить, что четная степень любого числа может быть числом либо положительным, либо равным нулю, т.е. 54 ≥ 0; (–3)2 ≥ 0; *х*2 ≥ 0; (–*а*)4 ≥ 0 и т.д.

а) . Здесь *х*2 ≥ 0 и *х*4 ≥ 0, значит, – *х*2 ≤ 0, – *х*2 ≤ 0 и –*х*2 – *х*4 ≤ 0, т.е. два отрицательных или равных нулю числа могут дать в сумме лишь отрицательное или равное нулю число. А если к отрицательному или равному нулю числу прибавить отрицательное число, получим отрицательное число: . Мы получили уравнение, в котором левая часть не равна правой (одна меньше нуля, вторая равна нулю) при любых значениях *х*. Это означает, что у этого уравнения корней нет.

б) . Здесь  *х*2 ≥ 0, поэтому в левой части уравнения при любых *х* будет находиться положительное или равное нулю число. В правой же части находится отрицательное число –9. Таким образом, левая часть никогда не будет равна правой – у уравнения нет корней.

в) . Здесь *х*2 ≥ 0 и справа находится положительное число, никаких противоречий нет. Существуют два числа, которые при возведении в квадрат дадут 0,09: одно из них положительное, второе отрицательное. Это 0,3 и –0,3. У уравнения два корня.

г) . В этом уравнении справа и слева стоит одно и то же выражение. Это означает, что левая часть будет равна правой при любом значении *х*. У такого уравнения бесконечно много корней.

д) . Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, значит, равенство выполняется, если: *х* = 0,  . Следовательно, наше уравнение имеет три корня

*Ответ*: а) нет корней; б) нет корней; в) два корня; г) бесконечно много корней; д) три корня.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б4.** Определите, сколько корней имеют уравнения:

а); б); в) ?

**В3.** Определите, сколько корней имеют уравнения:

а); б); в) ?

# «Хитрые» вопросы про корни уравнений

**Задача 1.5.**

а) Может ли уравнение  иметь положительные корни?

б) Докажите, что уравнение  не имеет целых корней.

***Решение.***

а) Может ли уравнение  иметь положительные корни?

Предположим, что данное уравнение имеет положительный корень. Тогда *х*6 и *х*5 также будут числами положительными, и вся левая часть будет положительной. Это означает, что левая часть ни при каких *х* не будет равна правой (т.е. нулю). Значит, наше уравнение не имеет положительных корней.

б) Докажите, что уравнение  не имеет целых корней.

Преобразуем исходное уравнение:



Теперь применим метод доказательства «от противного». Пусть уравнение имеет целый корень. Тогда слагаемые 2*х*50, *х*30 тоже будут целыми, а значит, целым числом будет и вся левая часть уравнения. В правой же части находится дробное число. Мы получили противоречие. Следовательно, уравнение целых корней не имеет.

*Ответ*: а) уравнение не имеет положительных корней; б) уравнение не имеет целых корней.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А4.** Имеет ли уравнение  положительные корни?

**Б5.** Определив знак выражения в левой части уравнения , ответьте на вопрос: какие из чисел –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4 точно не являются его корнями.

**В4.** Докажите, что уравнение  не имеет целых корней.

# Начинаем *решать* уравнения

*Автор*: Давайте теперь попробуем *не угадывать* решения уравнений, а *решать* уравнения.

*Читатель*: А разве *угадать решения* и *решить* уравнение это не одно и то же?

*Автор:* Если Вы правильно угадали все корни уравнения, то Вы, безусловно, его решили! Но дело в том, что угадать корни уравнения иногда очень непросто! Вот попробуйте, например, угадать корни уравнения:  Вам придется ОЧЕНЬ долго угадывать решение такого уравнения (корни этого уравнения равны, можете проверить). Было бы гораздо лучше, если бы мы нашли какой-то *порядок действий*, который бы позволил нам вычислять значения корней уравнения безо всяких догадок!

## *Уравнения вида*

**Задача 1.6.** Решите уравнение: а) б) *х* – 1,7 = = –2,6; в) .

***Решение.***

а) . Прежде всего, заметим, что если от двух равных чисел отнять по равному числу, то полученные числа тоже будут равны. Например, если 12 = 12, то и 12–1 = 12–1, и 12–10 = 12–10 и 12–12 = 12–12.

Наше уравнение – это равенство двух чисел:  и 128.

(Конечно,  – это пока «засекреченное» число. Оно превратится в «нормальное» число только тогда, когда мы вместо буквы подставим ее значение.)

Поскольку числа  и 128 равны, то мы можем отнять от каждого из них одно и то же число 15, равенство при этом не нарушится: .

Корень найден! Давайте проверим правильность нашего решения. Для этого убедимся, что *левая часть* нашего уравнения, то есть  при  равна *правой части* нашего уравнения, то есть 128.

Левая часть:  = 113 + 15 = 128; правая часть: 128. Левая часть равна правой: 128 = 128. Значит, все верно!

б) *х* – 1,7 = –2,6. Прибавим к обеим частям уравнения число 1,7. Получим: *х* – 1,7 + 1,7 = –2,6 + 1,7. Отсюда *х* = –0,9. Сделаем проверку: левая часть: *х* – 1,7 = –0,9 – 1,7 = –2,6; правая часть: –2,6; –2,6 = –2,6. Все верно.

в) . Вычтем из обеих частей уравнения число . Получим



Сделаем проверку: левая часть  0,8 – 2,5 = = –1,7; правая часть:  = –1,7; –1,7 = –1,7. Все верно!

СТОП! Решите самостоятельно.

**А5.** Решите уравнения:

а) *х* + 45 = 52; б) *х* – 17 = 39; в) 119 – *х* = 54.

**Б6**. Решите уравнения:

а) *х* – 2,9 = –34; б) *х* + 6,7 = 115; в).

# Неизвестное с коэффициентом

Иногда в уравнение входит неизвестное, умноженное на число, например: и т.д. Число, на которое умножается неизвестное (в нашем примере это 5; ; –3,5), называется ***коэффициентом.***

***Уравнения вида ***

**Задача 1.7.** Решите уравнения: а) б) ; в).

***Решение.***

а)  Заметим, что если два равных числа разделить на одинаковые числа, то полученные частные также будут равны. Например, если 100 = 100, то 100:2 = 100:2; 100:4 = = 100:4; 100:50 = 100:50 и т.д.

Разделим обе части нашего уравнения на 2, получим:



Проверим: левая часть:  правая часть: 100; 100 = 100. Все верно.

б) . Разделим обе части уравнения на 4:

.

Проверим: левая часть ;

правая часть:; =. Все верно!

в). Разделим обе части уравнения на (–2,3):

.

Проверим: левая часть: *х*(–2,3) = 3⋅(–2,3) = –6,9; правая часть:  = –6,9; –6,9 = –6,9. Все верно!

*Ответ*: а) *х* = 50; б) ; в) *х* = 3.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А6.** Решите уравнения:

а) 8*х* = 16; б); в) 2,5*х* = 5; г).

