**Заочный физико-математический лицей**

**«Авангард»**

Е. Н. Филатов

# алгебра

**8**

##### **Экспериментальный учебник**

**Часть 2**

###### **МОСКВА – 2016**

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Квадратичная функция**

§ 9. Действия с радикалами. Иррациональные

числа

§ 10. Алгебраические выражения с радикалами

§ 11. Квадратные уравнения

§ 12. Неквадратные уравнения, сводящиеся

к квадратным

§ 13. Задачи, которые решаются с помощью

квадратных уравнений

§ 14. Теорема Виета

ПОДСКАЗКИ

ОТВЕТЫ



**§ 14. Теорема Виета**

*Автор*: Рассмотрим уравнение

(*х* – α)(*х* – β) = 0.

Как Вы считаете, имеет ли это уравнение корни?

*Читатель*: Очевидно, что имеет: произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю:

*х –* α = 0 → *х* = α,

*х –* β = 0 → *х* = β.

Значит, наше уравнение имеет два корня: *х*1 = α, *х*2 = β.

*Автор*: А теперь, уже зная, чему равны корни уравнения, выполним умножение «скобки на скобку»:

(*х* – α)(*х* – β) = *х*2 – β*х* - α*х* + αβ = *х*2 – (α + β)*х* + αβ.

Теперь запишем наше уравнение в таком виде:

*х*2 – (α + β)*х* + αβ = 0.

Видно, что это – *приведённое квадратное* уравнение вида *х*2 +*рх + q* = 0, где *р* = –(α + β) и *q* = αβ. А поскольку α и β – корни нашего уравнения, то можно записать:

*р* = –(*х*1 + *х*2), (14.1)

*q* = *х*1 ⋅ *х*2. (14.2)

Таким образом, мы получили, что *коэффициент р при х равен сумме корней приведённого квадратного уравнения, взятой со знаком минус, а произведение корней равно свободному члену q.* Правда, здесь необходима существенная оговорка: *если уравнение имеет корни*, ведь квадратное уравнение, как мы знаем, может не иметь корней.

Это утверждение впервые доказал французский математик Франсуа Виет, поэтому его назвали *теоремой Виета*, а формулы (14.1) и (14.2) – *формулами Виета.*

Попробуем применить эту формулу на практике.

**Задача 14.1.** Определите сумму и произведение корней уравнения, не решая его:

а) *х*2 – 123*х* – 187 = 0; б)  в) 2*х*2 – 5*х* + 20 = 0.

***Решение***.

а) *х*2 – 123*х* – 187 = 0 – это приведённое квадратное уравнение, где *р* = –123, *q* = –187. По формуле Виета

*х*1 + *х*2 = –*р* = –(–123) = 123, *х*1*х*2 = *q* = –187.

б) . Сначала сделаем это уравнение приведённым, для этого умножим левую и правую части на 2:

.

Здесь *р* = 14, *q* = –8, тогда *х*1 + *х*2 = –*р* = –14, *х*1*х*2 = *q* = –8.

в) 2*х*2 – 5*х* + 20 = 0.

*Читатель*: Это уравнение легко сделать приведённым: разделим обе его части на 2 и получим: *х*2 – *х* + 10 = 0, тогда *р* = –, *q* = 10, значит, *х*1 + *х*2 = –*р* = , *х*1*х*2 = *q* = 10.

*Автор*: Подождите! А Вы уверены, что данное уравнение *имеет* корни? Ведь мы с Вами знаем, что не всякое квадратное уравнение имеет корни!

*Читатель*: Действительно. Об это я как-то не подумал. Квадратное уравнение имеет корни, если его дискриминант *D* = *b*2 – 4*ac* ≥ 0. У нас *b* = –5, *а* = 2, *с* = 20, тогда *D* = (–5)2 – – 4⋅2⋅20 = 25 – 160 = –135 < 0! Корней нет.

*Автор*: Верно. Значит, ни суммы, ни произведения корней данного уравнения просто не существует.

*Читатель*: Но тогда надо проверить, имеют ли корни уравнения в случаях а) и б).

*Автор*: В этом нет необходимости, так как в случаях а) и б)

*а* > 0, а *с* < 0, поэтому произведение 4*ас* < 0 и *D* = *b*2 – 4*ac* > 0. Так что корни у уравнений в случаях а) и б) точно существуют. Задача решена.

*Ответ*: а) 123, –187; б) –14, –8; в) не существуют.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А1.** Определите, у какого из заданных квадратных уравнений сумма корней равна –6, а произведение корней равно –11:

а) *х*2 – 6*х* + 11 = 0; в) *х*2 – 11*х* – 6 = 0;

б) *х*2 + 6*х* – 11 = 0; г) *х*2 + 11*х* – 6 = 0.

Не решая уравнения, определите, имеет ли оно корни. Для уравнений, имеющих корни, найдите их сумму и произведение.

**Б1.** а) *х*2 + 2*х* – 5 = 0; в) *х*2 – 19*х* + 1 = 0;

б) *х*2 – 15*х* + 16 = 0; г) *х*2 + 8*х* + 10 = 0.

**Б2.** а) 2*х*2 + 9*х* – 10 = 0; в) 19*х*2 – 23*х* + 5 = 0;

б) 5*х*2 + 12*х* + 7 = 0; г) 3*х*2 + 113*х* – 7 = 0.

**В1.** а) *х*2 – 6 = 0; б) 2*х*2 + 3*х* = 0; в) *х*2 + 5*х* = 0; г) 7*х*2 – 1 = 0.

**В2.** а) 0,2*х*2 – 4*х* – 1 = 0; в) *х*2 – *х* + 1 = 0;

б)*х*2 – 12*х* + 7 = 0; г) *х*2 + 2*х* – 1 = 0.

**В3.** а) *х*2 – *х* + 1 = 0; б) *х*2 + *х* + 3 = 0; в) *х*2 + 3*х* – 2 = 0;

г) *х*2 – 3*х* + 2 = 0; д) *х*2 – 2*х* + 1 = 0; е) *х*2 + 4*х* + 4 = 0.



**Составляем квадратные уравнения**

**по данным корням**

*Автор*: Сформулируем ещё раз теорему Виета:

**Если х1 и х2 – корни квадратного уравнения х2 + рх + q = 0, то справедливы равенства х1 + х2 = –р и х1х2 = q.**

Как Вы считаете, можно ли утверждать, что если *х*1 + *х*2 = –*р*  и *х*1*х*2 = *q*, то *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + *рх + q* = 0? Иными словами, верна ли *обратная* теорема Виета?

*Читатель*: Вообще-то, если верна *прямая* теорема, то обратная может быть и не верна… Во всяком случае можно попытаться *доказать* обратную теорему.

Пусть выполняются равенства *х*1 + *х*2 = –*р* и *х*1*х*2 = *q*. Попробуем доказать, что *х*1 и *х*2 корни уравнения *х*2 + *рх + q* = 0.

Подставим в уравнение значения *р* = –(*х*1 + *х*2) и *q* = *х*1*х*2 и получим *х*2 – (*х*1 + *х*2)*х + х*1*х*2 = 0. Разложим левую часть на множители методом группировки:

*х*2 – *х*1*х*– *х*2*х + х*1*х*2 = 0 → *х*2 – *х*1*х -* (*х*2*х - х*1*х*2) = 0 →

*х*(*х –* *х*1) – *х*2(*х – х*1) = 0 →

(*х*– *х*1)(*х – х*2) = 0.

Теперь очевидно, что *х* = *х*1 и *х* = *х*2 – корни уравнения, то есть теорема, обратная теореме Виета, доказана.

*Автор*: Верно.

**Задача 14.2.** Составьте квадратные уравнения по данным корням: а) 8 и 7; б) ; в) .

***Решение***.

а) 8 и 7. Решим эту задачу двумя способами.

1. Если *х* = 8 и *х* = 7 – корни квадратного уравнения, то это уравнение запишется так: (*х* – 8)(*х* – 7) = 0. Чтобы привести наше уравнение к стандартному виду, умножаем «скобку на скобку» и получаем: *х*2 – 8*х* – 7*х* + 56 = 0 → *х*2 – 15*х* + 56 = 0.

2. Воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета. Если *х*1 = 8 и *х*2 = 7 – корни квадратного уравнения, то

*р* = –(*х*1 + *х*2) = –(8 + 7) = –15, *q* = *х*1*х*2 = (8⋅7) = 56.

Тогда наше уравнение имеет вид *х*2 – 15*х* + 56 = 0.

б) . Воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета. Если  – корни квадратного уравнения, то , . Записываем уравнение: . Если мы хотим избавиться от дробных коэффициентов, то умножим обе части уравнения на 8:

.

в) . Здесь , тогда

*р* = –(*х*1 + *х*2) =,

*q* = *х*1*х*2 = 

Записываем уравнение: *х*2 – 8*х* + 13 = 0.

*Ответ*: а) *х*2 – 15*х* + 56 = 0; б);

в) *х*2 – 8*х* + 13 = 0.

СТОП! Решите самостоятельно.

Составьте квадратные уравнения, корнями которых являются данные числа.

**А2.** а) *х*1 = 4, *х*2 = 2; в) *х*1 = –8, *х*2 = 1;

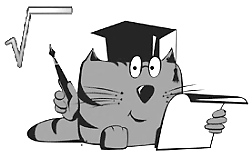
б) *х*1 = 3, *х*2 = –5; г) *х*1 = –6, *х*2 = –2.

**Б3.** а) *х*1 = 2,5, *х*2 = –2; в) *х*1 = –2,4, *х*2 = –1,5;

б) *х*1 = , *х*2 = ; г) *х*1 = , *х*2 = .

**В4.** а) 3 и ; б)  и ; в) –2 и ; г)  и ;

д) 5 и ; е) –2 и ; ж) и 



**Иррациональные корни**

**и рациональные коэффициенты**

**Задача 14.3.** Составьте квадратное уравнение с ***рациональными*** коэффициентами, если один из корней равен .

***Решение***. *х*1 = , нам надо подобрать такое число *х*2, чтобы выражения *р* = –(*х*1 + *х*2) и *q* = *х*1*х*2 были рациональными числами. Самое простое, что приходит в голову – это *х*2 = . В самом деле: *х*1*х*2 =  и –(*х*1 + *х*2) = .

Искомое уравнение *х*2 – 8*х* + 13 = 0. Задача решена.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В5.** Определите, может ли уравнение *х*2 + *рх + q* = 0, где *р* и *q* – рациональные числа, иметь следующие корни: а) ,; б) , .

**Г1.** Составьте уравнение с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число: а) ; б) .



**Известен один корень.**

**Как найти второй?**

**Задача 14.4.** Известно, что *х*1 – корень уравнения. Определите второй корень уравнения и число *а*:

а) 2*х*2 + 16*х* + *а* = 0, *х*1 = 3; б) 3*х*2 + *ах* – 72 = 0, *х*1 = 8.

***Решение***.

а) 2*х*2 + 16*х* + *а* = 0, *х*1 = 3. Сначала сделаем это уравнение приведённым: . Теперь воспользуемся теоремой Виета: *х*1 + *х*2 = –8 → 3 + *х*2 = –8 → *х*2 = –11. Чтобы найти *а*, также используем теорему Виета:  *х*1*х*2 = 3⋅(–11),  –33, *а* = –66.

б) 3*х*2 + *ах* – 72 = 0, *х*1 = 8. Сначала сделаем это уравнение приведённым: . Теперь воспользуемся теоремой Виета: *х*1*х*2 = –24 → 8⋅ *х*2 = –24 → *х*2 = –3;  –(*х*1 + *х*2)= = –(8 – 3)= –(5) = –5,  –5, *а* = –15.

*Ответ*: а) *х*2 = –11, *а* = –66; б) *х*2 = –3, *а* = –15.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А3.** Один из корней уравнения равен 2. Найдите второй корень уравнения не решая его: а) *х*2 + 5*х* = 14; б) *х*2 – 13*х* = –22;

в) *х*2 – 2,5*х* + 1 = 0; г) *х*2 + .

**Б4.** Один из корней уравнения *х*2 + *рх +* 54 = 0 равен 6. Найдите другой корень и второй коэффициент.

**Б5.** Число  – один из корней уравнения 9*х*2 + 3*х* + *q* = 0. Найдите другой корень и свободный член.

**В6.** Уравнение 12*х*2 + *рх +* 1 = 0 имеет одним из корней число  Найдите другой корень и второй коэффициент.



**Не решая уравнения, находим**

 **и т.д.**

**Задача 14.5.** Квадратное уравнение *х*2 + *рх + q* = 0 имеет корни *х*1 и *х*2. Не решая этого уравнения, выразите через *р* и *q* выражения: а)  б)  в)  г) (*х*1 – *х*2)2.

***Решение***. Мы знаем, что *х*1 + *х*2 = –*р*, *х*1*х*2 = *q*. Наша задача состоит в том, чтобы представить данные выражения в виде алгебраических выражений, в которые входили бы только суммы и произведения корней.

а)  =

= (–*р*)2 – 2*q* = *р*2 – 2*q*.

б) 

в) 

г) (*х*1 – *х*2)2 = 



*Ответ*: а) *р*2 – 2*q*; б) ; в) ; г) 

СТОП! Решите самостоятельно.

**А4.** Вычислите выражение  где *х*1, *х*2  – корни уравнения *х*2 – 5*х* + 4 = 0.

**Б6.** Квадратное уравнение *х*2 + *рх + q* = 0 имеет корни *х*1, *х*2. Не решая уравнения, выразите через *р* и *q* сумму .

**В7.** Не решая уравнения *х*2 + *рх + q* = 0, имеющего корни *х*1, *х*2, выразите через *р* и *q* выражение (*х*1 – *х*2)4.

**Задача 14.6.** Пусть *х*1, *х*2 – корни уравнения 3*х*2 – 4*х* – 1 = 0. Не решая уравнения, найдите: а)  б) 

***Решение***. Сначала сделаем данное уравнение приведённым: 3*х*2 – 4*х* – 1 = 0 → Тогда  

Дальше действуем так же, как в задаче 14.5.

а) 

б)  

*Ответ*: а) ; б)

СТОП! Решите самостоятельно.

**А5.** Пусть уравнение *ах*2 + *bх + c* = 0 имеет корни *х*1, *х*2 (т.е. *D* > 0). Выразите через коэффициенты *а*, *b* и *с* выражение 

**Б7.** Квадратное уравнение 3*х*2 + 8*х –* 1 = 0 имеет корни *х*1, *х*2. Не решая уравнения, вычислите: а) ; б) .

**В8.** Квадратное уравнение 2*х*2 – *х –* 1 = 0 имеет корни *х*1, *х*2. Не решая уравнения, найдите значения выражения .

**Г2.** Не находя корней *х*1 и *х*2 уравнения 3*х*2 – 5*х* + 6 = 0, вычислите сумму .



**Угадываем корни**

**Задача 14.7.** Решите уравнение *х*2 + 1999*х* – 2000 = 0.

***Решение***.

*Читатель*: По-моему, можно просто воспользоваться формулой 

*Автор*: Ну что ж, попробуйте.

*Читатель*: Получим:



Вообще-то выражение под корнем довольно «страшное»… Без калькулятора здесь не обойтись.

*Автор*: А на государственных экзаменах калькуляторы строжайше запрещены! Поэтому вместо того, чтобы решать это уравнение, как говорится, «в лоб», давайте попробуем *угадать* корни.

*Читатель*: А как их угадать?

*Автор*: По теореме Виета: *х*1 + *х*2 = –1999 и *х*1*х*2 = – 2000. Будем оптимистами и *предположим*, что корни уравнения – целые числа. Тогда возможны, например, такие варианты: 1) *х*1*х*2 = (–1)⋅(2000) = –2000; 2) *х*1*х*2 = 1⋅(–2000) = –2000. Проверим, выполняется ли равенство *х*1 + *х*2 = –1999:

1) 1 + (–2000) = –1999 – выполняется!

2) –1 + 2000 = +1999 – не выполняется!

Таким образом, корни данного уравнения – это *х*1 = 1 и *х*2 = –2000. Задача решена.

*Ответ*: *х*1 = 1, *х*2 = –2000.

