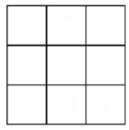
Олимпиада 4 класс

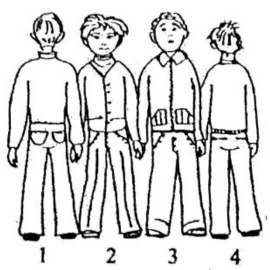
1. Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть каждых суток танцевала, шестую часть – пела. Остальное время она решила посвятить подготовке к зиме. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?
Решение. 24 : 2 + 24 : 3 + 24 : 6 = 12 + 8 + 4 = 24. Все 24 часа в сутки Стрекоза к зиме не готовилась.
Ответ: 0.

2. Квадрат состоит из 9 равных квадратов (см. рисунок). Сколько всего квадратов?



Решение.
Один квадрат: 3х3, 4 квадрата: 2х2, 9 квадратов: 1х1, всего: 1+4=9=14.
Ответ: 14 квадратов.

3. На картинке мы видим четырёх детей: Колю, Васю, Сеню и Яна. Известно, что мы видим Сеню правее Коли, а Коля дал Васе левую руку. Найдите, как кого зовут, и объясните, почему вы так считаете.



Решение. Сеня (4) стоит правее Коли (2), который даёт левую руку Васе (3).
Ответ: 1 – Ян, 2 – Коля, 3 – Вася, 4 – Сеня.

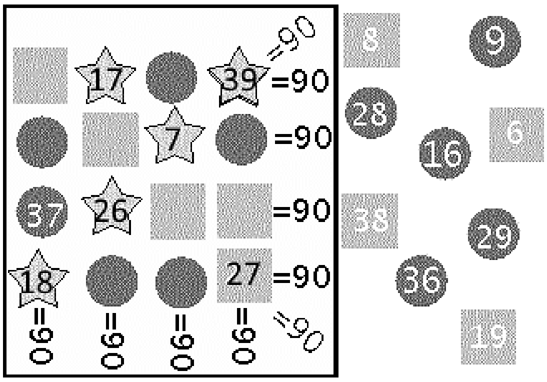
4. Один карандаш, три тетради и четыре ручки стоят вместе 112 руб., а три карандаша и одна тетрадь – 32 руб. Сколько стоит комплект из одного карандаша, одной ручки и одной тетради?
Решение.

$$+\begin{array}{l} K + 3\cdot T + 4\cdot P = 112 \\ 3\cdot K + T \qquad\quad = 32 \\ \hline \end{array}$$

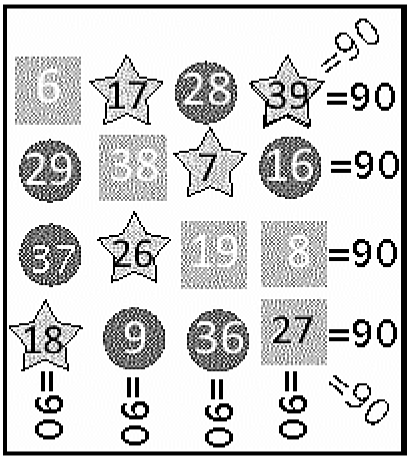
$$4K + 4T + 4P = 112 + 32 \to 4(K + T + P) = 144 \to K + T + P = 144 : 4 = 36.$$

Ответ: 36 руб.

5. Расположите оставшиеся девять чисел в квадрате по указанному образцу так, чтобы в каждом ряду, столбце и по диагоналям в сумме получалось число 90.



Ответ: см. рисунок.



Олимпиада 5 класс

1.

На столе лежат в ряд пять монет: средняя — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. Разрешается одновременно перевернуть три рядом лежащие монеты. Можно ли при помощи нескольких таких переворачиваний все пять монет положить вверх орлом?

2.

Найдите все натуральные числа, которые больше своей последней цифры в 5 раз.

3.

Первый вторник месяца Митя провёл в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника — в Вологде. В следующем месяце Митя первый вторник провёл во Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца Митя был в каждом из городов?

4.

Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного—за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной.

5.

Леша и Ира живут в доме, на каждом этаже которого 9 квартир (в доме один подъезд). Номер этажа Леши равен номеру квартиры Иры, а сумма номеров их квартир равна 329. Каков номер квартиры Леши?

Олимпиада 5 класс решение.

1.

Перевернём первые три монеты. Тогда первые две монеты будут лежать вверх орлом, а последние три — вверх решкой. Теперь переворачиваем последние три монеты, и все пять монет лежат вверх орлом.

2.

При умножении на 5 последняя цифра не изменилась, значит, она была 0 или 5. Если бы последняя цифра была 0, то всё число было бы 0, а мы ищем натуральные числа. Значит, последняя цифра была 5. А всё число 25. Естественно, больше 25 это число быть не может, поскольку оно в 5 раз больше цифры, т.е. не может превышать 45.

3.

Поскольку Митя не мог провести один и тот же день и в Смоленске и в Вологде, значит, месяц начинался во вторник (ведь иначе первый вторник и первый вторник после первого понедельника совпали бы). Аналогично заключаем, что и второй месяц должен начинаться во вторник. Это возможно только в случае, когда один месяц — февраль, а другой — март, причём год не високосный. Отсюда уже легко получить, что в Смоленске Митя был 1 февраля, в Вологде — 8 февраля, во Пскове — 1 марта, во Владимире — 8 марта.

Ответ: В Смоленске — 1 февраля, в Вологде — 8 февраля, в Пскове — 1 марта, во Владимире — 8 марта.

4.

Если горячей воды в ванной в $1{,}5$ *раза больше, чем холодной, то горячая вода составляет* $3/5$ *ванны, а холодная—*$2/5$. *Значит, горячая вода должна литься* $3/5\cdot 23=69/5$ *минут, а холодная—* $2/5\cdot 17=34/5$ *минут. Поэтому холодный кран нужно открыть на* $69/5-34/5=7$ *минут позже горячего.*

Ответ: 7 минут.

5.

Пусть Леша живет на этаже с номером Z *в квартире* $9Z-K$ $(K\le 8)$. *Тогда Ира живет в квартире* Z *и по условию* $Z+(9Z-K)=329\to 10Z=329+K$. *Поскольку* $0\le K\le 8$, *а число 329+К должно быть кратно 10, то получаем единственное решение* $K=1, Z=33$. *Поэтому Леша живет в квартире* $9Z-K=296$.

Ответ: 296. Леша живет в квартире №296 на 33-м этаже, а Ира – в квартире №33.

Олимпиада. 6 класс.