**Б7.** Решите уравнения: а) –8*х* = 1,6; б) 1,2*х* =.

# *Уравнения с параметром*

***Параметром*** в уравнении называется «известное» число, обозначенное буквой. Причем в условии всегда указывается, какие буквы в данном уравнении считаются неизвестными величинами, а какие – известными, то есть ***параметрами.***

Обычно неизвестную величину обозначают буквой *х*, а для параметров используют первые буквы латинского алфавита: *a*, *b*, *c*, ...

Рассмотрим уравнение *ax = b*, в котором *х –* неизвестная величина, а *а* и *b* – параметры. Если *а* ≠ 0, то обе части уравнения можно разделить на *а*, получим:



Итак, если *а* ≠ 0, то .

Если *а* = 0, но *b* ≠ 0, уравнение принимает вид: . Это уравнение не имеет решений.

Если  и =0, то уравнение принимает вид: . Решением этого уравнение является любое число.

**Задача 1.8.** При каком значении *а* уравнение : а) имеет корень *х* = 2; б) имеет корень – целое число; в) не имеет корней; г) имеет единственный корень; д) имеет бесконечное число корней?

***Решение.***

1. Подставим в наше уравнение значение *х* = 2 и найдем значение *а*: .
2. . Ясно, что дробное выражение  является целым числом тогда, когда 10 нацело делится на , то есть при .
3. Решений нет, когда *а* = 0.
4. Единственное решение  при любом .
5. В данном случае ни при каких значениях *а* уравнение не примет вид: , значит, бесконечного числа корней быть не может.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б8.** В уравнении *ах* = 15 найдите коэффициент *а*, зная, что корень уравнения равен: а) –3; б) ; в); г) 0,02.

**В5.** Имеет ли корни уравнение 4*х* + 5 = 4*х* + *а* при *а* = 2.

**Г1.** При каких значениях *s* уравнение  имеет: а) единственный корень; б) не имеет корней; в) имеет бесконечно много корней?

**Д1**. При каком значении *с* уравнение : а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней?

# В уравнениях с параметрами, которые мы будем далее рассматривать в этом параграфе (если это не будет оговорено особо), *х –* неизвестная величина, а все остальные буквы – параметры.

# Задача 1.9. Решите уравнения: а) *х – а = –b*;б) *с – х = b* + 0,5.

# *Решение.*

*Читатель:* Все-таки не очень понятно, что значит решить уравнение *х – а = –b.* Ведь в этом уравнении одни только буквы, а чисел вообще нет. *Что* мы должны *найти*?

*Автор*: Мы должны выразить неизвестную величину *х* через известные величины *а* и *b*. Иными словами, мы должны получить такое равенство, в левой части которого будет стоять «один икс», а в правой части – некоторое алгебраическое выражение, содержащее буквы *а* и *b*.

а) *х – а = –b*. К обеим частям уравнения прибавим число *а.* Получим: *х – а + а = –b + а* → *х = –b + a.*

Проверим: левая часть^ *х – а = –b + a – a = –b*; правая часть^ –*b*; –*b = –b*. Все верно.

б) *с – х = b* + 0,5.Здесь неизвестным также является *х*, а *с* и *b* – некоторые известные числа. Вычтем из обеих частей уравнения число *с*. Получим:

*с – х – с = b* + 0,5 – *c* → –*x = b +* 0,5 – *c*.

Значит, *х* будет равно числу, противоположному (*b* + 0,5 – *c*).

Итак, *x =* –(*b* + 0,5 – *c*) = –*b –* 0,5 + *c* = *c – b –* 0,5.

Проверить наш результат попробуйте самостоятельно.

*Ответ*: а) *х = –b + a*; б) *x = c – b –* 0,5.

# СТОП! Решите самостоятельно.

**Б9.** Решите уравнения:

а) *х – а* = –2,6; б) *х* + *с* = 0,5 – *b*; в).

**Задача 1.10.** Решите уравнение: а) 5*х* = 2*b*; б) *х*⋅2,5*а* = 5*b* (*а* ≠ 0); в) (*а* ≠ 0, *b* ≠ 0).

***Решение***. У нас опять уравнение с буквами (параметрами). Неизвестное, как всегда, *х*, а параметры *a* и *b*.

а) 5*х* = 2*b*. Наша цель – найти *х.* Разделим обе части уравнения на 5. Получим: .

б) *х*⋅2,5*а* = 5*b*. Разделим обе части на коэффициент при *х*, т.е. на 2,5*а*:

.

Деление на *а* возможно, так как по условию *а* ≠ 0.

в) . Действуем аналогично пунктам а) и б):

.

Заметим, что наши преобразования были бы невозможны, если бы *а* = 0 или *b* = 0. Но так как по условию *а* ≠ 0, *b* ≠ 0, то все правильно!

*Ответ*: а) *х* ; б) *х* ; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б10.** Решите уравнения:

а) 4*х* = *d*; б)  (*а* ≠ 0); в).

**В6.** Решите уравнения:

а) (*а* ≠ 0, *b* ≠ 0, *c* ≠ 0); б) (*а* ≠ 0);

в)(*а* ≠ 0, *b* ≠ 0); г) (*а* ≠ 0, *b* ≠ 0).

# *Уравнения вида*

Начнем с обыкновенных уравнений с числами.

**Задача 1.11.** Решите уравнения:

а) б); в) .

***Решение.***

а) Сначала прибавим к обеим частям уравнения число 10, получим:



А теперь разделим обе части уравнения на 2, получим:



Проверим: левая часть  правая часть 100; 100 = 100. Все верно!

б) . Вычтем из обеих частей уравнения 10:



Теперь делим обе части на :

;

.

в) . Сначала прибавим к обеим частям 2,25, получим: –1,44*х* – 2,25 + 2,25 = 9,75 + 2,25 → –1,44*х* = 12.

Теперь разделим обе части уравнения на коэффициент при *х*, то есть на –1,44. Получим:



.

*Ответ*: а) *х* = 55; б) ; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**А7.** Решите уравнения:

а) 8*х* – 4 = 20; б) 2,5*х* – 2,5 = 2,5; в) 1,7 + *х* ⋅5,1 = 1,8.

**Б11.** Решите уравнения: а) –8*х* + 1,44 = –1,56;

б) 1 – *х*⋅6 = ; в); г) –3,5*х* – 2,6 = 4,4.

**В7.** Решите уравнения:

а); б); в).

Теперь потренируемся в решении уравнений такого же типа: , но с «буквами».

**Задача 1.12.** Решите уравнения:

а) 2*х –* *а* = 1; б); в)  (*а* ≠ 0).

***Решение.***

а) 2*х –* *а* = 1. Еще раз напомним: *х* – неизвестное, *а* – некоторое известное число, обозначенное буквой.

Прибавим *а* к обеим частям уравнения, а потом обе части разделим на 2 (т.е. на коэффициент при *х*), получим:

.

б) . Здесь *х* – снова неизвестное, *а* и *b* – некоторые известные числа, обозначенные буквами. Действуем аналогично:



.

в) . Аналогично:





*Ответ*: а) ; б) ; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В8.** Решите уравнения: а) 4*х* + 3 = *d*; б) 4 + *x*⋅3,2*a* = 0,16 (*а* ≠ 0); в) (*с* ≠ 0); г)  (*а* ≠ 0; *b* ≠ 0; *с* ≠ 0).