СТОП! Решите самостоятельно.

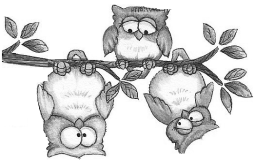
**А6.** Не используя формулу корней, найдите корни квадратного уравнения: а) *х*2 + 3*х* + 2 = 0; б) *х*2 – 15*х* + 14 = 0; в) *х*2 – 19*х* + 18 = 0; г) *х*2 + 8*х* + 7 = 0.

**Б8.** Решите устно квадратные уравнения:

а) *х*2 + 2000*х* – 2001 = 0; б) *х*2 – 2000*х* – 2001 = 0;

в) *х*2 – 2001*х* + 2000 = 0; г) *х*2 + 2001*х* + 2000 = 0.

**В9.** Среди пар чисел , (11; –7) и  найдите такую пару, которая составлена из корней уравнения: а) *х*2 – 4*х* – 77 = 0; б) *х*2= 0; в) 6*х*2 – 5*х* + 1 = 0; г) 12*х*2 – *х* – 20 = 0.

****

**Как разложить на множители**

**квадратный трёхчлен *х*2 + *рх* + *q***

Корнями квадратного трёхчлена *х*2 + *рх + q* называются корни квадратного уравнения *х*2 + *рх + q* = 0.

Пусть *х*1 и *х*2 – корни квадратного трёхчлена *х*2 + *рх + q*. Тогда справедливо равенство

*х*2 + *рх + q =* (*х – х*1)(*х – х*2). (14.3)

Докажем это равенство. Для этого выполним умножение «скобки на скобку»:

(*х – х*1)(*х – х*2) = *х*2 – *х*1*х* – *хх*2 + *х*1*х*2 = *х*2 – (*х*1 + *х*2)*х* + *х*1*х*2.

По теореме Виета *х*1 + *х*2 = –*р*, *х*1*х*2 = *q*, значит,

*х*2 – (*х*1 + *х*2)*х* + *х*1*х*2 = *х*2 + *рх + q*.

Формула (14.3) доказана.

*Читатель*: А если надо разложить на множители квадратный трёхчлен *ах*2 + *bx* + *с*?

*Автор*: Этот случай легко связать с формулой (14.3). В самом деле, *ах*2 + *bx* + *с =*  Выражение в скобках – это левая часть *приведённого квадратного уравнения* *х*2 + *рх + q* = 0, где . Следовательно, по формуле (14.3) , где *х*1 и *х*2 – кони уравнения = 0. Тогда

*ах*2 + *bx* + *с =а*() = *а*(*х* – *х*1)(*х* – *х*2).

Запомним эту формулу:

*ах*2 + *bx* + *с = а*(*х* – *х*1)(*х* – *х*2). (14.4)

*Читатель*: А если уравнение *ах*2 + *bx* + *с =* 0 не имеет корней?

*Автор*: Тогда квадратный трёхчлен *невозможно* представить в виде произведения двух двучленов *а*(*х* – α)(*х* – β), где α, β – действительные числа.

**Задача 14.8.** Разложите на множители квадратный трёхчлен: а) *х*2 – 12*х* + 36; б) *х*2 + 7*х* + 12; в) –*х*2 + 7*х* – 12; г) 15*х*2 – 8*х* + 1; д) –4*х*2 – 3*х* + 85.

***Решение***.

а) *х*2 – 12*х* + 36. Найдём корни уравнения *х*2 – 12*х* + 36 = 0. Воспользуемся теоремой Виета. Заметим, что 6⋅6 = 36 и 6 + 6 = –(–12), то есть данное уравнение имеет два одинаковых корня: *х*1 = *х*2 = 6. Тогда по формуле (14.3) получаем

*х*2 – 12*х* + 36 = (*х* – 6)(*х* – 6) = (*х* – 6)2.

*Читатель*: По-моему, можно было сразу заметить, что это выражение – квадрат разности: *х*2 – 12*х* + 36 = *х*2 – 2⋅6⋅*х* + + 62 = (*х* – 6)2.

*Автор*: Вы совершенно правы.

б) *х*2 + 7*х* + 12. С помощью теоремы Виета найдём корни уравнения *х*2 + 7*х* + 12 = 0. Заметим, что (–3)⋅(–4) = 12 и (–3) + (–4) = –7. Значит, *х*1 = –3, *х*2 = –4, тогда по формуле (14.3) находим *х*2 + 7*х* + 12 = (*х* + 3)(*х* + 4).

в) –*х*2 + 7*х* – 12 = (–1)⋅(*х*2 – 7*х* + 12). С помощью теоремы Виета найдём корни уравнения *х*2 – 7*х* + 12 = 0. Заметим, что 3⋅4 = 12 и 3 + 4 = –(–7) = 7. Значит, *х*1 = 3, *х*2 = 4, тогда *х*2 – – 7*х* + 12 = (*х* – 3)(*х* – 4). Отсюда

(–1)⋅( *х*2 – 7*х* + 12) = (–1)(*х* – 3)(*х* – 4) = (3 – *х*)(*х* – 4).

г) 15*х*2 – 8*х* + 1. Найдём корни уравнения 15*х*2 – 8*х* + 1 = 0:  , . Тогда по формуле (14.4) 15*х*2 – 8*х* + 1 =.

В принципе на этом можно остановиться, но если мы хотим, чтобы выражение не содержало дробей, можно сделать преобразование:

.

д) –4*х*2 – 3*х* + 85. Решим уравнение

–4*х*2 – 3*х* + 85 = 0 → 4*х*2 + 3*х* – 85 = 0, , .

Тогда по формуле (14.4) –4*х*2 – 3*х* + 85 = = = (*х* + 5)(17 – 4*х*).

*Ответ*: а) (*х* – 6)2; б) (*х* + 3)(*х* + 4); в) (3 – *х*)(*х* – 4); г) ; д) (*х* + 5)(17 – 4*х*).

СТОП! Решите самостоятельно.

**А7.** Можно ли разложить на множители квадратный трёхчлен: а) *х*2 – 9*х* – 10; б) 3*т*2 – 6*т* + 4; в) ; г) ?

**Б9.** Разложите на множители: а) –*х*2 + 16*х* – 15; б) –3*х*2 – 8*х* + 4; в) –*х*2 + 5*х* – 6.

**Б10.** Разложите на множители: а) 3*х*2 + 5*х* – 2; б) 5*х*2 + 2*х* – 3; в) 6*х*2 + 5*х* – 1.

**В10.** Разложите на множители: а) –3*х*2 – 8*х* + 3; б) –5*х*2 + 6*х* – 1; в) –2*х*2 + 9*х* – 4.

**Продолжаем разлагать**

**на множители** 

**Задача 14.9.** Разложите на множители:

а) *х*4 – 3*х*3 + 2*х*2; б) *х* – + 2; в) *х*4 – 3*х*2 + 2;

г) (*х + у*)2 – 3(*х* + *у*) + 2; д) *х*2 – 3*ху* + 2*у*2.

***Решение***.

а) *х*4 – 3*х*3 + 2*х*2 = *х*2(*х*2 – 3*х* + 2). Дальше всё просто:

*х*2 – 3*х* + 2 = 0, *х*1 = 1, *х*2 = 2 (2⋅1 = 2, 2 + 1 = –(–3)),

тогда *х*2 – 3*х* + 2 = (*х* – 1)(*х* – 2). Окончательно получаем:

*х*4 – 3*х*3 + 2*х*2 = *х*2(*х* – 1)(*х* – 2).

б) *х* – + 2. Сделаем замену: = *у*, тогда

*х* – + 2 = *у*2 – 3*у* + 2 = (*у* – 1)(*у* – 2).

А теперь делаем обратную замену и получаем:

(*у* – 1)(*у* – 2) = (–1)(– 2).

в) *х*4 – 3*х*2 + 2. Делаем замену: *х*2= *у*, тогда

*х*4 – 3*х*2 + 2 = *у*2 – 3*у* + 2 = (*у* – 1)(*у* – 2) = (*х*2 – 1)(*х*2 – 2).