1

Гирлянда состоит из 10 последовательно соединенных лампочек. Ровно одна лампочка перегорела, но неизвестно, какая. Для замены перегоревшей имеется только одна запасная исправная лампочка. Чтобы вывинтить лампочку, нужно 10 секунд, чтобы завинтить — тоже 10 секунд (временем на остальные действия можно пренебречь). За какое минимальное время можно найти перегоревшую лампочку.

2

Подряд написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, …, 2010. Первое, третье, пятое и т.д. по порядку вычеркивают. Из оставшихся 1000 чисел снова вычеркивают первое, третье, пятое и т.д. Так делают, пока не останется одно число. Что это за число?

3

Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного—за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

4

Леша и Ира живут в доме, на каждом этаже которого 9 квартир (в доме один подъезд). Номер этажа Леши равен номеру квартиры Иры, а сумма номеров их квартир равна 329. Каков номер квартиры Леши?

5

На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. За один ход можно увеличить любое число из чисел на 3 или на 5. Какое минимальное число ходов нужно сделать, чтобы все числа стали равными?

Решение

1.

Будем действовать простым способом—вывинтим первую лампочку и завинтим на ее место запасную исправную (прошло 20 секунд). Если гирлянда не загорелась, значит неисправная лампочка еще в гирлянде, а у нас в руках исправная. Теперь вывинтим вторую лампочку и завинтим на ее место бывшую первую(в сумме прошло 40 секунд). Продолжаем последовательно проверять лампочку за лампочкой. При максимальном невезении нам придется выкрутить и вкрутить девять лампочек, для чего потребуется 180 секунд.

Ответ: 180 секунд.

2. ***Решение***

Будем считать вычеркивание первого, третьего, пятого и т.д. чисел по порядку одним «вычеркиванием». После первого «вычеркивания» останутся только четные числа: 2, 4, 6, 8, … ; После второго «вычеркивания» останутся числа, только кратные $4=2^2$*. Так будет продолжаться и дальше: после очередного «вычеркивания» будут оставаться только числа, кратные степеням двойки(*$8=2^3$*,* $16=2^4$*,…). После десятого вычеркивания останутся числа, кратные* $1024=2^{10}$*. А такое число единственное, т.к.* $1024\cdot 2=2048>2010$.

Ответ: 1024.

3. ***Решение***

Если горячей воды в ванной в $1{,}5$ *раза больше, чем холодной, то горячая вода составляет* $3/5$ *ванны, а холодная—*$2/5$*. Значит, горячая вода должна литься* $3/5\cdot 23=69/5$ *минут, а холодная—* $2/5\cdot 17=34/5$ *минут. Поэтому холодный кран нужно открыть на* $69/5-34/5=7$ *минут позже горячего.*

Ответ: 7 минут.

4. Решение

Пусть Леша живет на этаже с номером Z *в квартире* $9Z-K\ (K\le 8)$*. Тогда Ира живет в квартире* Z *и по условию* $Z+(9Z-K)=329\rightarrow 10Z=329+K$*. Поскольку* $0\le K\le 8$*, а число 329+К должно быть кратно 10, то получаем единственное решение* $K=1, Z=33$*. Поэтому Леша живет в квартире* $9Z-K=296$.

Ответ: 296. Леша живет в квартире №296 на 33-м этаже, а Ира – в квартире №33.

5. Решение

Давайте посмотрим, на сколько можно увеличить каждое число за один, два, три и более ходов. За один ход можно увеличить число на 3, или на 5. За два хода можно увеличить на $6=3+3$*,* $8=3+5$ *или* $10=5+5$*. За три хода можно увеличить число на* $9=3+3+3$*,* $11=3+3+5$*,* $13=3+5+5$ *или* $15=5+5+5$*. Рассуждая аналогичным образом, можно составить таблицу(верхняя строка—добавка, т.е. на сколько увеличивается число, нижняя—число ходов):*

0	3	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	3	2	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5

В этой таблице указано минимальное число ходов, если возможно несколько вариантов(например, увеличить число на 15 можно за 3 и за 5 ходов).

Нам нужно увеличивать числа от 1 до 9 и получить одно и тоже число(назовем его a*) во всех случаях. Значит, мы должны увеличить число 1 на* $a-1$*, число 2 на* $a-2$ *и так далее. Следовательно, нам понадобятся добавки* $a-9$*,* $a-8$*, ...,* $a-1$*. Таким образом нам понадобится добавить 9 идущих подряд чисел. Из таблицы видно что первые 9 подряд идущих добавок идут начиная с числа 8. Значит,* $a\ge 17$*. В каждом случае минимальное число ходов можно получить, сложив соответствующие числа в нижнем ряду. При* $a=17$ *мы получаем* $2+3+2+3+4+3+4+3+4=28$.

Ответ: Надо сделать все числа равными 17, для чего потребуется 28 ходов.

Олимпиада. 7 класс.

1

Числитель дроби увеличили на 20%. На сколько процентов надо уменьшить ее знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое.

2

Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного—за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

3

На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он говорит, лежит ли точка на прямой, а если не лежит, то говорит, по какую сторону от этой прямой лежит невидимая точка. Какое наименьшее число прямых необходимо провести, чтобы узнать, лежит ли невидимая точка внутри квадрата?

4

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске черного и белого королей так, чтобы они не били друг друга(не стояли на соседних клетках)? (Расстановки, при которых черный и белый короли меняются местами, считаются разными).

5.

Найдите последнюю цифру числа 2017^{4207}.

Олимпиада 7 класс. Решение.

1. Решение

Назовем данную дробь a/b. *После увеличения числителя на 20% он станет равным* $1,2a$*; для того, чтобы дробь стала в два раза больше знаменатель должен быть:*

$2\frac{a}{b}=\frac{1,2}{0,6}\frac{a}{b}$*, значит, необходимо уменьшить знаменатель на 40%.*

2. *Решение*

Если горячей воды в ванной в $1,5$ *раза больше, чем холодной, то горячая вода составляет* $3/5$ *ванны, а холодная—* $2/5$. *Значит, горячая вода должна литься* $3/5\cdot 23=69/5$ *минут, а холодная—* $2/5\cdot 17=34/5$ *минут. Поэтому холодный кран нужно открыть на* $69/5-34/5=7$ *минут позже горячего.*

Ответ: 7 минут.