**Г2.** Решите уравнения: а)  (*а* ≠ 0; *с* ≠ 0); б) (*а* ≠ *b*); в) –(*k + l*)*x* – (*k – l*) = 2*k* – 2*l* (*k* ≠ *l*); г)  (*а* ≠ 0; *b* ≠ 0; *с* ≠ 0).

# Приведение подобных членов

## *Уравнения типа*

**Задача 1.13.** Решите уравнение: а) ; б) 0,2*х +*0,3*х* – 0,1*х* = –0,4 – 0,5; в).

***Решение***. Вспомним, как приводятся подобные члены. Допустим, у нас есть алгебраическое выражение . Как его можно *упростить*? Можно, например, воспользоваться распределительным законом умножения и записать это выражение так:

.

А можно рассуждать так: *х* – это некоторое количество денег в одном кошельке. Сначала у нас на столе лежало 3 таких кошелька, потом забрали 2 кошелька, и на столе остался один кошелек, в котором находится денежная сумма . Значит, .

Аналогично упрощается выражение : к трем кошелькам добавили два кошелька, получили 5 кошельков, значит .

Теперь приступим к решению наших уравнений, они решаются очень просто:

а) .

б) 0,2*х* + 0,3*х* – 0,1*х* = –0,4 – 0,5.

Упростим левую часть: 0,2*х* + 0,3*х* – 0,1*х* = (0,2 + 0,3 – – 0,1)*х* = 0,4*х*. Упростим правую часть: –0,4 – 0,5 = 0,9.

Получили:

.

в) . Для начала отнимем от обеих частей уравнения 297, а потом выполним приведение подобных членов:

.

*Ответ*: а) ; б) ; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**А8.** Решите уравнения: а) ; б).

**Б12.** Решите уравнения:

а); б).

**В9.** Решите уравнение .

Теперь рассмотрим уравнения такого же типа, но уже «с буквами».

**Задача 1.14.** Решите уравнения: а) ; б) *х* + *ах* = *а* + 1.

***Решение***.

а) . Упростим сначала левую часть: *х*(3 + + 3,5) = 6,5*х*. Теперь выполним деление обеих частей на 6,5:

.

б) *х + ах = а* + 1. Упростим левую часть: *х + ах = х*(*а* + 1). Теперь выполним деление обеих частей на *а* + 1. Но здесь есть один «нюанс»: как вы помните, деление на 0 выполнять нельзя, поэтому *а* + 1 не должно равняться 0 (*а* + 1 ≠ 0 или *а* ≠ –1).

Итак, при *а* ≠ –1: *х*(*а* + 1) = *а* + 1 → .

*Читатель*: А если *а*  = –1?

*Автор*: Рассмотрим и этот случай. При *а* = –1 наше уравнение примет вид: *х* + (–1)*х* = (–1) + 1 → *х – х* = –1 + 1 → 0⋅*х* = 0. Это значит, что при *а* = –1 решением будет любое число.

*Ответ*: а) ; б) *х* = 1 при *а* ≠ –1 и *х –* любое число при *а* = –1.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б13.** Решите уравнения: а) 4*х* + 3*d* + 2*х* = *d*; б) 5*х* – *а* – 3,5*х* = ; в) *сх* – 2*х* = *с* – 1, где *с* ≠ 2.

**В10.** Решите уравнения:

а) 4*х* + 4*ах* = 8; б); в) (*с* + 1)*х –* 0,2*х* = –3.

**Г3.** Решите уравнения: а);

б).

# Уравнения со скобками

### *Уравнения типа*

**Задача 1.15.** Решите уравнения: а);

б); в).

***Решение.***

а). Здесь нам даже не придется раскрывать скобки – достаточно просто разделить обе части уравнения на 2:

2(*х* – 5) = 10 → 2(*х* – 5):2 = 10:2 → *х* – 5 = 5.

Теперь прибавим 5 к обеим частям уравнения и получим ответ:

.

Проверим: левая часть: ; правая часть: 10; 10 = 10. Все верно!

б) . Раскроем скобки:



Приводим подобные члены и прибавляем к обеим частям 5:

0,2*х* – 5 – 0,1*х* = 2 → 0,1*х* – 5 = 2 →

0,1*х* – 5 + 5 = 2 + 5 → 0,1*х* = 7.

Умножим обе части уравнения на 10:

0,1*х* = 7 → 0,1*х*⋅10 = 7⋅10 → *х* = 70.

в) . Здесь в левой части уравнения находятся два дробных выражения со знаменателями 2 и 4 соответственно. От дробей легко «избавиться», умножив обе части уравнения на 4:



*Ответ*: а) *х =*10; б) *х* = 70; в) *х* = 7.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б14.** Решите уравнения:

а); б) ; в).

**В11.** Решите уравнения: а); б) в) –5(–2,2*х* – 1,4) + *х* = 9,1.

Теперь, прежде чем идти дальше, сформулируем одно правило, которое поможет нам более эффективно решать уравнения.

Рассмотрим такое уравнение .

Мы уже знаем, что для решения данного уравнения надо прибавить к обеим частям , тогда получим:



А теперь сравним две записи:  и . Можно сказать, что мы как бы перенесли слагаемое *а* из левой части уравнения в правую, поменяв его знак на противоположный, то есть с «плюса» на «минус».

Рассмотрим другое уравнение: .

Перепишем его в виде: . Прибавим к обеим частям уравнения , получим:

.

Сравним записи: и .

Получается, что мы как бы перенесли слагаемое  из правой части уравнения в левую, поменяв его знак на противоположный (в данном случае с «минуса» на «плюс»).

Теперь, когда мы разобрались в сути дела, сформулируем ПРАВИЛО ПЕРЕНОСА СЛАГАЕМЫХ:

***При решении уравнений можно переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный.***

Попробуем решить несколько простых уравнений, пользуясь этим правилом.

**Задача 1.16.** Решите уравнения: а); б); в) .

***Решение*.**

а) .

Перенесем слагаемое (–2) из левой части уравнения в правую, изменив знак числа на противоположный, то есть с «минуса» на «плюс»: .

б) . Перенесем 2 из левой части уравнения в правую, поменяв знак на противоположный, то есть с «плюса» на «минус», получим: .

в) . Сначала перенесем 4 из правой части уравнения в левую, поменяв знак с «плюса» на «минус», получим:



Теперь перенесем *х* из левой части в правую, поменяв знак с «плюса» на «минус» и получим ответ:

.

*Ответ*: а) ; б) ; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**А9.** Решите уравнения: а) *х* + 10 = 20; б) *х* + 10 = –20.

**Б15.** Решите уравнения: а) 0,5 – *х* = –2; б) .

**В12.** Решите уравнения: а) ; б) .

**Задача 1.17.** Решите уравнение: а) ;

б); в) 

***Решение.***

а) . Разделим обе части на *а* (это можно сделать при условии, что *а* ≠ 0), получим:

*а*(*х* – *а*) = 2 → *а*(*х – а*): *а* = 2:*а* → .