г) (*х + у*)2 – 3(*х* + *у*) + 2. Делаем замену: *z* = *х* + *у*, тогда

(*х + у*)2 – 3(*х* + *у*) + 2 = *z*2 – 3*z* + 2 = (*z* – 1)(*z* – 2) =

= (*х* + *у* – 1)(*х + у* – 2).

д) *х*2 – 3*ху* + 2*у*2. Сделаем такую «хитрость»:

*х*2 – 3*ху* + 2*у*2 = .

А теперь делаем замену  и получаем:

.

Тогда

*х*2 – 3*ху* + 2*у*2 = *у*2 =

= (*х* – *у*)(*х* – 2*у*).

*Ответ*: а) *х*2(*х* – 1)(*х* – 2); б) (–1)(– 2);

в) (*х*2 – 1)(*х*2 – 2); г) (*х* + *у* – 1)(*х + у* – 2); д) (*х* – *у*)(*х* – 2*у*).

СТОП! Решите самостоятельно.

Разложите на множители.

**Б11.** а) *х*3 + 3*х*2 + 2*х*; б) *х*3 - 7*х*2 + 10*х*; в) *х*3 – 12*х*2 + 32*х*; г) *х*4 + *х*3 – 6*х*2.

**В11.** а)  б)  в)  г) 

**В12.** а) *х*4 – 13*х*2 + 36; б) –2*х*6 + 9*х*3 – 4; в) –*х*4 – 20*х*2 -64; г) 15*х*6 – 8*х*3 + 1.

**Г3.** а) (*х + у*)2 – 3(*х + у*) – 10; б) (*а –* 2)2 + 4(*а –* 2) – 21.

**Г4.** а) *т*2 – 11*тп* + 28*п*2; б) *b*2 + 6*bc –* 55*c*2.



**Сокращаем дроби**

**Задача 14.10.** Сократите дробь:

а)  б)  в) 

***Решение***.

а)  Разложим на множители числитель и знаменатель: *х*2 – 7*х* + 6 = 0, *х*1 = 1, *х*2 = 6 [1⋅6 = 6, 1 + 6 = –(–7)], *х*2 – 7*х* + 6 = (*х* – 1)(*х* – 6);

*х*2 – 8*х* + 7 = 0, *х*1 = 1, *х*2 = 7 [1⋅7 = 7, 1 + 7 = –(–8)], *х*2 – 8*х* + 7 = (*х* – 1)(*х* – 7).

Теперь перепишем и сократим дробь:



б)  Разложим на множители числитель и знаменатель:

6*х*2 – 7*х* + 1 = 0, 

*х*1 = 1, *х*2 = .

Тогда

6*х*2 – 7*х* + 1 = ;

7*х*2 – 8*х* + 1 = 0,  *х*1 = 1, *х*2 = . Тогда 7*х*2 – 8*х* + 1 = .

Теперь перепишем и сократим дробь:



в)  Делаем замену = *у*, тогда

.

*Ответ*: а); б); в).

СТОП! Решите самостоятельно.

Сократите дробь.

**Б12.** а)  б) 

**В13.** а)  б) 

в)  г) 

**Что можно сказать о корнях квадратного**

**уравнения, не решая его?**

*Автор*: Допустим, дано приведённое уравнение *х*2 + *рх* + *q* = 0. Можно ли что-либо сказать о его корнях, не решая его?

*Читатель*: Ну, прежде всего, мы можем сказать, имеет ли уравнение корни. А если имеет, то сколько именно: один или два. Для этого надо вычислить дискриминант *D* = *p*2 – – 4*q* (или, если уравнение неприведённое: *ах*2 + *bх* + c = 0, то *D* = *b*2 – 4*ac*). Если *D* < 0, корней нет, если *D* = 0, то корень один, если *D* > 0, то корня два.

*Автор*: Верно. А если уравнение имеет корни, что можно сказать о знаках корней?

*Читатель*: По теореме Виета *х*1*х*2 = *q*, значит, если *q* < 0, то корни разных знаков, если *q* > 0, то корни одного знака.

*Автор*: Верно. Кстати, заметим, что если *q* < 0, то *D =* *p*2 – – 4*q* > 0, то есть уравнение обязательно имеет два корня. А если корни одного знака, как узнать, положительные они или отрицательные?

*Читатель*: Надо воспользоваться формулой *х*1 + *х*2 = –*р*. Если –*р* > 0, то есть *р* < 0, – корни положительные, а если –*р* < 0, то есть *р* > 0, то корни отрицательные.

*Автор*: А если корни разных знаков, как узнать, какой из них больше по модулю: положительный или отрицательный?

*Читатель*: Если *х*1*х*2 = *q* < 0 и *х*1 + *х*2 = –*р* > 0, то по модулю больше положительный корень, а если *х*1 + *х*2 = –*р* < 0, то по модулю больше отрицательный корень.

*Автор*: Всё верно! А можем ли мы определить, являются ли корни рациональными или иррациональными числами?

*Читатель*: Надо вычислить *D =* *p*2 – 4*q*. Если – рациональное число, то корни рациональные числа, а если – иррациональное число, то и корни иррациональные числа.

*Автор*: Ну что же, теоретически мы всё обосновали, остаётся применить знания на практике.

**Задача 14.11.** Определите, имеет ли уравнение корни:

а) 2*х*2 + 8*х* + 51 = 0; б) 2*х*2 + 8*х* + 3 = 0;

в) *х*2 + 3*х* – 10 = 0; г) *х*2 + 18*х* + 81 = 0.

Если уравнение имеет корни, то ответьте на следующие вопросы: 1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?

а) 2*х*2 + 8*х* + 51 = 0. Находим *D* = *b*2 – 4*ac* = 82 – 4⋅2⋅51 = = –344 < 0. Уравнение не имеет корней.

б) 2*х*2 + 8*х* + 3 = 0 .

1) *D* = *b*2 – 4*ac* = 82 – 4⋅2⋅3 = 64 – 24 = 40 > 0. Уравнение имеет два различных корня;

2) – число иррациональное, значит, оба корня – иррациональные числа;

3) , следовательно, корни одного знака; *р* = 4 > 0 – оба корня отрицательные.

в) *х*2 + 3*х* – 10 = 0.

1) *q* = –10 < 0, следовательно, *D* > 0, значит, уравнение имеет два различных корня; поскольку *х*1*х*2 < 0, корни разных знаков;

2) *D* = 32 + 4⋅10 = 49, – рациональное число, следовательно, оба корня – рациональные числа;

3) *х*1 + *х*2 = –3 < 0, значит, больший по модулю корень – отрицательный.

г) *х*2 + 18*х* + 81 = 0.

1) *D* = 182 + 4⋅81 = 324 – 324 = 0, следовательно, уравнение имеет два одинаковых корня;

2) *q* = 81 > 0, значит, корни одного знака;

3) *х*1 + *х*2 = –18 < 0, значит, оба корня отрицательные.

*Ответ*: а) корней нет; б) два различных отрицательных иррациональных корня; в) два рациональных корня разных знаков, больший по модулю корень – отрицательный; г) два одинаковых рациональных отрицательных корня.

СТОП! Решите самостоятельно.

**А8.** Не вычисляя по формуле корни квадратного уравнения, определите знаки корней уравнения:

а) *х*2 – 17*х* + 4 = 0; б) *х*2 + 20*х* + 5 = 0; в) *х*2 + 30*х* – 1 = 0;

г) *х*2 – 25*х* – 2 = 0; д) 3*х*2 – 5*х* + 2 = 0; е) 2*х*2 + 9*х* + 3 = 0;

ж) 5*х*2 + 10*х* – 4 = 0; з) .

**Б13.** Может ли квадратное уравнение *х*2 + *bx* – 8 = 0: а) не иметь корней; б) иметь равные корни; в) иметь два различных корня разных знаков; г) иметь два различных корня одного и того же знака?

**В14.** Определите, имеет ли уравнение корни:

а) 3*х*2 + 7*х* + 2 = 0; б) 3*у*2 – 8*у* + 2 = 0;

в) 5*х*2 – 3*х* + 1 = 0; г) –6*z*2 + 11*z* – 3 = 0.

Если уравнение имеет корни, то ответьте на следующие вопросы: 1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?