3. Решение

Покажем, что трех прямых достаточно. Первые две прямые проведем по диагоналям квадрата. После этого мы узнаем, в каком из четырех углов, на которые делят плоскость проведенные прямые, лежит точка. Этот угол содержит одну из сторон квадрата. Прямую, содержащую эту сторону, и нужно провести третьей. Тогда мы узнаем, лежит ли отмеченная точка внутри треугольника, образованного проведенными прямыми. Если да, то она лежит внутри квадрата, а если нет—то снаружи.

Ответ: три прямые.

4. Решение

Подсчитаем сначала, сколько всего расположений двух разноцветных королей на шахматной доске. Черного короля можно поставить на 64 свободных клетки, и каждый раз белого короля на 63 оставшиеся клетки. Всего $64\times 63=4032$ *расположения. Посмотрим теперь, в скольких случаях они бьют друг друга. Если черный король стоит на угловых полях a1, a8, h1, h8, то белый король может стоять на трех окаймляющих угловое поле полях. Всего* $3\times 4=12$ *вариантов. Если черный король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей* $6\times 4=24$*), то белый король должен стоять на одном из пяти полей, примыкающих к крайнему полю. Всего таких вариантов* $4\times 5\times 6=120$. *И, наконец, если черный король не соприкасается с краем доски(таких полей* $6\times 6=36$, *то для белого короля—8 возможностей. Всего таких расстановок* $36\times 8=288$. *Таким образом, вариантов, когда два короля не бьют друг друга будет* $4032-12-120-288=3612$.

Ответ: 3612.

5.Решение

Заметим, что 7^4, *а значит и* 2017^4 *оканчивается на 1*

$(2010+7)^4=2010^4+4\cdot 2010^3\cdot 7+6\cdot 2010^2\cdot 7^2+4\cdot 2010\cdot 7^3+7^4$.

Тогда

$$2017^{4207}=2017^{4\times 1051+3}=\left(2010+7\right)^{4\times 1051}\cdot 2017^3=$$

$$=\left(2010^4+4\cdot 2010^3\cdot 7+6\cdot 2010^2\cdot 7^2+4\cdot 2010\cdot 7^3+7^4\right)\cdot 2017^3=.$$

Первые 3 слагаемых в скобках кратны 10, а последняя цифра 7^4 *единица, значит:*

$$=\left(10k+1\right)^{1051}\times 2017^3=\left(10k+1\right)^{1051}\times 8205738913$$

Ответ: 3.

Олимпиада. 8 класс.

1. Известно, что число $a + \frac{1}{a}$ -- целое. Докажите, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ -- тоже целое.

2. Какое максимальное количество 12%-го раствора кислоты можно получить, имея по 1 литру 5%-го, 10%-го и 15%-го раствора.

3.
В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

4.
$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}} = x$$

5.
Двое бросают монету: один бросил ее 10 раз, другой - 11 раз. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

Олимпиада 8 класс. Решение

1.Решение

Доказательство следует из формулы $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2+2+\frac{1}{a^2}$**.**

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2+\frac{1}{a^2}$$

2.Решение

Заметим, что искомый максимум меньше 3 литров, но больше 2 литров. Если слить все растворы, то получится 3 литра 10%-го раствора. Если слить весь 10%-й и весь 15%-й растворы, то получится 2 литра 12,5%-го раствора—более концентрированного, чем нужно. Значит, его нужно разбавить 5%-ным раствором до нужной концентрации и получить более 2 литров 12%-го раствора.

Обозначим через x *количество 5%-го раствора, необходимое для разбавления 12,5%-го раствора. В полученной смеси содержится* $0,05x+0,25$ *литров кислоты. А это должно составлять 12% общего количества полученной смеси, равного* $2+x$.

Получаем уравнение:

$$0,05x+0,25=0,12(2+x)$$

$$0,01=0,07x$$

$$x=\frac{1}{7}.$$

Значит можно получить $2\frac{1}{7}$ *литров необходимого раствора.*

Ответ: $2\frac{1}{7}$ *литров.*

3. Решение

Обозначим стороны треугольника a, b *и* c *так, что высоты, опущенные на стороны* a *и* b, *не меньше этих сторон. Обозначим также* h_a, h_b *и* h_c *высоты, опущенные на стороны* a, b *и* c *соответственно. По условию* $h_a \ge a$, $h_b \ge b$. *Кроме того, поскольку перпендикуляр является кратчайшим расстоянием от точки до прямой,* $h_a \le b$, $h_b \le a$. *Объединяя выписанные неравенства, получаем* $a \le h_a \le b \le h_b \le a$, *откуда очевидно* $a=b=h_a=h_b$.

Условие $a=b$ *означает, что треугольник равнобедренный, а условия* $a=h_a$ *и* $b=h_b$, *что стороны* a *и* b *являются одновременно высотами, то есть они перпендикулярны друг другу. Итак, рассматриваемый треугольник прямоугольный и равнобедренный. Его углы* 90^0, 45^0 *и* 45^0.

Ответ: 90^0, 45^0 *и* 45^0.

4.Решение

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком последнего радикала. Проделав очевидные преобразования, получаем:

$$\sqrt{1+(x+3)(x+5)} = \sqrt{(x+4)^2} = |x+4|$$

Из условия следует, что $x \ge 0$; *поэтому модуль раскроется со знаком плюс и исходное уравнение перепишется в виде*

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}} = x$$

Далее аналогично преобразовываем левую часть. Последовательно получаем:

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}} = x$$

$2\sqrt{1+x(x+2)}=x$

$2(x+1)=x$

$x=-2$, *однако это значение не удовлетворяет условию* $x\geq 0$.
Ответ: решений нет.

5. Решение
Назовем вариант бросания успешным, если у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого; таким же образом, вариант бросания назовем неуспешным, если у второго монета упала орлом не большее число раз, чем у первого. Найти искомую вероятность - значит посчитать долю успешных вариантов среди всех вариантов. Рассмотрим некоторый успешный вариант, в котором у первого выпало k орлов, а у второго m орлов, k<m. Поставим в соответствие этому варианту бросания "противоположный" вариант, в котором все монеты (у обоих людей), выпавшие в исходном варианте орлами, выпадают решками, и наоборот, решки при исходном бросании становятся орлами. Тогда в противоположном варианте у первого выпало 10-k орлов, а у второго 11-m орлов. Нетрудно проверить, что не может выполняться 10-k<11-m при условии k<m (поскольку k и l - целые числа). Поэтому вариант, противоположный удачному, является неудачным. Также проверяется, что вариант, противоположный неудачному, является удачным. Все варианты бросания монет разбиваются на пары противоположных, и в каждой паре ровно один удачный вариант, следовательно, удачные варианты составляют ровно половину всех вариантов.
Ответ: вероятность=0,5.