(Мы перенесли слагаемое (–*a*) из левой части уравнения в правую, изменив знак с «минуса» на «плюс».)

*Читатель*: А если *a* = 0?

*Автор*: При *а* = 0 уравнение принимает вид 0⋅(*х* – 0) = 2. Это равенство не выполняется ни при каких значениях *x*, поэтому при *а* = 0 у уравнения решений нет.

б) . Раскроем скобки и приведем подобные члены:

0,2*х* + (*х – а*) = 1,4*а* → (0,2*х* + *х*) – *а* = 1,4*а* →

1,2*х* – *а* = 1,4*а* → 1,2*х* = 1,4*а + а.*

Мы перенесли (–*a*) из левой части в правую, изменив знак с «минуса» на «плюс». Получили:

1,2*х* = 2,4*а* → 1,2*х* : 1,2 = 2,4*а* : 1,2 → *х* =2*а*.

в)  Вынесем в левой части уравнения *с* за скобки и разделим на *с* обе части уравнения:



Перенесем 1,5 из левой части в правую:

–*х* = 1,5 – 1,5 → –*х* = 0 .

Это решение верно при *с* ≠ 0, так как в процессе решения мы выполняли деление на *с*. При *с* = 0 уравнение приобретает вид . Это равенство выполняется при любых значениях *x*, т.е. его решением будет любое число.

*Ответ*: а)  при *а* ≠ 0 и нет решений при *а* = 0; б) *х* = 2*а*; в) *х* = 0 при *с* ≠ 0 и *х –*  любое число при *с* = 0.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б16.** Решите уравнения:

а) (*с* + 1)*х* – 0,2*х* = 3; б) 0,2*с* + (*х* – 3*с*) = 2,2*с*; в) *k*(*x* + 2) = 2*k*.

**В13.** Решите уравнение: а); б) 0,5*k*(*k* + *x* + 1,5) = = 2*k*; в) –5*b*(0,2*x* – 1) + *bx=0*; г) .

# Неизвестное в обеих частях уравнения

### *Уравнения вида*

**Задача 1.18.** Решите уравнение: а) 3*х* – 4 = *х*; б) 0,1*х –* 2 = = 0,2*х* + 3.

***Решение.***

а) 3*х* – 4 = *х*. Перенесем 3*х* из левой части уравнения в правую, получим:



б) 0,1*х –* 2 = 0,2*х* + 3. Одновременно перенесем 0,1*х* из левой части в правую, а 3 – из правой в левую получим:



Теперь умножим обе части уравнения на 10 и сразу получим ответ:

.

*Ответ*: а) *х* = 2; б) *х* = 50.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б17.** Решите уравнение: а) ; б) , .

**В14.** Решите уравнение: а) ; б) 

Теперь рассмотрим более сложные уравнения, для решения которых нам придется и раскрывать скобки, и пользоваться правилом переноса слагаемых, и приводить подобные члены.

**Задача 1.19.** Решите уравнение .

***Решение***. Начнем с того, что раскроем скобки и приведем подобные члены в левой части уравнения:

(12 – *х*) – (3*х* + 4) = –*х* + 1 → 12 – *х* – 3*х* – 4 = –*х* + 1→

–4*х* + 8 = –*х* + 1.

Теперь перенесем (–*х*) из правой части в левую, а 8 – из левой части в правую, получим:

–4*х* + 8 = –*х* + 1 → –4*х* + *х* = 1 – 8 → –3*х* = –7 → .

*Ответ:*  *.*

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б18.** Решите уравнения: а);

б) 2(*х* – 4) – 4(*х* – 2) = –(–2 – 2*х*);

в) 2(*х* – 1) – (*х* + 2) = –3(4 – *х*) + 4(3 – *х*).

**В15**. Решите уравнение: .

Теперь рассмотрим уравнения с обыкновенным дробями, которые удобнее всего решать путем умножения обеих частей уравнения на целое число, которое «превращает» все дроби в целые числа. Покажем, как это делается на конкретном примере.

**Задача 1.20.** Решите уравнения:

а) ; б).

***Решение.*** а) . Сделаем такую «хитрость»: умножим обе части уравнения на 6, получим:



Теперь переносим 2*х* в левую часть, а 6 – в правую:

.

б) .

*Автор*: Как Вы считаете, на какое целое число надо умножить обе части, чтобы «избавиться» от дробей?

*Читатель:* По-моему, на 4:



Далее переносим (–8) в правую часть, а  – в левую и получаем:



Решений нет.

*Автор*: Совершенно верно!

*Ответ:* а) *х* = –12; б) нет решений.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В16.** Решите уравнения: а);

б); в).

# Уравнения с делением

## *Уравнения типов* и

**Задача 1.21.** Решите уравнения: а) ; б) ; в) .

***Решение.***

а). Если два числа равны (например, 5 = 5), то при умножении этих чисел на одинаковые сомножители произведения также будут равны, например:

.

Умножим обе части нашего уравнения на 120, получим



Проверим: левая часть ; правая часть 40; 40 = 40. Все верно!

б) . Умножим обе части уравнения на «засекреченное» число , получим:

.

Теперь разделим обе части уравнения на 40 и получим ответ:

.

Проверим: левая часть ; правая часть 40; 40 = 40. Все верно.

в) . Начнем с того, что умножим обе части уравнения на 3:



Воспользуемся распределительным законом умножения и раскроем скобки в правой части уравнения:

.

Теперь перенесем в правую часть, а (–18) – в левую:

.

Теперь разделим обе части уравнения на 5 и получим ответ:

.

*Ответ*: *х* = 4.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б19.** Зная, что произведение 126 и 35 равно 4410, решите уравнения: а) ; б) ; в) .

**В17.** Решите уравнения: а) ; б) ; в) .

Продолжим решать «уравнения с делением», только теперь в качестве делимых и делителей у нас будут выступать обыкновенные и десятичные дроби.

**Задача 1.22.** Решите уравнения: а) ; б); в) .

***Решение.***

а) . Сначала умножим обе части уравнения на 0,1, получим:

(*х* + 0,5):0,1 = –0,2 → (*х* + 0,5):0,1⋅0,1 = –0,2⋅0,1 →

*х* + 0,5 = –0,02 → *х =* –0,02 – 0,5→ *х* = –0,52.

б)  . Умножим обе части на :



в) . умножим обе части на (*х* – 0,1):



Теперь умножим обе части уравнения на 5 и избавимся от знаменателя:





*Ответ*: а) *х* = –0,52; б) *х*; в) *х =* .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б20.** Решите уравнения:

а) ; б) ; в).

**В18.** Решите уравнения: а);

б); в) .

**Г4.** Решите уравнение

.

**Задача 1.23.** Решите уравнения:

а) ; б).

***Решение.***

а) . Умножим обе части уравнения на *а*:



Ясно, что решение есть только при . При решений нет.

б) . Действуем аналогично пункту а), то есть умножаем обе части на :





Теперь делим обе части на :



*Ответ*: а) *х =* ; б) 

СТОП! Решите самостоятельно.