**В15.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + *рх* + *q* = 0. При каком условии корни этого уравнения: а) оба положительны; б) оба отрицательны; в) разных знаков?

****

**Известна сумма корней…**

**Задача 14.12.** Дано уравнение *х*2 – (2*р*2 – *р* – 6)*х* + + (8*р* – 1) = 0. Известно, что сумма его корней равна –5. Найдите значение параметра *р*.

***Решение***. По теореме Виета *х*1 + *х*2 = –*р*. В данном случае *х*1 +*х*2 = 2*р*2 – *р* – 6 = –5. Остается решить квадратное уравнение и убедиться, что при полученных значениях *р* корни существуют: 2*р*2 – *р* – 6 = –5 → 2*р*2 – *р* – 1 = 0,

 *р* = 1, .

1. Пусть *р* = 1, тогда *х*2 – (2⋅12 – 1– 6)*х* + (8⋅1 – 1) = 0 → *х*2 –5*х* + 7 = 0, отсюда *D* = 25 – 4·7 = –3 < 0 – корней нет.

2. Пусть , тогда

,

*q* = –5 < 0, значит *D* > 0. Следовательно, при  сумма корней уравнения *х*2 – (2*р*2 – *р* – 6)*х* +  (8*р* – 1) = 0 действительно равна –5.

*Ответ*: .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б14.** При каком значении *п* корни уравнения *х*2 + (2*п* – 7)*х* – 3 = 0 являются противоположными числами?

**В16.** Дано уравнение *х*2 + (*р*2 – 3*р* – 11)*х* + 6*р* = 0. Известно, что сумма его корней равна 1. Найдите значение параметра *р* и корни уравнения.

**Г5.** При каких условиях сумма корней приведённого квадратного уравнения *х*2 + *рх* + *q* = 0 равна их произведению?



**Известно произведение корней**

**Задача 14.13.** Какая зависимость существует между коэффициентами квадратного уравнения *ах*2 + *bx* + *с* = 0, если известно, что его корни – взаимно обратные числа?

***Решение***. По условию  или *х*1*х*2 = 1. Сделаем данное уравнение приведённым:

*ах*2 + *bx* + *с* = 0.

Тогда *х*1*х*2 = 1 =. Но этого не достаточно! Ведь корни ещё должны существовать, а для этого необходимо, чтобы *D* = *b*2 – 4*ac* = *b*2 – 4*a*⋅*a* = *b*2 – 4*a*2 ≥ 0 или *b*2 ≥ 4*a*2.

*Ответ*: *а = с* и *b*2 ≥ 4*a*2.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Б15.** При каком значении *п* корни уравнения *х*2 – 100*х* + 3*п* – 2 = 0 являются взаимно обратными числами?

**В17.** При каких значениях параметра *р* произведение корней уравнения *х*2 + 3*х* +(*р*2 – 7*р* + 12) = 0 равно нулю?



**Известна разность корней**

**Задача 14.14.** Разность корней квадратного уравнения *х*2 – 4*х* + *q* = 0 равна 20. Найдите *q*.

***Решение***. По условию задачи *х*1 – *х*2 = 20, а по теореме Виета *х*1 + *х*2 = 4. Получаем и решаем систему уравнений:



Итак, *х*1 = 12, *х*2 = (–8). По теореме Виета

*q* = *х*1*х*2 = 12⋅(–8) = –96.

*Ответ*: *q* = –96.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В18.** Один из корней квадратного уравнения 24*х*2 – 10*х* + *q* = 0 на  больше другого. Найдите *q*.

**Г6.** При каком значении *с* один из корней уравнения 4*х*2 – 20*х* + + *с* = 0 на 2 меньше другого?

**Известно отношение корней: **

**Задача 14.15.** При каких значениях коэффициента *р* отношение корней уравнения *х*2 + *рх* + 1 = 0 равно 4?

***Решение***. По условию задачи  или *х*2 = 4*х*1. По теореме Виета *х*1*х*2  = *х*1⋅4*х*1 = 1 , *х*2 = 4*х*1 =4· 2,

То есть возможны два варианта:

1)  2) 

тогда *р* = –(*х*1 + *х*2):

1) ; 2) .

*Ответ*: *р* = –2,5, *р* = 2,5.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В19.** Один из корней уравнения 2*х*2 – 14*х* + *р* = 0 больше другого в 2,5 раза. Найдите значение параметра *р* и корни уравнения.

**Г7.** При каких значениях *k* корни уравнения *х*2 – (2*k* + 1)*x* + *k*2 = 0 относятся как 1 : 4?

**Задача 14.16**. При каких значениях один из корней уравнения вдвое больше другого? Найдите эти корни.

***Решение***. Запишем формулы Виета:  и учтём, что *х*1 = 2*х*2. Подставим это соотношение в формулы Виета и получим  или 

Из первого уравнения находим  и подставляем во второе:

 или 

2 – 8*а* + 8*а*2 = 9*а*2 + 18 → 9*а*2 - 8*а*2+8*а*+18-2 =0 →

*а*2+8*а*+16 =0 → (*а* + 4)2=0,

откуда *а* = –4.

Теперь находим  и

*х*1 = 2*х*2 = 6.

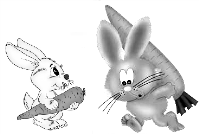
Итак, при *а* = –4 корни этого уравнения *х*1 = 6 и *х*2 = 3 (то есть один корень вдвое больше другого).

*Ответ*: *х*1 = 6 и *х*2 = 3 при .

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г8.** При каких значениях *а* один из корней уравнения 2*х*2 + (3*а* – – 1)*х* + (*а*2 – 4*а* + 4) = 0 вдвое больше другого?

**Г9.** При каком целом значении *k* один из корней уравнения 4*х*2 – – (3*k* + 2)*х* + (*k*2 – 1) = 0 втрое меньше другого?



**Один корень равен квадрату другого…**

**Задача 14.17.** При каких значениях *а* один из корней уравнения 4*х*2 – 15*х* + 4*а*3 = 0 равен квадрату другого корня?

***Решение***. По условию задачи *х*2 = . По теореме Виета

1) 

2) 

 *a* = –2,5, *а*­2 = 1,5.

*Ответ*: при *а* = –2,5 и при *а =* 1,5.

СТОП! Решите самостоятельно.

**Г10.** При каком положительном значении *с* один корень уравнения 8*х*2 – 6*х* + 9*с*2 = 0 равен квадрату другого?

**Г11.** При каких значениях *а* корни уравнения *х*2 – 6*х* + *а* = 0 удовлетворяют условию ?



**Сумма квадратов корней** 

**Задача 14.18.** Найдите такое значение *q*, при котором сумма квадратов корней уравнения *х*2 + *х* + *q* = 0 равна 13.

***Решение***. Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + *х* + *q* = 0.

По условию задачи , с другой стороны,  = (*х*1 + *х*2)2 – 2*х*1*х*2 = (–1)2 – 2*q* = 1 – 2*q*. Отсюда получаем уравнение 13 = 1 – 2*q* → 2*q* = –12 → *q* = –6.

*Ответ*: *q* = –6.

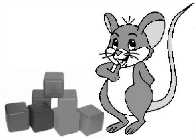
СТОП! Решите самостоятельно.

**В20.** Составьте квадратное уравнение, если известны произведение его корней и сумма их квадратов:

а) *х*1*х*2 = 12, ; а) *х*1*х*2 = –3, .

**В21.** Корни квадратного уравнения *х*2 – 4*rx* + 7*r*2 = 0 таковы, что . Найдите *r*.

**Г12.** Сумма квадратов корней уравнения 12*х*2 – 17*х* + *с* = 0 равна . Найдите свободный член уравнения.



**Составляем уравнение по некоторым**

**известным соотношениям между корнями**

**Задача 14.19.** В уравнении *х*2 – 2*х* + *с* = 0 определите то значение *с*, при котором его корни *х*1 и *х*2 удовлетворяют условию 7*х*2 – 4*х*1 = 47.

***Решение***. По условию задачи , по теореме Виета . Получаем систему уравнений:



Из уравнения (2) находим *х*1 = 2 – *х*2 = 2 – 5 = –3. Отсюда *с* = *х*1*х*2 = (–3)⋅5 = –15.