Олимпиада 9 класс

1

Дан треугольник ABC, длины его сторон a, b и c. A—высот h_a, h_b и h_c. Поставьте верный знак в неравенство: $a+b+c*h_a+h_b+h_c$.

2

Решите уравнение

$$\left(x^2-x-1\right)^2-x^3=5$$

3

Петя вскапывает грядку один на a минут дольше, чем он делает это вместе с Васей. Вася вскапывает ту же грядку на b минут дольше, чем он это сделал бы вместе с Петей. За сколько минут вскапывают ту же грядку Вася и Петя вместе?

4

Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

Признак делимости на 11: *На 11 делятся только те числа, у которых разница между суммой цифр, занимающих нечётные места, и суммой цифр, занимающих чётные места, делится на 11(или равна нулю).*

5

Какое максимальное количество ладей можно расставить в кубе 8x8x8, чтобы они не били друг друга.

Олимпиада 9 класс Решение

1.Решение

Высота является кратчайшим расстоянием от точки, до прямой, тогда ясно, что верны следующие неравенства:

$\left[\begin{array}{l} h_a \le b \\ h_a \le c \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} h_b \le a \\ h_b \le c \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} h_c \le a \\ h_c \le b \end{array}\right.$

Если сложить их все почленно, то получим:

$2\left(h_a+h_b+h_c\right) \le 2\left(a+b+c\right)$, *но т.к. равенство может выполняться не более чем в двух неравенствах (в прямоугольном треугольнике), значит:*

$\left(h_a+h_b+h_c\right) < \left(a+b+c\right)$

2.Решение

Перенесем все члены уравнения $\left(x^2-x-1\right)^2-x^3=5$ *в левую часть:*

$\left(x^2-x-1\right)^2-x^3-5=0 \Rightarrow \left(x^2-x-1\right)^2-4-x^3-1=0$, *учтем, что:*

$\left(x^2-x-1\right)^2-4=\left(x^2-x-3\right)\left(x^2-x+1\right)$

$x^3+1=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

, тогда

$\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-2x-4\right)=0$

Получаем систему уравнений

$\left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0 \\ x^2-2x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Решений нет} \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$

Ответ: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$.

3.Решение

Обозначим через t *мин—искомое время* $\left(t>0\right)$. *Так как за 1 мин, работая вместе ребята вскопают часть грядки, равную* $\dfrac{1}{t+a}+\dfrac{1}{t+b}$, *то*

$t=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t+a}+\dfrac{1}{t+b}}$, *или* $t\left(2t+\left(a+b\right)\right)=t^2+\left(a+b\right)t+ab$. *Значит, нужно найти положительный корень уравнения* $t^2=ab$.

Ответ: $t=\sqrt{ab}$.

4.Решение

Если в десятичной записи числа есть цифра 0 или две одинаковые цифры, то вычеркнув остальные цифры, мы получим число, делящееся на 11. Значит искомое число не более чем девятизначное, и все его цифры различны. Наибольшее из таких чисел 987654321. *Докажем, что оно удовлетворяет условию задачи.*

Пусть после вычеркивания $n\ge 0$ *цифр из числа 987654321 получилось число* $\overline{a_{2k}a_{2k-1}...a_2a_1}$, *в котором* $a_{2k}>a_{2k-1}>...>a_2>a_1$ *(если число цифр в числе нечетно, то припишем в конце нуль, это не изменит делимости на 11). Тогда*

$\left(a_{2k}-a_{2k-1}\right)+\left(a_{2k-2}-a_{2k-3}\right)+...+\left(a_2-a_1\right)>0$ *и* $a_{2k}-\left(a_{2k-1}-a_{2k-2}\right)-...-a_1 \le a_{2k} \le 9$.

Поэтому число $a_{2k}+a_{2k-2}+...+a_2-a_{2k-1}-...-a_1$ *не делится на 11, а значит и число* $\overline{a_{2k}a_{2k-1}...a_2a_1}$ *не делится на 11.*

5. Решение

Очевидно, что в каждом столбике из 8 кубиков-клеток может стоять только одна ладья, поэтому больше 64 ладей поставить нельзя.
Найдем как поставить 64 ладьи, чтобы они не били друг друга. Введем систему координат с осями, направленными вдоль ребер куба так, чтобы каждая клетка имела координатами тройку (x, y, z) *чисел от 0 до 7 и поставим ладьи в клетки, сумма координат которых делится на 8. Эта расстановка является искомой.*
Докажем, что ладьи не бьют друг друга. Предположим противное—какие-то две ладьи бьют друг-друга. Значит, две их координаты совпадают(скажем, x_1 *и* y_1*), а третья различна(* z_1 *и* z_2*). По построению суммы* $x_1+y_1+z_1$ *и* $x_1+y_1+z_2$ *делятся на 8. Значит, их разность* z_1-z_2 *также делится на 8, но это невозможно, так как* z_1 *и* z_2 *различные неотрицательные числа меньшие 8.*
Докажем, что в каждом вертикальном столбике находится по ладье, то есть, что мы поставили 64 ладьи. Каждый такой столбик определяется своей парой координат x *и* y. *Координата* z *однозначно задается условием* $x+y+z\equiv 0 \pmod 8$. *А именно, если* $x+y$ *делится на 8, то* $z=0$*, в противном случае* z *равно 8 минус остаток от деления на 8 суммы* $x+y$.

Олимпиада 10 класс

1

В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

2

Решите уравнение

$$\sin^2\frac{x}{3}+\sin^2\frac{x}{4}+\sin^2\frac{x}{6}=0$$

3

Петя вскапывает грядку один на a минут дольше, чем он делает это вместе с Васей. Вася вскапывает ту же грядку на b минут дольше, чем он это сделал бы вместе с Петей. За сколько минут вскапывают ту же грядку Вася и Петя вместе?

4

Решить уравнение в целых числах.

$$2x^2+5xy+3y^2+5x+8y=7$$

5

На какое максимальное число частей может разбить плоскость 2010 прямых?

Олимпиада 10 класс решение

1. Решение

Обозначим стороны треугольника a, b *и* c *так, что высоты, опущенные на стороны* a *и* b, *не меньше этих сторон. Обозначим также* h_a, h_b *и* h_c *высоты, опущенные на стороны* a, b *и* c *соответственно. По условию* $h_a \ge a$, $h_b \ge b$. *Кроме того, поскольку перпендикуляр является кратчайшим расстоянием от точки до прямой,* $h_a \le b$, $h_b \le a$. *Объединяя выписанные неравенства, получаем* $a \le h_a \le b \le h_b \le a$, *откуда очевидно* $a = b = h_a = h_b$.

