**ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**

**2022/23 учебный год**

**4 класс**

**1.** Чему равно произведение двух чисел, если оно больше одного из них в 20 раз и больше другого в 5 раз?

*Решение*. 

*Ответ*: 100.

**2.** Часы со стрелками отстают на 6 минут каждый день. Через сколько дней они будут показывать опять верное время?

*Решение*. Часовая стрелка станет на старое место, когда отстанет на 12 часов (на циферблате 12 часовых  делений). В 1 часе 60 минут, а в 12 часах 720 минут, следовательно, сколько раз 6 частей содержится в 720, через столько дней часовая стрелка вернётся на старое место, т.е. 720 : 6 = 120 (дн.).

*Ответ*: через 120 дней.

**3.** Деревянный кубик с ребром 4 см окрасили в синий цвет, а затем распилили на одинаковые кубики с ребром 1 см. Сколько получилось маленьких кубиков только с одной синей гранью?

*Решение*. В каждой грани куба таких кубиков только 4, т.е. те, которые находятся в середине (см. рис.) Так как всего граней 6, то таких маленьких кубиков будет 4 ⋅ 6 = 24.

*Ответ*: 24.

**4.** В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет, а зовут их Таня, Юра, Света и Лена. Сколько каждому из них лет, если одна девочка ходит в детский сад, Таня старше, чем Юра, а сумма лет Тани и Светы делится на 3.

*Ответ*: Свете – 5 лет, Юре – 8 лет, Тане – 13 лет, Лене – 15 лет.

**5.** До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь явиться им ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».

Алёша Попович: «Я змея убил».

Известно, что только один богатырь сказал правду, а два слукавили Кто убил змея?

*Решение*. Если два человека говорят одно и то же, то либо оба они говорят правду, либо оба лукавят. Добрыня и Алёша сказали одно и то же, значит, оба они слукавили.

*Ответ*: Добрыня убил змея.

**5 класс**

**1.** Найдите пятизначное число, каждая последующая цифра которого на единицу больше предыдущей, а сумма цифр равна 30.

*Ответ*: 45678.

**2.** Длина ребра куба полметра. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из них равна 2 мм. Кубики затем уложили в один сплошной ряд. Чему равна длина ряда?

*Указание*. 250⋅250⋅250.

*Ответ*: 15 км 625 м.

**3.** Серёже 11 лет, Вове 1 год. Сколько лет будет Серёже, когда он станет втрое старше Вовы?

*Решение*. Пусть через *х* лет Серёже будет втрое больше лет, чем Вове, тогда (11 + *х*) = 3(*х* + 1), 11 – 3 = 2*х*, *х* = 4. Значит, Серёже будет 15 лет.

*Ответ*: 15 лет.

**4.** Два верблюда и восемь баранов стоят 18 таньга. Пять вер­блюдов и два барана стоят 27 таньга. Сколько стоит отдельно верб­люд и баран?

*Решение*. Если 2 верблюда и 8 баранов стоят 18 таньга, то верблюд и 4 барана стоят 9 таньга. По условию 5 вер­блюдов и 2 барана стоят 27 таньга. Значит, 6 верблюдов и 6 баранов стоят 27 + 9 = 36 (таньга). Следовательно, 1 верблюд и 1 баран стоят 36 : 6 = 6 (таньга).

Сопоставим стоимости.

Ести 1 верблюд и 4 барана стоят 9 таньга, а 1 верблюд и 1 баран стоят 6 таньга, то 4 – 1 = 3 (барана) стоят 9 – 6 = 3 (таньга). Значит, 1 баран стоит 1 таньга, в 1 верблюд 6 – 1 = 5 (таньга).

*Ответ*: баран стоит 1 таньга, в верблюд – 5 таньга.

**5.** Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама – за 2, малыш – за 5, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

*Решение*.Как только вы освободитесь от догмы, что фонарик обратно должен носить самый быстрый, то есть папа, и станете рассматривать другие варианты, то скоро догадаетесь, что надо пустить вместе бабушку и малыша. Теперь решение уже не очень сложно найти. Итак:

сначала мама с папой – 2 минуты,

папа обратно с фонариком – 1 минута,

бабушка с малышом – 10 минут,

мама обратно с фонариком – 2 минуты

мама с папой – 2 минуты.

Итого 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 минут.

*Ответ*: 17 минут.

**6 класс**

**1.** *Последовательные числа.* Ряд чисел назовём последовательными числами, если каждое следующее число больше предыдущего на 1. Например: 16, 17, 18…

Миша сложил три последовательных числа и получил 2016. Укажите эти числа.

*Решение*. *п* – 1 + *п* + *п* + 1 = 3*п* = 2016, *п* = 672, т.е. *п* – 1 = 671, *п* + 1 + 673.