**В19.** Решите уравнения: а) 0,7*х*:*с* = 0,56; б) 121*с*:(1,1*х*) = 110*bc*; в) .

**Г5.** Решите уравнение .

# Составляем и решаем разные уравнения

**Задача 1.24.** При каком значении *х* значение выражения –5*х* + 3 в три раза меньше значения выражения –2*х* + 7?

***Решение.*** Чтобы ответить на вопрос задачи необходимо составить и решить уравнение. Значение выражения –5*х* + 3 в три раза меньше значения выражения –2*х* + 7, значит, если мы умножим на 3 выражение –5*х* + 3, то получим выражение –2*х* + 7. Получаем уравнение:

–15*х* + 9 = –2*х* + 7.

Перенесем –2*х* в левую часть, а 9 – в правую, получим:

–15*х* + 2*х* = 7 – 9 → –13*х* = –2 → .

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**А10.** При каких значениях *х* значение выражений: а) –2,1*х*; б) равно –0,3?

**Б21.** При каких значениях *х* значение выражения  равно значению выражения: а) –0,1 –0,1*х*; б) ?

# Пропорция и ее свойства

Пропорцией называется равенство вида: . Например: ; ;  и т.д.

У пропорции  *а* и *d* называются ***крайними членами,*** а *b* и *с* – ***средними членами***.

Так вот, оказывается, что ***произведение крайних членов равно произведению средних членов,*** то есть: .

*Читатель*: А почему?

*Автор*: Это нетрудно доказать. Умножим обе части равенства  на , получим:

,

что и требовалось доказать.

Итак, запомним:

если , то . (1.4)

Равенство  иногда называют ***свойством пропорции.***

# Уравнения, использующие свойство пропорции

**Задача 1.25.** Решите уравнения: а) (*х* + 3):2 = (3*х* – 2):7;

б); в) .

Решение.

а) (*х* + 3):2 = (3*х* – 2):7. Применим свойство пропорции, получим: 7(*х* + 3) = 2(3*х* – 2). Теперь можно раскрывать скобки:

7(*х* + 3) = 2(3*х* – 2) → 7*х* + 21 = 6*х* – 4 → 7*х* – 6*х* = –4 – 21 →

*х* = –25.

б) . Заметим, что дроби  и  существуют, только если их знаменатели не равны нулю, то есть  и  Применим к нашему уравнению свойство пропорции:

2⋅2*х* = 5(*х* – 1) → 4*х* = 5*х* – 5 → 4*х* – 5*х* = –5 → –*х* = – 5

Найденный корень не равен ни 1, ни 0, т.е. не нарушает установленных ограничений.

На всякий случай проверим: левая часть  ; правая часть: . Все верно!

в) . Тут ограничением будет *х* ≠ 0 – это нужно, чтобы знаменатель дроби 2/*х* не превратился в 0. Применяем свойство пропорции: *х*⋅*х* = 2⋅8 → *х*2 = 16. Теперь нам необходимо найти число, квадрат которого равен 16. Одно находится легко – это 4: 42 = 16. Второе находим, вспомнив о том, что отрицательное число при возведении в квадрат тоже дает положительный результат. Таким образом, вторым корнем будет –4, так как (–4)2 = 16.

*Ответ*: а) *х* = –25; б) *х* = 5; в) *х* = 4 и *х* = –4.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А11.** Решите уравнения: а) ; б) .

**Б22.** Решите уравнения: а) ; б) .

**В20.** Решите уравнения: а) ; б).

***Линейным уравнением*** называется уравнение, в котором неизвестное содержится только в первой степени. Например, и т.д.

***Квадратным (или уравнением второй степени)*** называется уравнение, содержащее неизвестное во второй степени и (может быть) – в первой степени, а также числа. Например: .

***Кубическим (или уравнением третьей степени)*** называется уравнение, содержащее неизвестное в третьей и (может быть) во второй и первой степени, а также числа. Например, .

***Уравнением п-й степени*** называется уравнение, содержащее неизвестное в *п-*й степени и (может быть) в более низких степенях, а также числа. Например:  .

Мы с вами пока решали, главным образом, линейные уравнения и изредка – простейшие квадратные уравнения.

# Уравнения, сводящиеся к линейным,

# путем сокращения членов, содержащих

# более высокие степени типа

Покажем на примере, о чем идет речь. Рассмотрим такое уравнение . На первый взгляд, это уравнение содержит *х* в четвертой (!) степени, но если перенести *х*4 из левой части уравнения в правую, то получим . То есть «страшные» четвертые степени исчезли и осталось простейшее линейное уравнение!

**Задача 1.26.** Решите уравнение: .

***Решение.*** Напомним, как раскрываются скобки при преобразовании выражения вида (*a* + *b*)(*c + d*). Сначала мы рассматриваем выражение (*a + b*) как некоторое число (*a + b*) = *A*, тогда наше выражение принимает вид

= .

Теперь вместо *А* подставим , получим

.

А дальше преобразуем каждое из слагаемых согласно распределительному закону умножения, получим:

.

Итак, мы получили формулу:

=  (6.2)

Теперь можно приступить к решению нашего уравнения.

Сначала преобразуем первое слагаемое:

.

Преобразуем второе слагаемое:



Теперь наше уравнение можно переписать в виде:



*Ответ*: *х* = –3.

СТОП! Решите самостоятельно.

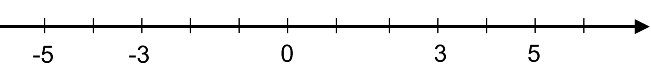
**В21.** Решите уравнения: а) ; б) ; в) .

**Г6.** Решите уравнение .

# Уравнения с модулями

Вспомним, что модулем (абсолютной величиной) числа *а* называется само это число, если оно положительное: |*a*| = *a*,и число, противоположное данному, если это число отрицательное: |*a*| = –*a*. Например, , а .

Геометрический смысл модуля числа очень прост – это расстояние от начала координат до точки, координата которой равна данному числу (рис. 6. 1).

Рис. 6.1 

*Автор*: Как Вы считаете, верно ли равенство: ?

*Читатель*: Я думаю, верно, потому что  и .

*Автор*: Совершенно верно! Это можно объяснить и так: точки, координаты которых равны *х* и –*х* симметричны друг другу относительно начала координат, а значит, они находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, то есть их модули равны.

**Задача 1.27.** Решите уравнения: а) ; б) ; в); г) .

***Решение.*** а) . Если расстояние от точки с координатой *х* до начала координат равно 2, то это значит, что либо , либо . Эти значения и являются корнями нашего уравнения.

б) . Модуль любого числа есть величина положительная, значит, данное уравнение не имеет решений.

в) . Сделаем такую «хитрость»: заменим выражение  на переменную *z*, то есть пусть , тогда наше уравнение примет вид . А корни такого уравнения мы уже нашли в пункте а): .

Теперь вспомним, что и получим два очень простых уравнения относительно неизвестной величины *х*:  и . Решая эти уравнения, находим корни нашего уравнения:

;

.

Проверим : левая часть: ; правая часть 2; 2 = 2. Все верно. Проверим : левая часть: ; правая часть: 2; 2 = 2. Все верно.

г) . Прежде всего, заметим, что поскольку  наше уравнение можно записать в виде *х* + |*x*| = 1. Нам надо «избавиться» от знака модуля. Вспомним, что если , то  То есть для неотрицательных значений *х* наше уравнение примет вид:

.