Условие $a = b$ *означает, что треугольник равнобедренный, а условия* $a = h_a$ *и* $b = h_b$, *что стороны* a *и* b *являются одновременно высотами, то есть они перпендикулярны друг другу. Итак, рассматриваемый треугольник прямоугольный и равнобедренный. Его углы* 90^0, 45^0 *и* 45^0.

Ответ: 90^0, 45^0 *и* 45^0.

2. Решение

Уравнение эквивалентно системе трех уравнений: $\sin\frac{x}{3} = 0$, $\sin\frac{x}{4} = 0$, $\sin\frac{x}{6} = 0$. *Одновременно должно выполнятся* $x = 3\pi n$, $x = 4\pi k$, $x = 6\pi l$, *где* $n, k, l \in \mathbb{Z}$. *Поэтому ответом будет* $x = 12\pi n$.

3.Решение

Обозначим через t *мин—искомое время* $(t > 0)$. *Так как за 1 мин, работая вместе ребята вскопают часть грядки, равную* $\frac{1}{t+a} + \frac{1}{t+b}$, *то*

$t = \dfrac{1}{\dfrac{1}{t+a} + \dfrac{1}{t+b}}$, *или* $t\left(2t + (a+b)\right) = t^2 + (a+b)t + ab$. *Значит, нужно найти положительный корень уравнения* $t^2 = ab$.

Ответ: $t = \sqrt{ab}$.

4.Решение

Данное уравнение можно привести к виду: $(x+y+3)(2x+3y-1) = 4$, *откуда мы получаем 6 систем.*

$$\begin{cases} x+y+3=4 \\ 2x+3y-1=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+3=2 \\ 2x+3y-1=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y+3=1 \\ 2x+3y-1=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+3=-4 \\ 2x+3y-1=-1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+3=-2 \\ 2x+3y-1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x+y+3=-1 \\ 2x+3y-1=-4 \end{cases}$$

Ответ: $(1;0)$, $(-6;5)$, $(-11;9)$, $(-27;20)$, $(-8;5)$, $(-9;5)$.

5.Решение

Докажем по индукции следующее утверждение:

Максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость n *прямых, равно* $1 + n(n+1)/2$ *и достигается, когда прямые находятся в общем положении(пересекаются в максимальном числе точек).*

При $n = 1$ *прямая разбивает плоскость на* $1 + (1+1)/2 = 2$ *части, что очевидно.*

Предположим, что утверждение верно при $n = k$.

Рассмотрим какие-то k *прямых и проведем еще одну прямую. Тогда, если она пересекла прямые в* s *различных точках, то добавится еще* $s+1$ *область. Видно, что максимальное число*

областей будет, если прямые будут в общем положении. Тогда число областей будет равно $1+k(k+1)/2+1+k=1+(k+1)(k+2)/2$*, что и требовалось доказать. Для* $n=2010$ *получаем ответ: на* 2021056 *частей.*
Ответ: 2021056.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИЗИКЕ
7 класс

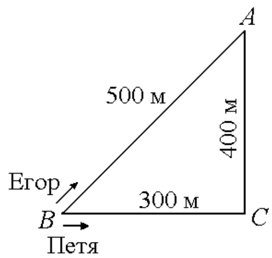
7.1. Автомобиль все время ехал по прямой. Несколько часов он двигался с постоянной скоростью 40 км/ч, затем 1 ч простоял в пробке, после чего еще 2 ч продолжал движение со скоростью 60 км/ч и прибыл в пункт назначения. Найти среднюю скорость автомобиля за все время путешествия. Найти среднюю скорость за последние 2,5 ч движения.

Решение. Можно ввести время движения со скоростью 40 км/ч, составить уравнение и получить ответ (это время сократится), но можно проще: за последние 3 ч автомобиль проехал 120 км, т.е. средняя скорость за последние 3 ч тоже 40 км/ч. Итак, средняя скорость на всем пути 40 км/ч. За последние 2,5 ч скорость 120/2,5 = 48 км/ч.

7.2. Статуэтка победителя олимпиады по физике отлита из золота и алюминия – голова сделана из золота (плотность 19,3 г/см^3), ее объем составляет 2/3 общего объема статуэтки, остальное – из алюминия (плотность 2,7 г/см^3). Утонет ли статуэтка в озере из жидкой ртути (плотность 13,6 г/см^2)?

Решение. Подсчитаем среднюю плотность и сравним с плотностью ртути: 19,3·2/3 + +2,7·1/3 = 13,77 (г/см^3). Это больше 13,6 г/см^3, поэтому утонет.

7.3. Два друга — Егор и Петя — устроили гонки на велосипедах вокруг квартала в дачном посёлке (см. рисунок). Стартовав одновременно из точки B в разные стороны (Егор — вдоль улицы BA, Петя — вдоль улиц BC и CA), друзья встретились через 4 мин в точке A и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после этой встречи они снова окажутся вместе в точке A?

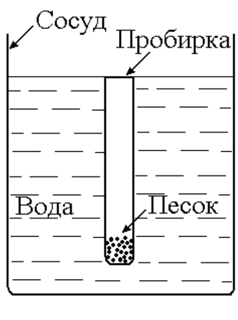


Решение. Скорость Егора $\upsilon_{\text{Е}}=\dfrac{500}{4}$ м/мин, скорость Пети $\upsilon_{\Pi}=\dfrac{700}{4}$ м/мин. Пусть через время t они встретились в точке A. Тогда Егор должен был за это время пройти путь s = = (300 + 400 + 500) = 1200 м целое число раз, Петя тоже должен был за это время пройти путь s = 1200 м целое число раз (но иное, чем Егор). Тогда

$$\begin{matrix}\upsilon_{\text{Е}}t=ns,\\ \upsilon_{\Pi}t=ms\end{matrix}\ \Rightarrow\frac{\upsilon_{\text{Е}}}{\upsilon_{\Pi}}=\frac{n}{m}=\frac{500/4}{700/4}=\frac{5}{7}.$$

Значит, n = 5 и m = 7 $\Rightarrow\dfrac{ns}{\upsilon_{\text{Е}}}=\dfrac{5\cdot1200\text{м}}{(500/4)\,\text{м/мин}}=48$ мин.