*Ответ*: 671, 672, 673.

**2.** Назовите двузначное число, которое в 5 раз больше суммы своих цифр.

*Решение*. 10*х* + *у* = 5(*х + у*) → 5*х* = 4*у* → *х* = 4, *у* = 5. Тогда: 4 + 5 = 9, 5 ⋅ 9 = 45.

*Ответ*: 45.

****

**3.** Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рис.). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.

*Решение***.** Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначив сторону самого большого квадрата через *х*, последовательно выразим стороны других квадратов: *х* – 1, *х* – 2, *х* – 3 (см. рис.). Теперь заметим, что длина верхней стороны прямоугольника равна *х* + (*х* –1), а длина нижней равна (*х* – 2) + (*х* – 3) + (*х* – 3). Но ведь противоположные стороны прямоугольника равны. Получаем уравнение:

*х* + (*х* –1) = (*х* – 2) + (*х* – 3) + (*х* – 3).

Отсюда 2*х* – 1 = 3*х* – 8; 3*х* – 2*х*=-1+8 и, значит, *х* = 7.

*Ответ*: 7.

**4.** После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть от полученного уровня понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

*Решение*. Поскольку половина персиков составляет 1/3 от всего компота, то половина от оставшихся персиков составляет 1/6 часть от всего компота. 1/6 : 2/3 = 1/4.

*Ответ*: ¼.

**5.** На острове всего два города, в одном живут рыцари, в другом – лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Встретились три человека. *А* говорит: «*В* лжец». *В* говорит: «*А* и *С* из одного города». Кто такой *С*?

*Решение.* Всего возможны 8 вариантов ответа, изобразим их в виде таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | *А* | *В* | *С* |
| 1 | Р | Р | Р |
| 2 | Р | Р | Л |
| 3 | Р | Л | Р |
| 4 | Р | Л | Л |
| 5 | Л | Л | Л |
| 6 | Л | Л | Р |
| 7 | Л | Р | Л |
| 8 | Л | Р | Р |

Пусть *А* – лжец, тогда *В* – рыцарь, значит, *С* – лжец. *А* и *С* – из одного города. Нет противоречий (вариант № 7). *С* – лжец.

Пусть *А* – рыцарь, тогда *В* – лжец. Значит, *А* и *С* – из разных городов, т.е. *С* – лжец (вариант № 4).

*Ответ*: *С* – лжец.

**7 класс**

**1.** Найдите двузначное число, которое в 7 раз больше, чем число его единиц.

*Решение*. 10*х* + *у* = 7*у* → 10*х* = 6*у* → 5*х* = 3*у, х =* 3, *у* = 5.

*Ответ*: 35.

**2.** Некто сказал: «Когда я проживу ещё половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет». Сколько ему лет?

*Решение*. , *х* = 48.

*Ответ*: 48 лет.

**3.** Число 51,2 трижды увеличивается на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшается на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов сначала увеличивали, а потом уменьшали число?

*Решение*. 51,2⋅(1 + *х*)3(1 – *х*)3 = 21,6 →  или 50 %.

*Ответ*: на 50 %.

**4.** Трое жителей острова рыцарей и лжецов разговаривали между собой. Путешественник спросил у *А*: «Вы рыцарь или лжец?». Тот пробурчал что-то непонятное. Тут вмешался *В*: «Он сказал, что он лжец!». «Не верьте *В*, он лжец!» – воскликнул *С*. Кто есть кто?

*Указание*. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут.

*Решение***.** Ни рыцарь, ни лжец не могут сказать: «Я лжец». Значит, *В* – лжец, а *С* – рыцарь. Кто такой *А* – узнать невозможно.

*Ответ*: *В* – лжец, *С* – рыцарь. Кто такой *А* – узнать невозможно.

**5.** Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причем Катя выпила 1/4 всего молока и 1/6 всего кофе. Сколько человек в семье?

*Решение.* Пусть *п* – число чашек (число человек в семье), а *х* – количество выпитого молока (в чашках). Тогда количество выпитого кофе равно *п* – *х*. Катя выпила одну чашку кофе с молоком, которая состояла из четверти всего молока (*х*/4) и одной шестой всего кофе ((*п* – *х*)/6). Получаем:

 3*х* + 2(*п – х*) = 12 → *х* + 2*п* = 12.

Так как *п* – целое число, то из последнего равенства следует, что *х* – целое число, причём чётное (*х* = 12 – 2*п*). Кроме того, *х* ≤ *п*, так как количество выпитого молока, конечно, не больше, чем общее количество напитка. Теперь небольшим перебором находим, что последнее уравнение имеет три решения: *п* = 6, *х* = 0; *п* = 5, *х* = 2; *п* = 4, *х* = 4. При этом первое и последнее решения отвечают случаю, когда все пили просто молоко или просто кофе, а второе – когда пили действительно кофе с молоком.