, а значит, условие  выполняется, и – корень данного уравнения.

Теперь рассмотрим случай , теперь  и наше уравнение примет вид решений нет.

Таким образом, наше уравнение имеет единственный корень .

*Ответ*: а) ; ; б) решений нет; в)  г) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б23.** Решите уравнения: а) |*x*| = 9; б) |*x*| = 0; в) |*x*| = –5.

**В22.** Решите уравнение: а) |3*x*| = 39; б) |–1,2*x*| = 6; в) |6,1*x*| = 0; г) |–2,9*x*| = –8,7; д) |*x* – 1| = 2.

**Г7.** Решите уравнение: а) ; б) .

# Метод замены переменных

**Задача 1.28.** Решите уравнения: а); б); в) .

***Решение.***

а). Вместо того, чтобы раскрывать скобки, сделаем такую ***замену***: . Тогда наше уравнение примет вид . Решить такое уравнение значительно проще:

 .

Теперь вспомним, что , тогда

.

Итак, наше уравнение имеет один корень: 

б). Теперь сделаем такую замену: , и наше уравнение примет вид: . А это уравнение мы только что решили в пункте а): . Теперь вспомним, что  и получим: .

Сделаем еще одну замену, пусть , и наше уравнение примет вид . А такие уравнения мы уже решать умеем: равенство  означает, что либо , либо , и мы получаем два простых уравнения относительно:

;

.

То есть уравнение имеет два корня:  и .

в) . Делаем замену:  и получаем уже хорошо знакомое нам уравнение , которое имеет корень: . Тогда .

Если две дроби равны, и их числители тоже равны, то равны и их знаменатели. Значит, |*x* + 2| = 4. Делаем замену  и получаем уравнение |*t*| = 4. Это означает, что либо *t =* 4, либо *t* = –4.

Мы получаем два простых уравнения относительно :

1) ;

2) .

Уравнение имеет два корня *х* = 2 и *х* = –6.

*Ответ*: а); б) и ;

в) и .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б24.** Решите, используя замену переменной:

а) 2(2*х* + 2) = 3; б) ; в) .

**В23.** Решите уравнения, используя замену переменной:

а) 3(*х* – 4,5) – 2(*х* – 4,5) = 6; б) ;

в)

**Г8.** Решите уравнения, используя замену переменной:

а) |3*x* – 5| = 2; б) ;

в).

# Равносильность уравнений

Два уравнения называются ***равносильными***, если все корни первого уравнения являются корнями второго, а все корни второго уравнения являются корнями первого.

Например, равносильны уравнения  и , так как оба уравнения имеют единственный корень .

Равносильны уравнения  и , так как оба эти уравнения имеют два одинаковых корня:  и .

А вот уравнения  и  НЕ равносильны, потому что первое уравнение имеет единственный корень , а второе уравнение имеет два корня:  и .

*Читатель:* А равносильны ли два уравнения, если оба они не имеют корней?

*Автор*: Да! Например, равносильны уравнения |*x*| = –1 и 0⋅*x =* 3.

Равносильными считаются и уравнения, корнями которых являются любые числа. Например, равносильны уравнения  и .

**Задача 1.29.** Равносильны ли уравнения: а)  и ; б)и ; в)  и ?

***Решение.***

а)  и . Решим каждое уравнение:

*х* – 2 = 2 → *х* = 2 + 2 → *х* = 4;

2 = 2 – *х* → 2 – 2 = – *х* → 0 = –*х* → *х* = 0.

Корень первого уравнения *х* = 4, а второго *х* = 0. Следовательно, эти уравнения ***не являются равносильными***.

б) и . Корни первого уравнения *х* = 3 и *х* = –3, корни второго такие же, значит, эти уравнения ***равносильны***.

в)  и . Корнем второго уравнения может быть ***любое число,*** а первое уравнение не имеет смысла при *х* = 0, так как возникает деление на 0. Эти уравнения ***не являются равносильными***.

*Ответ*: а) нет; б) да; в) нет.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б25.** Проверьте, равносильны ли уравнения: а) 6*х* – 5 = 11 –2*х* и 2(5 – 6*х*) = 2(2*х* – 11); б) 3 + 8*х* = 11 и 8*х* = 11 – 3; в) |*x*| = 2 и 2*х* = 4.

**В24.** Не решая уравнение, составьте какое-либо уравнение с целыми коэффициентами, ему равносильное:

а) –5,92*х* = 9,13; б); в).

**В25.** Равносильны ли уравнения *х*2 – 1 = 3 и |*x* –2| +4 = 0?

**Г9**. При каких значениях *и* равносильны уравнения:

а) 6*х* + 1 = 19 и 6*х* + 1 + *и* = 19 + *и*;

б) 6*х* + 1 = 19 и (6*х* + 1)*и* = 19*и*;

в) и 

# Решение уравнений методом

# разложения на множители

**Задача 1.30.** Решите уравнения:

а) ; б);

в) ; г) .

***Решение***

а) . Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю, то есть 3*х*(*х* + 1) равно нулю, если 3*х* = 0 или *х* + 1 = 0.

Нам осталось решить два очень простых уравнения: *3х =* 0 и *х* + 1 = 0. Решая их, получаем два корня: *х* = 0 и *х* = –1.

б) . Вынесем за скобки *х*:

*х*2 + 10*х* = 0 → *х*(*х* + 10).

Получили ситуацию, аналогичную пункту а). Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, значит: 1) *х* = 0; 2) *х* + 10 = 0 → *х* = –10.

в) . Заметим, что . Теперь будем считать, что  и тогда наше уравнение примет вид:



Вынесем общий множитель за скобки, получим:



Отсюда: 1) ; 2).

г)  Запишем наше выражение в виде  Вынесем в первом слагаемом общий множитель *х*2 за скобки, а во втором слагаемом вынесем за скобки 1, который всегда является общим множителем у любых слагаемых получим:



Теперь вынесем за скобки (*х* – 4), получим:



Получаем два уравнения:  и . Корней нет, так как сумма неотрицательного числа *х*2 и положительного числа 1 не может равняться 0. Значит, наше уравнение имеет один корень *х* = 4.

*Ответ*: а) *х* = 0 и *х* = –1; б) *х* = 0 и *х* = –10; в) *х* = –3 и *х* = 4; г) *х* = 4.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б26.** Решите уравнения:

а) ; б).

**Б27.** Решите уравнения: а) 16*х* – 4*х*2 = 0; б) .

**В26.** Решите уравнение .

**Г10.** Решите уравнение.

**Д2.** Решите уравнение .

# Решение уравнений «в буквах»

До сих пор известные величины (параметры) обозначались в уравнениях первыми буквами латинского алфавита: *a*, *b*, *с* и т.д., а неизвестные величины обозначались либо буквой *x*, либо (реже) – буквой *y*.

Но это был вопрос нашей с вами договоренности, мы с таким же успехом могли бы объявить известными величинами буквы *x* и *y*, а неизвестными – буквы *a*, *b* и *с*.