7.4. У школьника Андрея есть стеклянная пробирка массой M = 80 г и вместительностью V = 60 мл. Он опустил пробирку в цилиндрический сосуд с водой и постепенно насыпал на дно пробирки песок до тех пор, пока она не погрузилась в воду по горлышко (см. рисунок). Затем Андрей измерил массу песка, находившегося в пробирке в этот момент, и она оказалась равной m = 12 г. Внутренний радиус сосуда, в который опущена пробирка, равен R = 5 см. Плотность



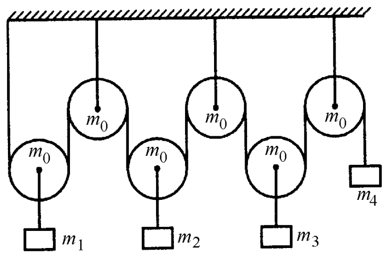
воды равна $\rho_а$ = 1 г/см^3. Определите по этим данным плотность стекла пробирки и вычислите, на сколько поднялся уровень воды в сосуде в результате погружения пробирки в воду.

Решение. Условие равновесия пробирки $F_т = F_А \Rightarrow (M + m)g = m_{выт.воды}g$; $m_{выт.воды} =$ $= \rho_в(V + V_{стекла}) \Rightarrow (M + m)g = \rho_в g(V + V_{стекла}) \Rightarrow V_{стекла} = \dfrac{M+m}{\rho_в} - V = \dfrac{M+m-\rho_в V}{\rho_в}$.

$$\rho_{ст} = \frac{M}{V_{стекла}} = \frac{M\rho_в}{M+m-\rho_в V} = \frac{80\cdot 1}{80+12-60\cdot 1} = 2{,}5\ \text{г/см}^3;$$

$$V_{выт} = \frac{M+m}{\rho_в} = \pi R^2\Delta h \Rightarrow \ \Delta h = \frac{M+m}{\rho_в \pi R^2} = \frac{80+12}{1\cdot 3{,}14\cdot 5^2} \approx 1{,}17\,\text{см}.$$

7.5. В системе, изображённой на рисунке, масса самого правого груза равна m_4 = 1 кг, а массы всех блоков одинаковы и равны m_0 = 300 г. Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов m_1, m_2 и m_3. Массой троса и трением в блоках пренебречь.



Решение. Пусть T – сила тяжести нити, тогда $T = m_4 g$, $2T = m_1 g + m_0 g \Rightarrow 2m_4 = m_1 + m_0 \ \Rightarrow m_1 = 2m_4 - m_0 = 2\cdot 1 - 0{,}3 =$ 1,7 м.

Ответ: $m_1 = m_2 = m_3 = 2m_4 - m_0 = 2\cdot 1 - 0{,}3 = 1{,}7$ м.

8 класс

8.1. Ученик измерил плотность деревянного бруска, покрытого краской, и она оказалась равной p = 600 кг/м^3. Но на самом деле брусок состоит из двух частей, равных по массе, плотность одной из которых в два раза больше плотности другой. Найдите плотности обеих частей бруска. Массой краски можно пренебречь.

Решение. Пусть m – масса каждой из частей бруска, ρ_1 и $\rho_2 = \rho_1/2$ — их плотности. Тогда части бруска имеют объёмы m/ρ_1 и $2m/\rho_1$, а весь брусок массу $2m$ и объём $3m/\rho_1$. Средняя плотность бруска $\rho = \dfrac{2m}{3m/\rho_1} = \dfrac{2\rho_1}{3}$. Отсюда находим плотности частей бруска: ρ_1 $= 3\rho/2 = = 900$ кг/м^3, $\rho_2 = 3\rho/4 = 450$ кг/м^3.

8.2. Автомобиль едет все время по прямой, его скорость за первый час была 40 км/ч. В течение второго часа он «прибавил» и ехал равномерно, и средняя скорость за первые два часа составила 60 км/ч. Потом он снова прибавил скорости, и средняя скорость за первые три часа оказалась 70 км/ч. Найти среднюю скорость движения на первой и второй половинах пути.

Решение. Легко сообразить, что 1 ч скорость была 40 км/ч, затем 1 ч скорость 80 км/ч, третий час – скорость 90 км/ч. Половина пути 105 км. Средняя скорость на первой половине υ_1 = (40+65)/(l + 65/80) = 58 км/ч. Средняя скорость на второй половине υ_2 = (105)/(15/80 +1) = = 88,4 км/ч.

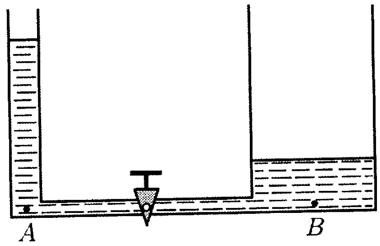
8.3. По прямой реке с постоянной скоростью u = 5 м/с плывёт баржа длиной L = 100 м. На корме баржи стоит матрос. Он начинает ходить по барже от кормы к носу и обратно.

Вперёд он идет с постоянной относительно баржи скоростью υ_1 = 1 м/с, а назад с постоянной относительно баржи скоростью υ_2 = 2 м/с. Какой путь пройдёт матрос относительно берега реки, если пройдёт по барже туда и обратно n = 10 раз.

Решение. $t_1 = \dfrac{L}{\upsilon_1}$; $t_2 = \dfrac{L}{\upsilon_2}$; $l_1 = (u + \upsilon_1)t_1$; $l_2 = (u + \upsilon_2)t_2$;

$$s = n\{l_1 + l_2\} = n\left\{(u+\upsilon_1)\frac{L}{\upsilon_1} + (u-\upsilon_2)\frac{L}{\upsilon_2}\right\} = nuL\left(\frac{1}{\upsilon_1}+\frac{1}{\upsilon_2}\right) = 10\cdot 5\cdot 100\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) = 7500\,\text{м}.$$

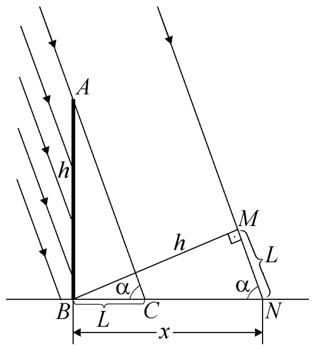
8.4. В сосуды, соединённые трубкой с краном, налита вода (см. рисунок). Гидростатическое давление в точках A и B равно p_A = 4 кПа и p_B = 1 кПа соответственно, площади поперечного сечения левого и правого сосудов составляют S_A = 3 дм^2 и S_B = 6 дм^2 соответственно. Какое гидростатическое давление установится в точках A и B, если открыть кран?