*Ответ*: *с* = –15.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В22.** Найдите коэффициент *q* в уравнении *х*2 – 2*х* + *q* = 0, если корни уравнения *х*1 и *х*2 связаны соотношением 2*х*1 + *х*2 = 3.

**Задача 14.20.** Найдите коэффициент *р* в уравнении *х*2 + *рх* + 42 = 0, если квадрат разности его корней равен 1.

***Решение***. По условию (*х*1 – *х*2)2 = 1. Преобразуем это уравнение: 

(*х*1 + *х*2)2. Подставим в получившееся уравнение значения *х*1 + *х*2 = –*р* и *х*1*х*2 = 42 и получим:

.

*Ответ*: *р* = –13 и *р* = 13.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В23.** Разность квадратов корней приведённого квадратного уравнения равна 24. Второй коэффициент этого уравнения равен 2. Найдите свободный член уравнения.



**Целые коэффициенты и целые корни**

Докажем следующее утверждение: если корн уравнения *х*2 + *рх* + *q* = 0, где *р* и *q* – целые числа, рациональны, то оба его корня – целые числа.

Пусть *х*1 – первый корень уравнения. Предположим, что он – несократимая дробь  (*п* ≠ 1). Подставим это значение в исходное уравнение и получим верное равенство: . Умножим обе части этого уравнения на *п* и получим: . Справа стоит целое число (так как *р*, *т*, *п* и *q* – целые), а слева – дробное (так как *п* ≠ 1, а дробь – несократимая).

Мы пришли к противоречию! Значит, неверно, что *п* ≠ 1, то есть *п* = 1 и *х*1 – целое число. Но по теореме Виета *х*2 + *х*1 = = –*р* → *х*2 = –*р* – *х*1. Поскольку *р* и *х*1 – целые, то и *х*2 – целое число. Утверждение доказано!

**Задача 14.21.** Найдите все целые положительные значения *q*, при которых уравнение *х*2 + 5*х* + *q* = 0 имеет целые корни. Найдите несколько целых отрицательных значений *q*, при которых уравнение имеет целые корни. Можно ли перечислить все такие значения?

***Решение***.

1. По условию задачи *q* > 0, значит, корни имеют одинаковые знаки, а *х*1 + *х*2 = –*р* = –5 < 0, значит, оба корня отрицательные. Поскольку корни целые, то возможны следующие варианты: 1) –1 – 4 = –5; 2) –2 – 3 = –5… и всё! Тогда: а) *q* = (–1)⋅(–4) = 4; б) *q* = (–2)⋅(–3) = 6.

2. Теперь рассмотрим ситуацию, когда *q* < 0. Корни имеют разные знаки, и можно подобрать бесконечно много вариантов, при которых а *х*1 + *х*2 = –5, например:

а) –6 + 1 = –5 → *q* = (–6)⋅1 = –6;

б) –7 + 2 = –5 → *q* = (–7)⋅2 = –14;

в) –8 + 3 = –5 → *q* = (–8)⋅3 = –24 и т.д.

*Ответ*: 1) *q* = 4, *q* = 6; 2) например: –6, –14, –24 и т.д.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В24.** Найдите все целые значения *р*, при которых данное уравнение имеет целые корни: а) *х*2 + *рх* + 15 = 0; б) *х*2 + *рх* – 15 = 0; в)  *х*2 + *рх* + 12 = 0; 7)  *х*2 + *рх* – 12 = 0.

**Г13.** Коэффициенты *р* и *q* квадратного трёхчлена *х*2 + *рх* + *q* нечётны. Докажите, что он не может иметь целых корней.



**По данному уравнению составляем второе**

**Задача 14.22.** Квадратное уравнение *х*2 + *рх* + *q* = 0 имеет корни *х*1 и *х*2. Составьте квадратное уравнение, корни которого на две единицы больше, т.е. равны *х*1 + 2 и *х*2 + 2.

***Решение*.** Пусть искомое уравнение имеет вид *у*2 + *р1у* + *q1* = 0 и его корни равны *у*1 = *х*1 + 2 и *у*2 = *х*2 + 2.

По теореме Виета получим:

1) *р* = –(*х*1 + *х*2), тогда *р*1 = –(*у*1 + *у*2) = –(*х*1 + 2 + *х*2 + 2) = = *–*(*х*1 + *х*2) - 4 = *р* – 4.

2) *q* = *х*1*х*2, тогда *q*1 = *у*1 *у*2 = (*х*1 + 2)(*х*2 + 2) = *х*1*х*2 + 2*х*1 + + 2*х*2 + 4 = *х*1*х*2 + 2(*х*1 + *х*2) + 4 = *q* – 2*р* + 4.

Осталось записать уравнение.

*Ответ*: *у*2 + (*р* – 4)*у* + (*q* – 2*р* + 4) = 0.

СТОП! Решите самостоятельно.

**В25.** Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения *ах*2 + *bx* + *с* = 0.

**Г14.** Составьте уравнение, корни которого:

а) на 2 меньше корней уравнения *х*2 – 187*х* + 148 = 0;

а) на 3 больше корней уравнения *х*2 + 191*х* - 1250 = 0.

**Задача 14.23.** Уравнение *х*2 + *рх* + *q* = 0 имеет корни *х*1 и *х*2. Составьте квадратное уравнение, корни которого: а)  и ; б)  и .

***Решение***. По теореме Виета *р* = –(*х*1 + *х*2) и *q* = *х*1*х*2.

а) Пусть уравнение *у*2 + *р1у* + *q1* = 0 имеет корни *у*1 = и *у*2 =. Тогда *р*1 = –(*у*1 + *у*2) = –( + ) = –[(*х*1 + *х*2)2 –

- 2*х*1*х*2]= = –[(–*р*)2 – 2*q*] = 2*q* – *р*2, *q*1 = *у*1*у*2 = = (*х*1*х*2)2 = *q*2. Составляем новое уравнение: *у*2 + (2*q – p*2)*у* + *q*2 = 0.

б) Пусть уравнение *z*2 + *р1z* + *q*1 = 0 имеет корни *z*1 = и *z*2 = . Тогда 

*р1* = –(*z*1 + *z*2) ==

.

Составляем новое уравнение:  или .

*Ответ*: а) *у* + (2*q – p*2)*у* + *q*2 = 0; б) .

СТОП! Решите самостоятельно.

**В26.** Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения *х*2 + *рx* + *q* = 0.

**Г15.** Составьте квадратное уравнение, имеющее корни и, где *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 – 8*х* + 2 = 0.

** Домашнее задание**

**Задачи очень лёгкие**

**А9.** Не решая уравнения, укажите, имеет ли оно корни и чему равны произведение и сумма его корней:

а) *х*2 – 14*х* + 40 = 0; б) *х*2 + 16*х* + 15 = 0; в) *х*2 -2*х* – 1 = 0;

г) 2*х*2 – 5*х* - 3 = 0; д) 4*х*2 +16*х* + 15 = 0; е) 3*х*2 + 11*х* - 4 = 0.

**А10.** Составьте приведённое квадратное уравнение, если известны сумма *L* и произведение *K* его корней:

а) *L =* 3, *K* = –28; б) *L = –*3, *K* = –18; в) *L = –*3,5, *K* = 2,5;

г) *L =* , *K* = ; д) *L* = 0, *K* = –9; е) *L = 4*, *K* = 4.

**А11.** Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения, если известен первый:

а) *х*2 – 7*х* + 10 = 0, *х*1 = 2; б) *х*2 + 8*х* + 15 = 0, *х*1 = –3;

в) *х*2 + 3*х* – 18 = 0, *х*1 = 3; г) *х*2 – 6*х* – 7 = 0, *х*1 = 7.

**А12.** Определите, можно ли разложить на линейные множители квадратный трёхчлен: а) *х*2 – 12*х* – 4; б) 3*х*2 + 8*х* + 10; в) 2*х*2 + 3*х*+ 1; г) *х*2 – 5*х* + 8.

**Задачи лёгкие**

**Б16.** Укажите сумму и произведение корней квадратного уравнения (если они существуют):

а) 2*х*2 – 3*х* + 1 = 0; б) 3*х*2 + *х* + 4 = 0; в) ;

г) 1,4*х*2 – 3*х* += 0; д) 0,1*х*2 – 8*х* + 4,2 = 0; е) 3*х*2 + 1,1*х* – 0,4 = 0.