*Ответ*: 5 человек.

**8 класс**

**1.** К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы оно получилось кратным 72.

*Решение*. 72 = 9⋅8. Сумму цифр делим на 9, число, состоящее из последних трёх цифр, делим на 8.

*Ответ*: 4104.

**2.** Каких чисел больше: пятизначных, все цифры которых чётные, или пятизначных, все цифры которых нечётные (цифры повторяются)?

*Решение*. Если все цифры чётные, то таких чисел 4⋅5⋅5⋅5⋅5. Если все цифры нечётные, то 5⋅5⋅5⋅5⋅5. Тогда 4⋅5⋅5⋅5⋅5 > 5⋅5⋅5⋅5⋅5.

*Ответ*: больше тех, у которых все цифры нечётные.

**3.** Найдите наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 33.

*Решение*. Число должно содержать чётное число единиц и иметь сумму цифр, делящуюся на 3. Наименьшее точное число 111 111.

*Ответ*: 111 111.

**4.** Один из попугаев *А, В, С* всегда говорит правду (т.е. рыцарь), другой всегда врёт (т.е. лжец), а третий – хитрец (иногда говорит правду, иногда врёт). На вопрос «Кто *В*?» они ответили:

*А*: «Лжец»,

*В*: « Я хитрец»,

*С*: «Абсолютно честный попугай».

Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

*Решение*. *В* – либо лжец, либо хитрец.

1. Допустим, что *В* – хитрец, *А* – лжец, тогда *С* – рыцарь, но он говорит неправду – противоречие.

2. Допустим, что *В* – хитрец, *А* – рыцарь, тогда *В*– лжец – противоречие, значит, *В* – не хитрец.

3. Допустим, что *В* – лжец, тогда *А* – рыцарь, *С* – хитрец. Всё сходится.

*Ответ*: *В* – лжец, *А* – рыцарь, *С* – хитрец.

**5.** Решите уравнение: 2*х*2 + 5*у*2 – 4*ху* – 2*у* – 4*х* + 5 = 0.

*Решение*. Преобразуем левую часть данного уравнения:

(*х*2 – 4*ху* + 4*у*2) + (*х*2 – 4*х* + 4) + (*у*2 – 2*у* + 1) = 0 →

(*х* – 2*у*)2 + (*х* – 2)2 + (*у* – 1)2 = 0.

Так как сумма квадратов может быть равной 0, только если каждый из них равен 0, то одновременно выполняются равенства (*х* – 2)2 = 0, (*у* – 1)2 = 0, (*х* – 2*у*)2 = 0, откуда *х* = 2, *у* = 1 и *х* = 2*у*. Заметим, что последнее равенство при найденных значениях *х* и *у* верно.

*Ответ*: *х* = 2, *у* = 1.

**9 класс**

**1.** Произведение четырёх последовательных натуральных чисел равно 3024. Найдите эти числа.

*Указание.* 3024 = 24⋅33⋅7.

*Ответ*: 6⋅7⋅8⋅9 = 3024.

**2.** Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которые делятся на 2, 5, 9, 11.

*Решение*. У чисел 2, 5, 9 и 11 нет общих делителей, поэтому если число делится на каждое из них, то оно делится на их произведение. То есть искомое число делится на 2⋅5⋅9⋅11 = 990. Выпишем все четырёхзначные числа, которые делятся на 990: 1980, 2970, 3960, 4650, 5940, 6930, 7920, 8910, 9900. Наибольшее из них равно 9900, но у него есть совпадающие цифры. А наибольшее из них должно иметь разные цифры – это 8910.

*Ответ*: 8910.

**3.** В Банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90 % не любят мандарины (остальные любят). Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46 % граждан Банановой республики любят мандарины.

*Решение*. Пусть всё население республики *N* человек, и пусть из них за «Мандарин» проголосовало *М* человек. Тогда, с одной стороны, мандарины любят 0,46⋅*N* человек, а с другой – это число равно числу проголосовавших за «Мандарин» (т.е. М) плюс 10 % оставшихся (т.е. 0,1⋅(*N – M*)). Получаем уравнение:

*М* + 0,1(*N – M*) = 0,46*N* → *М* + 0,1*N –* 0,1*M* = 0,46*N* → 0,9*М* = 0,36*N*,

откуда . Таким образом, за партию «Мандарин» проголосовало 40 % населения республики.

*Ответ*: 40 %.

**4.** На острове всего два города, в одном живут рыцари, в другом – лжецы. Встретились три человека *А*, *В* и *С*. *А* говорит: «*В* лжец». *В* говорит: «*А* и *С* из одного города». *С* говорит: «*А* рыцарь». Кто есть кто?