Решение. До открытия крана масса воды в левом сосуде равна p_AS_A/g, в правом сосуде p_BS_B/g. После открытия крана в точках A и B устанавливается одинаковое гидростатическое давление p, поэтому суммарная масса воды в сосудах равна $p(S_A + S_B)/g$. Поскольку масса воды сохраняется, то $p_AS_A + p_BS_B = p(S_A + S_B)$. Таким образом,

$$p = \frac{p_AS_A + p_BS_B}{S_A + S_B} = 2\ \text{кПа}.$$

8.5. Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту h = 1,2 м и отбрасывает тень длиной L = 0,9 м. Палку начинают медленно наклонять в направлении отбрасываемой ею тени так, что её нижний конец не сдвигается с места. Длина тени при этом до определённого момента увеличивается, а потом начинает уменьшаться. Чему была равна максимальная длина тени от палки?



Решение. Тень будет максимальной, когда луч будет перпендикулярен к палке, т.е. будет направлен по касательной к окружности, образуемой палкой BA при ее вращении около точки B (см. рис.). $\Delta ABC = \Delta BMN$ (по катету $AB = BM$ и острому углу α), тогда $BC = MN = L$. Из ΔBMN $x = BN$ – гипотенуза, $x^2 = BM^2 + +MN^2 = L^2 + h^2 \rightarrow x = \sqrt{L^2 + h^2}$ = 1,5 м.

Ответ: x = $\sqrt{L^2 + h^2}$ = 1,5 м.

9 класс

9.1. Два экскурсионных автобуса со школьниками должны были отправиться из Москвы в Санкт-Петербург, но один из автобусов задержался с отправлением. Когда задержавшийся автобус выехал, первый автобус находился на расстоянии s = 20 км от места отправления. За время, за которое задержавшийся автобус проехал s = 20 км, первый автобус проехал s_1 = =16 км. На прохождение расстояния Δs = 1 км второй автобус затрачивает на Δt = 12 с меньше, чем первый. На каком расстоянии L от места отправления второй автобус догонит первый? Чему равны скорости автобусов υ_1 и υ_2? Считайте, что пробок на дороге нет, и скорости автобусов не меняются.

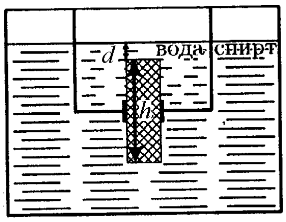
Решение. За одно и то же время первый и второй автобусы проехали расстояния s_1 и s, следовательно, отношение их скоростей $\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s} = 0{,}8$. Перейдем к ответам на вопросы задачи. Когда второй автобус пройдёт расстояние L, первый пройдёт расстояние, равное $L - s$, то есть $\frac{L}{v_2} = \frac{L - s}{v_1}$. С учётом найденного выше отношения скоростей получаем:

$$L = \frac{s}{1 - (v_1 / v_2)} = \frac{s^2}{s - s_1} = 100 \text{ км}.$$

По условию $\Delta t = \Delta s\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = \frac{\Delta s}{v_1}\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) = \frac{\Delta s}{v_1}\left(1 - \frac{s_1}{s}\right)$.

Отсюда $v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(1 - \frac{s_1}{s}\right) = 60$ км/ч, $v_2 = v_1 \frac{s_1}{s} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(\frac{s_1}{s} - 1\right) = 75$ км/ч.

9.2. Малый сосуд удерживают внутри большого так, как показано на рисунке. В дне малого сосуда есть отверстие с втулкой, в которое вставлен цилиндр. Высота цилиндра h = 21 см, он может перемещаться относительно втулки без трения и только по вертикали. В малом сосуде находится вода, в большом – спирт, и при этом цилиндр покоится. На какой глубине d под водой находится верхнее основание цилиндра? Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, плотность спирта $\rho_с$ = 790 кг/м^3, плотность цилиндра ρ = 600 кг/м^3.

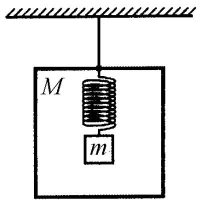


Решение. Давление, создаваемое слоем воды над цилиндром и самим цилиндром, равно давлению спирта на нижнее основание цилиндра:

$$\rho_в g d + \rho g h = \rho_с g(h + d) \Rightarrow d(\rho_в - \rho_с) = h(\rho_с - \rho) \Rightarrow d = h\frac{\rho_с - \rho}{\rho_в - \rho_с} = 19 \text{ см}.$$

Ответ: $d = h\frac{\rho_с - \rho}{\rho_в - \rho_с}$ = 19 см.

9.3. Коробка массой M подвешена на нитке к потолку комнаты (см. рисунок). Внутри коробки на лёгкой пружине подвешен груз массой m. Нитку пережигают. Найдите ускорения груза и коробки сразу после пережигания нити. Ускорение свободного падения равно g.

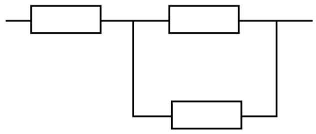


Решение. До пережигания нити на груз массой m действовали направленная вниз сила тяжести mg и равная ей по величине и противоположная по направлению сила упругости пружины F. На коробку действовали направленная вниз сила упругости пружины F и сила тяжести Mg, а также направленная вверх сила натяжения нити $T = F + Mg$.

Сразу после пережигания нити сила её натяжения обратится в ноль, а остальные силы, действующие на груз и коробку, останутся прежними. По этой причине ускорение груза сразу после пережигания нити будет равно нулю. На коробку же будут действовать только силы тяжести и упругости, поэтому ускорение коробки будет равно $a = \frac{F + Mg}{M} = \frac{m + M}{M} g$.

9.4. С поверхности земли вертикально вверх бросают камень. Упав на землю, он «втыкается» в нее и мгновенно останавливается. Какой может быть начальная скорость этого камня, чтобы за четвертую секунду после броска его смещение было равно нулю? Ускорение свободного падения принять 10 м/с^2.

Решение. Либо движение закончилось до начала четвертой секунды (т.е. продолжалось меньше трех секунд). В этом случае (принимая g = 10 м/с^2) начальная скорость υ < 15 м/с. Либо верхняя точка полета пришлась точно на середину четвертой секунды, т.е. начальная скорость была «погашена» за 3,5 с. В этом случае начальная скорость υ = 35 м/с.