**Б17.** Составьте двумя способами приведённое квадратное уравнение, если известны его корни: а) 1 и 5; б) –2 и 3; в) 4 и 6; г) –3 и –6; д) 0,5 и 4; е) 1,2 и –5; ж) 1 и –1; з) 5 и 5.

**Б18.** Определите второй корень и коэффициент *р*, если:

а) один из корней уравнения *х*2 + *рх* – 20 = 0 равен –5;

б) один из корней уравнения 3*х*2 + *рх* + 5 = 0 равен –2.

**Б19.** Определите второй корень и коэффициент *q*, если:

а) один из корней уравнения *х*2 – 8*х* + *q* = 0 равен –10;

б) один из корней уравнения 2*х*2 + 3*х* + *q* = 0 равен 3.

**Б20.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + 9*x –* 17 = 0. Не решая уравнения, вычислите: а) ; б) .

**Б21.** Не решая уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0, найдите , где *х*1 и *х*2 – корни данного уравнения.

**Б22.** Решите квадратное уравнение подбором корней:

а) *у*2 + 9*у* + 20 = 0; б) *х*2 – 11*х* + 24 = 0; в) *t*2 – 9*t* + 8 = 0;

г) *z*2 + 12*z* + 20 = 0; д) *х*2 + 13*х* + 30 = 0; е) *у*2 – 17*у* + 30 = 0;

ж) *t*2 + 12*t* + 32 = 0; з) *и*2 – 15*и* + 50 = 0.

**Б23.** Решите квадратное уравнение подбором корней:

а) *х*2 + 3*х* – 4 = 0; б) *х*2 – 12*х* + 11 = 0;

в) *х*2 – 9*х* – 10 = 0; г) *х*2 + 8*х* – 9 = 0.

**Б24.** Решите квадратное уравнение подбором корней:

а) *х*2 + 9*х* + 20 = 0; б) *х*2 – 15*х* + 36 = 0;

в) *х*2 + 5*х* – 14 = 0; г) *х*2 – 7*х* – 30 = 0.

**Б25.** Покажите, что квадратные трёхчлены а) *х*2 + 2*х* – 3; б) 2*х*2 + 4*х* – 6; в) –5*х*2 – 10*х* + 15 имеют одни и те же корни. Разложите эти трёхчлены на множители.

**Б26.** Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) *т*2 + 3*т* – 18; б) *b*2 + 9*b* + 8; в) *у*2 – *у*– 6; г) *d*2 + 11*d* + 18;

д) *а*2 + *а* – 6; е) *с*2 – 7*с* + 6; ж) *п*2 – 4*п*– 60; з) *х*2 – 23*х* + 60.

**Б27.** Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) 21 + 10*п +* *п*2; б) 14 – 9*k +* *k*2; в) 42 – 13*b +* *b*2; г) 48 – 14*с +* *с*2.

**Б28.** Сократите дробь:

а) ; б) ; в) ; г) .

**Б29.** Не решая уравнений, определите знаки его корней:

а) *х*2 – 7*х* + 12 = 0; б) *х*2 + 7*х* + 12 = 0;

в) *х*2 + 5*х* – 14 = 0; г) *х*2 – 5*х* – 14 = 0;

д) *х*2 + 1,27*х* – 1,46 = 0; е) *х*2 – *х* – 0,5 = 0;

ж) *х*2 – 56*х* + 768 = 0; з) *х*2 – 20*х* – 684 = 0;

и) *х*2 = –377*х* – 31242; к) *х*2 + 272*х* = 49104.

**Б30.** Докажите, что уравнение:

а) 5*х*2 = 8*х* + 284 не может иметь корни одного знака;

б) 17*х*2 = 7*х* – 354 не может иметь корни разных знаков.

**Б31.** Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни одинаковых знаков, и определите знаки корней:

а) *х*2 + 3*х* + 2 = 0; в) *х*2 – 5*х* + 4 = 0; д) *х*2 – 6*х* + 8 = 0;

б) *х*2 – 3*х* + 2 = 0; г) *х*2 + 5*х* + 4 = 0; е) *х*2 + 8*х* + 7 = 0.

**Б32.** При каких значениях параметра *р* сумма корней квадратного уравнения *х*2 + (*р*2 + 4*р* – 5)*х* – *р* = 0 равна нулю?

**Б33.** При некотором значении параметра *р* корни квадратного уравнения 2*рх*2 + 5*х* + *р* + 1 = 0 являются взаимно обратными числами. Найдите эти корни.

**Задачи средней трудности**

**В27.** По теореме Виета найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения (если они существуют):

а) *х*2 + 9*х* – 10 = 0; б) *т*2 – 1,1*т* – 0,6 = 0; в) *t*2 + 42,5*t* + 100 = 0;

г) –*х*2 + 5*х* + 24 = 0; д) 40*т*2 + 38*т* – 15 = 0; е) 54*у*2 + 69*у* + 20 = 0.

**В28.** Составьте квадратное уравнение, если известны его корни: а) 2 и ; б)  и 5; в)  и –; г) 0 и 5; д) и ; е)  и .

**В29.** Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь своими корнями: а) 5 и 2+; б)  и ; в)  и .

**В30.** Найдите коэффициенты квадратного трёхчлена *х*2 + *рх* + + *q*= 0, если известно, что *р* и *q* – целые числа и – корень данного трёхчлена.

**В31.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0. Найдите:

а) *b* и *с*, если *а* = 2, *х*1 = 3, *х*2 = –0,5;

б) *а* и *с*, если *b* = –1, *х*1 = 3, *х*2 = –4;

в) *а* и *b*, если *с* = 4, *х*1 = –2, *х*2 = –0,25;

г) *а* и *с*, если *b* = 6, *х*1 = 3, *х*2 = –4.

**В32.** Найдите *а*, при котором один из корней квадратного уравнения 2*х*2 +*ах* + 3*а* = 0 равен 3.

**В33.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + *рx – q* = 0. Найдите , не вычисляя этих корней.

**В34.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + *рx – q* = 0. Найдите , не вычисляя этих корней.

**В35.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения 6*х*2 + *x –* 2 = 0. Не решая уравнения, вычислите: а) ; б) .

**В36.** Выразите через коэффициенты уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0:

а) квадрат суммы его корней; б) квадрат разности его корней;

в) сумму квадратов его корней; г) сумму кубов его корней.

**В37.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения 3*х*2 – 5*x –* 4 = 0. Найдите: а) ; б) .

**В38.** Не используя формулу корней, найдите корни квадратного уравнения:

а) *х*2 – 88*х* + 780 = 0; б) *х*2 – 26*х* + 120 = 0;

в) *х*2 – 26*х* + 105 = 0; г) *х*2 + 35*х* – 114 = 0.

**В39.** Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) –2*х*2 + 5*х* + 18; б) 15*у*2 + *у* – 6; в) –12*т*2 + 5*т*+ 3;

г) 3*х*2 + 0,9*х* – 2,1; д) 5*k*2 + 8*k* + 3,2; е) 3*р*2 – 0,27.

**В40.** Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) 2*х*2 + 3*х* + 1; б) 3*у*2 + 7*у* – 6; в) –4*z*2 + 11*z*+ 3;

г) 3*а*2 + 7*а* + 2; д) 3 – 11*т +* 6 *т*2; е) 5*b*2 –7*b* + 2;

ж) 2 + 9*п +* 7*п*2; з) 2+ 3*х* – 5*х*2.

**В41.** Разложите на множители выражения:

а) 7*х* + 23 + 16; б) 3*х* – 10 + 3;

в) 9*х* + 4 – 5; г) 2*х*3 – 5*х* + 2.

**В42.** Представьте в виде произведения многочленов первой степени:

а) 12*х*3 – 22*х*2 – 20*х*; б) 80*ту*2 – 12*ту* – 8*т*;

в) 30*х*3 + 5*х*2 – 60*х*; г) 20*km*2 – 92*km* – 40*k*.

**B43.** Сократите дробь:

а) ; б) ; в) ; г) .