*Решение.*

1. Пусть *А* – рыцарь, тогда *В* – лжец, значит *А* и *С* НЕ из одного города, т.е. *С* – лжец. *С* говорил, что А – рыцарь, т.е. правду. Это невозможно, так как С – лжец. Противоречие!
2. Пусть *А* – лжец, тогда *В* – рыцарь, значит, *С* – лжец. Но тогда *А* и *В* из одного города, т.е. *В* – лжец. Все верно!

*Ответ*: *А* и *С* – лжецы, *В* – рыцарь.

**5.** Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину всех своих монет, затем снова первый проиграл половину своих монет. Проигрыш они каждый раз отдавали сопернику. В результате у первого пирата оказалось 15 монет, а у второго – 33. Сколько монет было в начале игры у первого пирата?

*Решение.* Попробуем проследить ''с конца'', сколько у какого пирата было монет после каждой игры. В последней игре первый проиграл второму половину своих монет, после чего у него осталось 15 монет. Но это ровно столько, сколько он только что отдал второму! Значит, перед этим у первого было 15.2 = 30 монет, а у второго было 33 – 15 = 18 монет. Аналогично, во второй игре второй пират проиграл ровно столько, сколько у него осталось после второй игры, то есть 18 монет. Получаем, что перед второй игрой у второго пирата было 18.2 = 36 монет, а у первого было 30 – 18 = 12 монет. Проделав самостоятельно ещё один шаг рассуждения, вы найдёте, что вначале у пиратов было по 24 монеты.

*Ответ*: по 24 монеты.

**10 класс**

**1.** Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

*Указание*. Сумма цифр делится на 9, а число, составленное из двух последних цифр, делится на 4, т.е. 36 = 9⋅4.

*Ответ*: 9876543120.

**2.** Золотой призер футбольного чемпионата набрал 7 очков, серебряный – 5 очков, бронзовый – 3 очка. Чемпионат проводился в один круг, то есть каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Сколько очков набрала команда занявшая последнее место, если за победу дается 2 очка, за ничью – 1 очко и за поражение – 0 очков?

*Решение*. Пусть на чемпионате участвовали *п* команд. Всего сыграно *п*(*п* – 1)/2 матчей, значит разыгрывалось *п*(*п* – 1) очков. Последние *п* – 3 команды (исключая призёров) набрали не более чем по 3 очка. Поэтому *п*(*п* – 1) ≤ 7 + 5 + 3 + 3⋅(*п* – 3), то есть *п*2 – 4*п* – 6 ≤ 0, откуда *п* ≤ 5. Если бы *п* ≤ 4, то всего в чемпионате было бы разыграно не более 3⋅4 = 12 очков, тогда как одни призёры набрали 15 очков. Следовательно, *п* = 5. Пусть четвёртая команда набрала *х* очков, а последняя, пятая – *у* очков. Тогда *у* ≤ *х* ≤ 3 и 7 + 5 + 3 + *х* + *у* = 4⋅5 (число разыгранных очков). Поэтому *х + у* = 5, откуда *х* = 3, *у* = 2, в силу того, что *у* ≤ *х* ≤ 3.

*Ответ*: 2 очка.

**3.** Решите уравнение |*x* + 1| – |*x*| + 3|*x* – 1| – 2|*x* – 2| = *x* + 2.

*Ответ*: *х* ∈ {–2}∪[2, +∞].

**4.** На острове рыцарей и лжецов живут 100 человек. Каждый житель острова поклоняется одному из трёх богов: богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю острова задали три вопроса:

1) Поклоняетесь ли вы богу Солнца?

2) Поклоняетесь ли вы богу Луны?

3) Поклоняетесь ли вы богу Земли?

На первый вопрос утвердительно ответили 60 человек, на второй – 40 человек, на третий – 30 человек. Сколько на острове лжецов?

*Решение*. Каждый лжец дал 2 удовлетворительных ответа, а каждый рыцарь – один. А всего утвердительных ответов 60 + 40 + 30 = 130. Пусть на острове будет лжецов *х*, соответственно рыцарей *у*. Тогда получим:



Итак, на острове 70 рыцарей и 30 лжецов.

*Ответ*: 30 лжецов.

**5.** Решить систему уравнений



*Указание.* Сложите все уравнения, получив утроенную сумму всех неизвестных. Далее сложите первое, четвёртое и седьмое уравнения и получите *х*1 = 1. Остальные неизвестные находятся аналогично.

*Ответ*: *х*1 = 1, *х*2 = 2, *х*3 = 3, *х*4 = 4, *х*5 = –4, *х*6 = –3, *х*7 = –2, *х*8 = –1.