Иногда говорят так: «решите уравнение ***относительно*** такой-то буквы». Например: «решите уравнение  относительно буквы *a*».

Это значит, что мы должны выразить букву *a* через все остальные буквы. То есть необходимо записать равенство, в левой части которого будет стоять одна буква *a*, а в правой части – алгебраическое выражение, содержащее все остальные буквы.

**Задача 6.31.** Решите уравнение *ах* + 2*bx = a + b* относительно: а) *а*; б) *b*; в) *х*.

***Решение.***

а) В данном случае неизвестной величиной является *а*, а *b* и *х* – некоторые заданные числа. Соберем все слагаемые, содержащие букву *а*, в левой части уравнения, а не содержащие – в правой, получим:

*ах* + 2*bx = a + b* → *ах – а = b* –2*bx* → *a*(*x* – 1) = *b* – 2*bx* →

*a*(*x* – 1) = *b* – 2*bx* → *a*(*x* – 1):(*x* – 1) = (*b* – 2*bx*):(*x* – 1) →

.

б) Здесь неизвестной величиной является *b*, а *а* и *х* – некоторые заданные числа. Соберем все слагаемые, содержащие букву *b*, в левой части уравнения, а не содержащие – в правой, получим:

*ах* + 2*bx = a + b* → 2*bx – b* = *a – ax* → *b*(2*x* –1) = *a – ax* →

*b*(2*x* – 1):(2*x* – 1) = (*a – ax*):(2*x* – 1) →.

в) В этом случае неизвестной величиной является *х*, а *а* и *b* – некоторые заданные числа. Поскольку все слагаемые, содержащие *х*, уже находятся в левой части уравнения, сразу выносим *х* за скобки:

*ах* + 2*bx = a + b* → *х*(*a* + 2*b*) = *a + b* →

*х*(*a* + 2*b*): (*a* + 2*b*) = (*a + b*): (*a* + 2*b*) → .

*Ответ*: а) ; б) ; в) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б28.** Решите уравнение относительно: а) *а*; б) *b*; в) *х.*

**В27.** Решите уравнение *ах + аb +* 2*bx* = 0 относительно: а) *a*; б) *b*; в) *х*.

**Г11.** Решите уравнение  относительно: а) *а*; б) *b*.

**✍ Домашнее задание**

**Задачи очень легкие**

**А12**. Является ли *b =* 3 корнем уравнения: а) *b* + 2 = 6; б) 3 – *b* = 0; в) 9 – *b* = 5?

**А13**. Угадайте корни уравнений: а) *t* + 5 = 11; б) 4*x*2 = 0; в) –*p* – 0 = 8; г) (*a* – 1)(*a* + 2) = 0.

**А14**. Найдите все корни уравнений: а) 6*x* – 6*x* = 12; б) 3*x* = 9 – 9; в) 17*x* – 17*x* = 34 – 34.

**А15**. Решите уравнения:

а) *x* + 29 = 74; б) *x* – 49 = 59; в) 143 – *x* = 96.

**А16**. Решите уравнения:

а) 4*х* = 64; б) *x*⋅8 = 3:8; в) 0,5⋅*х* = –5; г) .

**А17**. Решите уравнения:

а) 9*х* – 4 = 32; б) 7,2*х* + 7,2 = 7,2; в) –0,1 + *х* ⋅3,1 = 3.

**А18**. Решите уравнения:

а) 5*а* + 7*а* = 4; б) 20*k – k* = 95; в) 8*z* + 7*z* + 283 = 703;

г) 29 + 6*y* + 54 = 149.

**А19**. Решите уравнения: а) 3*х* – 2 = *х* – 6; б) *х* + 5 = 6*х* – 10.

**А20**. Решите уравнения: а) ; б) .

# Задачи легкие

**Б29**. Является ли *z* = –0,1 корнем уравнений: а) 10*z* + 2 = –1; б) *z*2 + *z* + 1 = 0,99; в) ?

**Б30**. Угадайте корни уравнений: а) 0,0064 = *t⋅t*; б) *z*3 – 1 = –2; в); г) .

**Б31**. Сколько корней имеют уравнения: а) *х*2 = –4; б) –*х*2 – *х*6 = = 12; в) *х*2 = 16; г) (*х* – 1)(*х* + 2)(*х* – 3) = 0?

**Б32**. Имеет ли уравнение: а)  положительные корни; б) –4*х*4 + 5*х*3 – 2*х*2 + 3*х=*0 отрицательные корни?

**Б33**. Решите уравнения: а) *х* – 1,08 = –11,8; б) –*х* – 2,4 = 13,69; в); г) .

**Б34**. Решите уравнения: а) *х*⋅(–5,1) = 1,7; б); в) 2,3*х* = 0.

**Б35**. В уравнении *сх* = 24 найдите коэффициент *с*, зная, что корень уравнения равен: а) –3; б) 1/3; в); г) 0,05.

**Б36**. Решите уравнения: а) *х* – 3,2 = -4,9 – *а*; б); в); г) –*а – х* = 3,5 –*а + с*.

**Б37**. Решите уравнения: а) ; б);  (*с* ≠ 0); г) 

**Б38**. Приведите пример уравнения, множество корней которого: а) состоит из одного числа; б) является бесконечным; в) является пустым.

**Б39**. Решите уравнение *ху* = 3*р* относительно переменных: а) *х*; б) *у*.

**Б40**. Решите уравнение 5*х* + 7 = 5*х* – 2.

**Б41**. Решите уравнения: а) –0,02 – *х* ⋅3,1 = 0,6; б); в); г) –2,5*х* – 5,68 = 4,32.

**Б42**. Решите уравнения: а) 6*х* + 8*d* + 3*x* = *d*; б) 6,5*х* – 2,5*а* – 19*х* = ; в) 2*сх* – 2*х* = *с* + 1, где *с* ≠ 1.

**Б43**. Решите уравнения:

а) ; б);

в) 3,5*х* + 1,81 – *х* ⋅ 7,1 – 10,01 = 1,8;

г).

**Б44**. Решите уравнения:

а) (35 + 25)*х* = 300; б);

в); г) .

**Б45**. Решите уравнения: а);

б); в).

**Б46**. Решите уравнения:

а) , б).

**Б47**. Решите уравнения: а) ;

б);

в) 3(*х* – 1) – 2(*х* + 8) = –(4 – *х*).

**Б48**. Решите уравнения, зная, что произведение чисел 138 и 26 равно 3588: а) 3588:*х* = –26; б) *z*:138 = 26; в) 3588:(–*у*) = 1.

**Б49**. Решите уравнения:

а) ; б); в).

**Б50**. При каких значениях *х* значение выражений: а) –4,8*х*;  равно –0,144?

**Б51**. Решите уравнения:

а); б); в).

**Б52**. Решите уравнения: а) ; б) ;

в); г) .

**Б53**. Решите уравнения: а) |*x*| = 4; б) |*x*| = 0; в) |*x*| = 3,5; .

**Б54**. Решите, используя замену переменной:

а) ; б).

**Б55**. Проверьте, равносильны ли уравнения:

а) 6,6*х* – 3 = 11 – 2*х*  и 2(3 – 6,6*х*) = 2(2*х* – 11);

б) 3 – 7*х* = 11 и 7*х* = 11 – 3;

в)  и 3*х* + 7 = –6.