**B44.** Сократите дробь:

а) ; б); в); г).

**В45.** Докажите, что ни при каком значении *b* корни уравнения:

а) *х*2 + *bх* – 3 = 0 не могут иметь одинаковых знаков;

б) 2*х*2 + *bх* + 5 не могут иметь разных знаков.

**В46.** Определите, в каком уравнений корни имеют разные знаки, а также какой из корней (положительный или отрицательный) больше по модулю:

а) 4*х*2 – 11*х* – 3 = 0; б) –8*z*2 – 2*z* + 3 = 0;

в) –2*х*2 + 4*х* – 3 = 0; г) 2*х*2 – 10*х* – 5 = 0.

**В47.** При некотором значении параметра *р* корни квадратного уравнения 2*рх*2 + (*р*2 – 9)*х* – 5*р* + 2 = 0 являются противоположными числами. Найдите эти числа.

**В48.** Дано уравнение *х*2 – (*р* + 1)*х* + (2*р*2 – 9*р* – 12) = 0. Известно, что произведение его корней равно –21. Найдите значения параметра *р*.

**В49.** Разность корней уравнения 2*х*2 – 15*х* + *р* = 0 равна 2,5. Найдите значение параметра *р* и корни уравнения.

**В50.** При каком значении *р* отношение корней квадратного уравнения *х*2 + *рх* – 16 = 0 равно –4?

**В51.** Найдите значение *b*, при котором один из корней уравнения 2*х*2 – *bx* + 3 = 0 в 6 раз больше другого.

**В52.** Сумма квадратов корней квадратного уравнения *х*2 – 3*ах* + *а*2 = 0 равна 1,75. Найдите числовое значение *а*.

**В53.** Решите уравнение *х*2 + *рх* + 35 = 0 при условии, что сумма квадратов корней равна 74.

**В54.** В уравнении 2*х*2 – 11*х* + *т* = 0 найдите *т*, если 2α – β = 2, где α и β – корни уравнения.

**В55.** Докажите, что если уравнение *х*2 + *рх* + *q* = 0, где *р* ∈ *Z* и *q*∈ *Z*, имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

**В56.** Найдите все целые значения *р*, при которых данное уравнение имеет целые корни: а) *х*2 + *рх* + 10 = 0; б) *х*2 + *рх* – 8 = 0; в) *х*2 + *рх* + 3 = 0; г) *х*2 + *рх* – 32 = 0.

**В57.** Составьте квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0.

**В58.** Числа *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 – 2000*х* + 1999 = 0. Составьте квадратное уравнение, корни которого –*х*1 и –*х*2.

**В59.** Составьте квадратное уравнение, корни которого:

а) равны соответственно сумме и произведению корней уравнения 3*х*2 + 2*х* – 15 = 0;

б) меньше корней уравнения 2*х*2 – 13*х* + 3 = 0 в 2 раза.

**В60.** Составьте квадратное уравнение с корнями и , если *х*1 и *х*2 – корни уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0.

**В61.** Составьте квадратное уравнение с корнями (*a + b*)2 и (*a – b*)2, если *а* и *b* – корни уравнения *х*2 + *рx + q* = 0.

**В62.** Уравнение *ах*2 + *bx + c* = 0 имеет корни *х*2 и *х*2. Запишите уравнение, корни которого равны: а) *тх*1 и *тх*2; б) и .

**Задачи трудные**

**Г16.** Определите коэффициенты квадратного уравнения *х*2 + *рх* + *q* = 0 так, чтобы его корни были равны *р* и *q*.

**Г17.** Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известен один из его корней .

**Г18.** При каком значении *k* у уравнения *kх*2 + 12*х* – 3 = 0 есть корень, равный ?

**Г19.** При каких значениях *п* один из корней квадратного уравнения *х*2 – 8*х* +4*п*2 – 1 = 0 равен 0?

**Г20.** Какая зависимость существует между коэффициентами *р* и *q* уравнения *х*2 + *px + q* = 0, если один из его корней равен –1?

**Г21.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0, *а* ≠ 0. Не решая уравнения, выразите через *а*, *b* и *с* следующие суммы: а) ; б) .

**Г22.** Буквами α и β обозначены корни уравнения 15*х*2 – 4*x –* 2 = 0. Не решая уравнения, найдите значение выражения: а) (α – β)2 + 4αβ; б) (α – β)2 + 3αβ; в) 2(α – β)2 + 5; г) (α – β)2 – αβ.

**Г23.** Решите уравнение:

а) 1999*х*2 – 2001*х* + 2 = 0; б) (*х* – 3)(*х* – 4)(*х* – 7)(*х* – 8) = 12.

**Г24.** Разложите на множители:

а) 3*х*3 – 9*х*2 + 6*х*; в) *х*3 – 9*х*2 + 18*х*– *ах*2 – 9*ах* – 18*а*;

б) *у*3 + 4*у*2 – 32*у*; г) 2*у*3 + *ту*2 + 6*у*2 + 3*ту* – 20*у* – 10*т*.

**Г25.** Разложите на множители:

а) (*а + b*)2 – 5(*a + b*) – 84; в) (3 *– у*)2 – 2(3 *– у*) – 35;

б) (*т +п*)2 + 3(*т + п*) + 2; г) (1 *– х*)2 – 6(1 *– х*) + 8.

**Г26.** Разложите на множители:

а) *а*3 – 16*ab* – 3*b*2; в) *п*2 + 14*ап*+ 24*а*2;

б) *х*2 + 21*ху* + 20*у*2; г) *а*2 – 9*ас*  – 36*с*2.

**Г27.** Сократите дробь:

а) ; б).

**Г28.** В каких случаях сумма и произведение корней приведённого квадратного уравнения являются противоположными числами?

**Г29.** Найдите условие, при котором разность корней уравнения *х*2 + *рх + q* = 0 равна *т*.

**Г30.** При каком значении λ корни уравнения (2λ – 1)*х*2 + (5λ+ + 1)*х* + (3λ + 1) = 0 относятся как 3 : 2?

**Г31.** Не решая уравнения *х*2 – (2*а* + 1)*х* + *а*2 + 2 = 0, найдите, при каком значении *а* один из корней в 2 раза больше другого.

**Г32.** При каком значении *t* один из корней уравнения *х*2 – 12*х* + *t* = 0 является квадратом другого корня?

**Г33.** Дано уравнение *х*2 + (3*р* – 5) + (3*р*2 – 11*р* – 6) = 0. Известно, что сумма квадратов его корней равна 65. Найдите значение параметра *р* и корни уравнения.

**Г34.** При каких *а* сумма корней уравнения *х*2 – 2*ах* + (2*а* –1) = 0 равна сумме квадратов корней?

**Г35.** Какому условию удовлетворяют коэффициенты уравнения *х*2 + *рх + q* = 0, если , где α и β – корни уравнения.

**Г36.** Найдите условие, при котором разность квадратов корней уравнения *ах*2 + *bx* + *с* = 0 равна .

**Г37.** Найдите коэффициенты уравнения *х*2 + *рх* + *q* = 0 при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

**Г38.** Квадратное уравнение *ах*2 + *bx + c* = 0 имеет два корня. Составьте новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

**Г39.** Пусть *х*1 и *х*2 – корни уравнения *х*2 + *рх* + *q* = 0. Найдите *р* и *q*, если известно. что *х*1 + 1 и *х*2 + 1 являются корнями уравнения *х*2 –– *р*2*х* + *рq* = 0.

**Г40.** При каком значении *п* один из корней уравнения *х*2 – 7*х* + + 2*п* = 0 в 2 раза больше одного из корней уравнения *х*2 – 5*х* + *п* = 0?

**Г41.** Обозначим через α и β корни уравнения 3*х*2 + 7*х* + 4 = 0. Не решая данного уравнения, составьте новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны .

**Задачи очень трудные**

**Д1.** Найдите соотношение между коэффициентами уравнения *ах*2 + *bx + c* = 0, если один корень вдвое больше другого.

**Д2.** Дано уравнение *х*2 + *рх* + *q* = 0. Составьте новое квадратное уравнение, корнями которого являются сумма квадратов и сумма кубов корней данного уравнения.