9.5. Резисторы 200 Ом и 500 Ом соединены параллельно, последовательно с этой цепочкой включили резистор 100 Ом. К выводам получившейся последовательно-параллельной схемы несколько раз подключали разные батарейки. Полный заряд, протекший через резистор 500 Ом оказался равным 0,5 Кл. Полное количество тепла, выделившееся в резисторе 200 Ом, равно 10 Дж. Какой полный заряд протек через резистор 100 Ом? Сколько тепла выделилось в резисторе 100 Ом?

Решение. Ток через резистор 200 Ом в любой момент в 2,5 раза больше тока через 500 Ом, суммарный ток через 100 Ом в любой момент в 3,5 раза больше тока через 500 Ом. Тогда заряд, протекший через 100 Ом, равен 0,5 · 3,5 = 1,75 Кл. Суммарный ток через резистор 100 Ом в любой момент больше тока через 200 Ом ровно в 1,4 раза. Тогда в нем выделилось почти столько же тепла, точнее: $10 \cdot 1{,}4^2 \cdot 100/200 = 9{,}8$ Дж.

10 класс

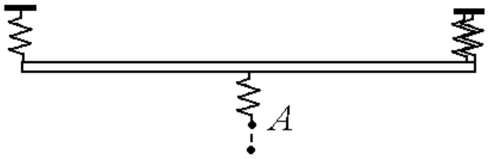
10.1. На плоской поверхности нарисован квадрат, длина стороны квадрата 10 м. Вдоль сторон этого квадрата должен пробежать маленький жучок - его мгновенное ускорение не должно превышать ни в какой момент величины 1 см/с^2. За какое минимальное время он сможет это сделать?

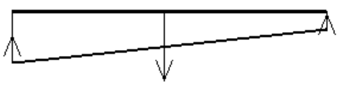
Решение. Если ускорение ограничено, то поворот может происходить только при нулевой скорости. Если принять начальную скорость за ноль, то первый отрезок нужно проходить так: двигаться с максимальным ускорением до середины отрезка, а затем тормозить с максимальным ускорением. Тогда первый отрезок будет пройден за время $\tau_1 = 2(L/a)^{0,5}$ = 63,25 с. Если проходить все четыре стороны так же, как и первую, понадобится $4\tau_1$ = 253 с. Однако в условии ничего не сказано про начальную (и конечную!) скорости, этим можно воспользоваться для ускорения процесса – не тормозить на последнем отрезке и заранее разогнаться до начала первого (до такой скорости, чтобы успеть затормозить к концу первого отрезка). При этом первый и последний отрезки можно пройти за время $\tau_2 = (2L/a)^{0,5}$ = 44,7 с и весь квадрат за время $2\tau_1 + 2\tau_2$ = 216 с. Возможны и промежуточные варианты типа $3\tau_1 + \tau_2$ = 235 с. На вопросы нужно отвечать аккуратно: «В условии это не указано!», решение без хитростей ($4\tau_1$) следует оценивать в 4 балла из 5.

10.2. Если сбросить массивное тело с большой высоты, то из-за сопротивления воздуха оно большую часть пути будет двигаться с постоянной, установившейся скоростью. Для пластмассового биллиардного шара эта скорость составляет 100 м/с. Если его сделать из материала с вдвое большей плотностью, то при тех же размерах его скорость увеличится до 140 м/с. Если взять шар из того же материала, что и биллиардный шар, но вдвое большего диаметра, то скорость установившегося движения также составит 140 м/с. Какой станет эта скорость для шара из того же материала, но в 10 раз меньшего диаметра?

Решение. Данные задачи позволяют определить зависимость силы сопротивления от скорости и поперечной площади падающего тела. Подходит модель $F = kS\upsilon^2$. При уменьшении диаметра тела в 10 раз его масса уменьшилась в 1000 раз площадь поперечного сечения стала меньше в 100 раз. При сохранении зависимости сила сопротивления уравновесит силу тяжести при скорости в $\sqrt{10}$ раз меньшей, т.е. установившаяся скорость падения составит около 32 м/с.

10.3. На гладком горизонтальном столе лежит очень жесткий тонкий стержень длиной 1 м. Четыре одинаковые пружинки прикреплены к стержню: одна к левому краю, две – к правому и одна – к середине. В начальный момент все пружинки перпендикулярны стержню и натянуты, но силы натяжения очень малы. Удлиним «серединную» пружинку, сдвинув точку A (конец этой пружинки) вдоль направления пружинки на 1 см. Найти натяжения каждой из пружинок в растянутом состоянии. Жесткость пружинки 110 Н/см.



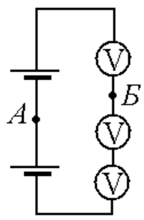


Решение. Стержень немного «перекосится», смещения его концов будут неодинаковыми. Правый конец сместится на вдвое меньшую величину d (две пружины, такая же сила – моменты этих сил относительно середины стержня одинаковы), левый конец сместится на $2d$, смещение середины стержня $1{,}5d$. Удлинения пружин: левой $2d$, правых – каждой d, средней (1 см – $1{,}5d$). Из условия равновесия сил: $k \cdot 2d + 2kd = k(1 - 1{,}5d)$, отсюда $d = (2/11)$ см. Тогда натяжения пружин 40 Н, 20 Н, 20 Н, 80 Н.

10.4. Моль гелия (одноатомный газ) вначале изотермически расширяется, при этом он получает в виде тепла 1620 Дж, затем его охлаждают при неизменном объеме, отняв у него 1000 Дж в виде тепла. После этого газ адиабатически сжимают до начального состояния. Найти термодинамический КПД этого цикла.

Решение. Совсем простая задача. От нагревателя за цикл получено 1620 Дж, холодильнику отдано 1000 Дж. Работа в цикле 620 Дж. Термодинамический КПД = 620/1620 = 31/81. Примерно 38%.

10.5. В схеме на рисунке батарейки одинаковые, их напряжения – по 3 В. Вольтметры взяты тоже одинаковые, сопротивление каждого вольтметра 1 кОм. Какой резистор нужно включить между точками A и $Б$, чтобы ток через этот резистор составлял ровно 1 мА? Какими при этом будут показания вольтметров?



Решение. Если показания одного из «нижних» вольтметров V, то второй покажет столько же, верхний покажет $(6 - 2V)$. Обозначим сопротивление вольтметра R, тогда ток 1 мА равен разности токов правой ветви: $I_0 = (6 - 2V)/R - V/R$. Отсюда $V = 5/3$ В. Показания вольтметров: V, V и $(6 - 2V) = 8/3$ В.

Сопротивление r: $rI_0 = 2V - 3 = 1/3$ В. Сопротивление резистора $r = 1/3$ кОм.