**Б56**. Решите уравнения: а) ; б) ; .

**Б57**. Решите уравнение *х*(*а* + 2) = 2*с* относительно: а) *а*; б) *с*; в) *х*.

**Б58**. Решите уравнение  относительно: а) *а*; б) *с*; в) *х*.

# Задачи средней трудности

**В28**. Угадайте целые корни уравнений: а) (*k* – 5)(*k* – 1) = 5; б) *x*2 + 4 = –1; в) (*v* + 3)(*v* – 4)(*v* + 5) = 0; г) (*р* – 1)(*р* – 2)(*р* – 3) = 6.

**В29**. При каких значениях *а* корнем уравнения  является число 7?

**В30**. Выразите из равенства каждую переменную через другие: а) *k* + 2*l* – 4*m* = 1; б) 2(*a + b*) = 8*k* + 4*t*; в) .

**В31**. Запишите вместо *а* такое число, чтобы корнем получившегося уравнения было целое число: а) *ах* = 21; б) ; в) ; г) .

**В32**. Сколько корней имеет уравнение: а) *х*2 + 4*х*4 = *х*2(4*х*2 +1); б) *х*4 + *х*6 – 5 = –5 – *х*4 – *х*6; в) ?

**В33**. Определив знак выражения в левой части уравнения, ответьте на вопрос, какие из чисел –3,5; –1; 0; ; 2; 3 точно не являются его корнями: а) 6*х*4 + 5*х*3 + *х* = –18; б) –120*х*8 – 59*х*6 + 272*х*3 + + 3,5*х* – = 0?

**В34**. Имеют ли уравнения:

а) 6*х*5 + 2*х*3 + 8*х*2 + 1= 0 положительные корни;

б) 3*х*7 – 3*х*2 + *х* – 5 = 0 отрицательные корни?

**В35**. Имеет ли корни уравнение 6*х* + 9 = 6*х* + *а* при *а* = 9.

**В36**. При каких значениях *р* корнем уравнения *р*(*х* + 4) – (5 – *р*) = = 16 является число 2?

**В37**. Решите уравнения:

а) ; б).

**В38**. Запишите вместо *с* такое число, чтобы корнем получившегося уравнения  было целое число.

**В39**. Решите уравнение *х*(*х* + 8) = *х*(*х* – 6).

**В40**. Придумайте уравнение, у которого: а) будет только один корень, и он будет равен нулю; б) не будет корней.

**В41**. Решите уравнения: а) ;

б)  (*а* ≠ 0, *b* ≠ 0 , *с* ≠ 0).

**В42**. Решите уравнение:

а) ; б);

в) ; г) .

**В43**. Решите уравнение: а) 4*ах + х*⋅0,5*а* = 3*а*; б); в) .

**В44**. Решите уравнения: а) ;

б); в) ; г) .

**В45**. Решите уравнения: а) ;

б) *х*⋅2,2*а* – 4 = 0,51 (*а* ≠ 0); в)  (*с* ≠ 0);

г)  (*а* ≠ 0, *b* ≠ 0, *с* ≠ 0).

**В46**. Решите уравнения:

а) ; б);

в) ; г).

**В47**. Решите уравнения: а) ;

б); в).

**В48**. Решите уравнения: а);

б) ; в).

**В49**. Решите уравнения: а) ;

б); в) .

**В50**. Решите уравнения: а) ;

б);

в) .

**В51**. Решите уравнения: а) ;

б); в).

**В52**. Решите уравнения: а) 55:(*х* + 4) = –11;

б) (*х* – 4):15 = 2*х* – 37; в) *х*:12 = 2(*х* – 23).

**В53**. Решите уравнения: а) ;

б); в).

**В54**. Решите уравнения: а) 0,9*х* : (*ab*) = 0,54;

б) 1,69*k* : (1,3*х*)  (*k* ≠ 0); в) .

**В55**. При каких значениях *х* значение выражения: а) противоположно значению выражения ; б) в два раза меньше значения выражения –(0,5*х* + 1); в) на 2,275 больше значения выражения .

**В56**. Решите уравнения: а) (*а* ≠ 0, *с* ≠ 0); ; в) .

**В57**. Решите уравнения: а) ;

б); в).

**В58**. Решите уравнения: а) ; б); в) ; г) .

**В59**. Решите уравнения, используя замену переменной:

а) (2*х* – 2,4) – 2(2*х* – 2,4) = –6;

б).

**В60**. Не решая уравнения, составьте какое-либо уравнение с целыми коэффициентами, ему равносильное:

а) –2,32*х* = –5,64; б); в) .

**В61**. Равносильны ли уравнения:

а)  и ;

б)  и ; в)  и ;

г)  и ; д)  и ?

**В62**. Решите уравнения: а) ; б) ;

в); г) .

**В63**. Решите уравнение  относительно: а) *а*; б) *b*; в) *х*.

# Задачи трудные

**Г12**. При каких значениях *z* уравнение имеет единственный корень; не имеет корней; имеет бесконечно много корней?

**Г13**. Докажите, что уравнения: а) 

б) не имеют целых корней.

**Г14**. При каких значениях *а* корнем уравнения *а*|2*x* – 1| – 4 = 5 является число –7?

**Г15**. При каких значениях *s* уравнение : а) имеет единственный корень; б) не имеет корней; в) имеет бесконечно много корней?

**Г16**. Решите уравнение .

**Г17**. Решите уравнения: а)  (*а* ≠ 0, *с* ≠ 0);

б) ();

в) 3*k* – 3*l* (*k* ≠ –*l*);

г) (*а* ≠ 0, *b* ≠ 0, *с* ≠ 0).

**Г18**. Решите уравнение (*х* – 2):3 + (*х* – 3):2 = (*х* – 1):4 + 1.

**Г19**. Решите уравнения:

а) ; б) .

**Г20**. Решите уравнение .

**Г21**. Решите уравнения: а) ;

б); в) .

**Г22**. Решите уравнения, используя замену переменной:

а) |4*x* – 11| = 3; б);

в) .

**Г23**. При каких значениях *u* равносильны уравнения:

а) 3*х* + 1 = 19 и 3*х* – 1 + *и* = 17 + *и*;

б)  и ?

**Г24**. При каких значениях *а* корнем уравнения 3*а*|6*x* – 4| + 1 = 14 является число 5?

**Г25**. Решите уравнения: а) ; б) ;

в); г) 

**Г26**. Решите уравнение  относительно: а) *а*; б) *b*.

# Задачи очень трудные

**Д3**. При каком значении *с* уравнение (4*с* – 1)(3*с* + 3)*х* = 12*с*2 – 2*с*: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней?

**Д4**. Определите, при каких значениях *а*  корни уравнений 1,6(2 + *х*) –3,2(3*х* + 4) = 0 и 5*ах* – 2(4*х* + *а*) – *х* = 16*а* и являются противоположными числами.

**Д5**. Решите уравнения: а) ; б) |2,5 – |*x* + 2|| + 1,5 = 2,5.

**Д6**. Решите уравнение: а) ;

б) ; в) .